



KEMENTERIAN
PENDIDIKAN DASAR
DAN MENENGAH
2025

Panduan Guru

MATEMATIKA

Tingkat Lanjut

Edisi Revisi

Sri Adi Widodo
Wikan Budi Utami
Fitria Sulistyowati
Atiek Sandrawati

SMA/MA Kelas XII

Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah

Dilindungi Undang-Undang

Penafian: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi)

Penulis

Sri Adi Widodo
Wikan Budi Utami
Fitria Sulistyowati
Atiek Sandrawati

Penelaah

Sunardi
Kiki Ariyanti Sugeng

Penyelia/Penyelaras

Supriyatno
Maharani Prananingrum
Sofia Nida Khoerunnisa
Putri Ainur Islam

Kontributor

Iman Santoso
Eja Suteja

Ilustrator

Reddy Fajar Ciptoadi

Editor

Uly Amalia
Sofia Nida Khoerunnisa

Editor Visual

M. Firdaus Jubaedi

Desainer

Dono Merdiko

Penerbit

Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah

Dikeluarkan oleh

Pusat Perbukuan Kompleks Kemdikdasmen
Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
<https://buku.kemdikbud.go.id>

Edisi Revisi, 2025

ISBN 978-623-388-338-2 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-634-00-3303-8 (jil.2 PDF)

Isi buku ini menggunakan huruf Noto Serif 10/15 pt, SIL License.
xiv, 306 hlm.: 17,6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, termasuk Pendidikan Khusus. Sebagai sumber belajar utama dalam pembelajaran, buku senantiasa menyesuaikan diri dengan arah kebijakan pendidikan dan perkembangan kurikulum dari waktu ke waktu.

Sejalan dengan dinamika tersebut, pemerintah melakukan penyesuaian terhadap buku teks utama agar tetap relevan dan mendukung proses pembelajaran yang bermutu. Buku teks utama yang terdiri atas buku siswa dan panduan guru, disiapkan sebagai sumber belajar utama bagi peserta didik dan menjadi salah satu referensi atau inspirasi bagi guru dalam merancang dan mengembangkan pembelajaran sesuai karakteristik, potensi, dan kebutuhan peserta didik. Keberadaan buku teks utama ini diharapkan, dapat membentuk generasi yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan yang Maha Esa, dan berakhlak mulia; berpengetahuan luas; mandiri; kritis; kreatif; mampu bekerja sama; serta berdaya saing di tingkat nasional maupun global.

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkolaborasi dalam upaya menghadirkan buku teks utama ini. Semoga buku teks utama ini dapat menjadi tonggak perubahan yang menginspirasi, membimbing, dan mengangkat kualitas pendidikan kita ke puncak keunggulan.

Jakarta, Oktober 2025
Kepala Pusat Perbukuan,

Supriyatno, S.Pd., M.A.

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan rahmat-Nya, kami dapat menyelesaikan penulisan Buku Panduan Guru ini. Buku ini disusun sebagai salah satu pedoman bagi guru dalam melaksanakan pembelajaran Matematika agar peserta didik dapat memenuhi Capaian Pembelajaran Fase F untuk SMA/MA Kelas XII sesuai dengan Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Nomor 046/H/KR/2025 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah.

Matematika sering kali dianggap sebagai pelajaran yang abstrak, sulit, dan kurang relevan dalam kehidupan, padahal pada hakikatnya, banyak konsep dan prinsip matematika justru muncul di alam dan dekat dengan kehidupan sehari-hari. Pada buku ini, kami mencoba membawa konsep matematika lebih aplikatif pada kehidupan sehari-hari. Harapan kami, persepsi bahwa mempelajari matematika tidak ada manfaatnya karena tidak terimplementasi dalam kehidupan dan bidang ilmu lainnya, mulai berkurang dan hilang.

Dalam mempelajari konsep Matematika Tingkat Lanjut ini, guru dapat memastikan bahwa peserta didik telah menguasai konsep-konsep matematika dasar pada Fase E karena sangat erat kaitannya dengan konsep matematika pada Fase F. Hal ini bertujuan agar peserta didik tidak mengalami kesulitan dalam memahami materi matematika Fase F ini.

Buku Panduan Guru untuk pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut Kelas XII ini telah diupayakan dapat menarik perhatian dan minat guru. Guru diajak untuk seolah-olah melakukan pembelajaran Matematika melalui berbagai alternatif pembelajaran yang nantinya dapat diaplikasikan dalam proses pembelajaran. Di dalamnya juga dilengkapi alternatif jawaban dari soal-soal pada Ayo Mencoba, latihan soal, dan uji kompetensi yang terdapat pada Buku Siswa. Guru juga diberikan panduan dalam membimbing peserta didik pada aktivitas berdiskusi, berkomunikasi, bekerja sama, dan menggunakan teknologi dalam menyelesaikan masalah matematis yang aplikatif dalam kehidupan sehari-hari. Dengan demikian, kemampuan peserta didik sesuai dengan Dimensi Profil Lulusan dan keterampilan abad ke-21 semakin terasah.

Kami menyampaikan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku *Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut*

untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi) ini, khususnya kepada para penelaah, yaitu Prof. Dr. Sunardi, M.Pd. dan Prof. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng, M.Si. atas diskusi, bimbingan, dan masukan yang berharga dari awal sampai akhir proses penulisan. Tidak lupa juga kami sampaikan terima kasih kepada Pusat Perbukuan yang telah memfasilitasi tim penulis dan para penelaah sehingga buku ini dapat terselesaikan.

Akhir kata, kami berharap buku ini bermanfaat bagi pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut SMA/MA Kelas XII. Kami berharap semakin banyak peserta didik yang mulai menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

September 2025

Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Prakata.....	iv
Daftar Isi.....	vi
Daftar Gambar.....	ix
Daftar Tabel.....	x
Ada Apa di Buku Ini?	xii
Panduan Umum.....	1
A. Pendahuluan.....	2
1. Latar Belakang dan Tujuan Panduan.....	2
2. Pengantar Pembelajaran Mendalam.....	3
3. Dimensi Profil Lulusan.....	5
B. Capaian Pembelajaran.....	7
1. Karakteristik Mata Pelajaran.....	7
2. Capaian Pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut Fase F	9
3. Tujuan Pembelajaran Fase F	10
4. Alur Tujuan Pembelajaran Fase F	13
5. Alur Tujuan Pembelajaran Alternatif.....	15
C. Kerangka Pembelajaran.....	17
1. Praktik Pedagogis.....	17
2. Kemitraan Pembelajaran.....	17
3. Lingkungan Pembelajaran	18
4. Pemanfaatan Digital.....	18
D. Prinsip Pembelajaran	18
E. Asesmen.....	19
Bab 1 Lingkaran, Elips, dan Garis Singgung Lingkaran	21
A. Pendahuluan.....	22
1. Tujuan Pembelajaran dan Indikator	22
2. Peta Konsep	22
3. Saran Periode/Waktu Pembelajaran.....	23
B. Konsep dan Keterampilan Prasyarat	23
C. Kerangka Pembelajaran.....	23
D. Apersepsi.....	25
E. Formatif Awal	26
F. Panduan Pembelajaran Buku Siswa.....	27

G. Sumatif.....	60
H. Kunci Jawaban.....	62
I. Tindak Lanjut.....	91
J. Refleksi.....	92
1. Refleksi untuk Peserta Didik.....	92
2. Refleksi untuk Guru	93
3. Alur Menindaklanjuti Hasil Refleksi	94
K. Sumber Belajar	94
Bab 2 Turunan Fungsi.....	95
A. Pendahuluan	96
1. Tujuan Pembelajaran dan Indikator	96
2. Peta Konsep	96
3. Saran Periode/Waktu Pembelajaran.....	97
B. Konsep dan Keterampilan Prasyarat	97
C. Kerangka Pembelajaran.....	98
D. Apersepsi.....	100
E. Formatif Awal	101
F. Panduan Pembelajaran Buku Siswa	102
G. Sumatif.....	131
H. Kunci Jawaban.....	134
I. Tindak Lanjut.....	162
J. Refleksi.....	164
1. Refleksi untuk Peserta Didik.....	164
2. Refleksi untuk Guru	165
3. Alur Menindaklanjuti Hasil Refleksi	165
K. Sumber Belajar	166
Bab 3 Integral.....	167
A. Pendahuluan	168
1. Tujuan Pembelajaran dan Indikator	168
2. Peta Konsep	169
3. Saran Periode/Waktu Pembelajaran.....	169
B. Konsep dan Keterampilan Prasyarat	169
C. Kerangka Pembelajaran.....	171
D. Apersepsi.....	173
E. Formatif Awal	173

F. Panduan Pembelajaran Buku Siswa	174
G. Sumatif.....	204
H. Kunci Jawaban.....	207
I. Tindak Lanjut.....	219
J. Refleksi.....	220
1. Refleksi untuk Peserta Didik.....	221
2. Refleksi untuk Guru	221
3. Alur Menindaklanjuti Hasil Refleksi	222
K. Sumber Belajar	223
Bab 4 Analisis Data dan Peluang.....	225
A. Pendahuluan	226
1. Tujuan Pembelajaran dan Indikator	226
2. Peta Konsep	226
3. Saran Periode/Waktu Pembelajaran.....	227
B. Konsep dan Keterampilan Prasyarat	227
C. Kerangka Pembelajaran.....	228
D. Apersepsi.....	229
E. Formatif Awal	230
F. Panduan Pembelajaran Buku Siswa.....	231
G. Sumatif	259
H. Kunci Jawaban.....	261
I. Tindak Lanjut	280
1. Strategi Tindak Lanjut yang Terdiferensiasi	280
2. Pengayaan.....	282
J. Refleksi	284
1. Refleksi untuk Peserta Didik.....	284
2. Refleksi untuk Guru	285
3. Alur Menindaklanjuti Hasil Refleksi	286
K. Sumber Belajar	286
Glosarium.....	287
Daftar Pustaka	290
Indeks.....	293
Profil Pelaku Perbukuan.....	296

Daftar Gambar

Gambar 1	Empat Kerangka Pembelajaran diadaptasi dari <i>Four Elements of Learning Design</i> ©copyright 2018 Education in Motion (<i>New Pedagogies for Deep Learning</i>) https://deep-learning.global	4
Gambar 1.1	Peta Konsep Bab 1 Buku Siswa	22
Gambar 1.2	Elips Vertikal dengan Titik Pusat	36
Gambar 1.3	Sketsa Lengkungan	42
Gambar 1.4	Lingkaran, Garis Singgung Lingkaran, dan Titik Singgung	55
Gambar 1.5	Sketsa Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Persegi.....	65
Gambar 1.6	Sketsa Orbit Bumi Mengitari Matahari	74
Gambar 1.7	Sketsa Terowongan	76
Gambar 1.8	Sketsa Lingkaran dan Layang-Layang <i>PACB</i>	89
Gambar 2.1	Peta Konsep Bab 2 Buku Siswa	96
Gambar 2.2	Grafik Fungsi $y = 2x^2 - 7x + 1$	144
Gambar 2.3	Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2$	157
Gambar 3.1	Peta Konsep Bab 3 Buku Siswa	169
Gambar 3.2	Grafik Fungsi $f(x) = x^2$	187
Gambar 3.3	Grafik Fungsi $y = f(x)$	188
Gambar 3.4	Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$	188
Gambar 3.5	Grafik Fungsi $y = f(x)$	195
Gambar 3.6	Grafik Fungsi $f(x) = 2x - x^3$	198
Gambar 3.7	Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 9x$	199
Gambar 3.8	Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x$	200
Gambar 3.9	Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	201
Gambar 3.10	Grafik Fungsi $f(x) = 4.000x + 1.000$	202
Gambar 3.11	Grafik Fungsi $f(x) = 2 + x$	209
Gambar 3.12	Grafik Fungsi $f(x) = (2 - x)^2$	209
Gambar 3.13	Grafik Fungsi $f(x) = x^2 + x$	209
Gambar 3.14	Grafik Fungsi $f(x) = -2x + 4$	210
Gambar 3.15	Grafik Fungsi $f(x) = x^2 + x - 12$	214
Gambar 3.16	Grafik Fungsi $y^2 = 2x - 2$ dan $y = x - 5$	215
Gambar 3.17	Kerucut Terbalik.....	218
Gambar 3.18	Sketsa Partisi Kerucut Terbalik	218
Gambar 4.1	Peta Konsep Bab 4 Buku Siswa	227
Gambar 4.2	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(0,5 < Z < 1,75)$...	256
Gambar 4.3	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-1,33 < Z < 2,22)$.	257

Gambar 4.4	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-1,5 < Z < 1)$	270
Gambar 4.5	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,4)$	271
Gambar 4.6	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,55 < Z < 0,85)$	271
Gambar 4.7	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 1,34)$	272
Gambar 4.8	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > z)$	272
Gambar 4.9	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 1,6)$	273
Gambar 4.10	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,6 < Z < 0,6)$..	273
Gambar 4.11	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 2)$	274
Gambar 4.12	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -0,67)$	274
Gambar 4.13	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,67)$	274
Gambar 4.14	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z \geq 2)$	278
Gambar 4.15	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,4 \leq Z \leq 0,8)$...	278
Gambar 4.16	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,5)$	279
Gambar 4.17	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 2,50)$	279
Gambar 4.18	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(0,63 < Z < 2,50)$.	280
Gambar 4.19	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < 0,63)$	280

Daftar Tabel

Tabel 1	Distribusi Dimensi Profil Lulusan	6
Tabel 2	Elemen Konten Mata Pelajaran Matematika Tingkat Lanjut.	8
Tabel 3	Elemen Proses Mata Pelajaran Matematika Tingkat Lanjut ..	8
Tabel 4	Capaian Pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut Kelas XII	9
Tabel 5	Elemen, Capaian Pembelajaran, dan Tujuan Pembelajaran .	10
Tabel 1.1	Tujuan Pembelajaran dan Indikator Bab 1	22
Tabel 1.2	Kerangka Pembelajaran pada Materi Lingkaran, Elips, dan Garis Singgung Lingkaran	24
Tabel 1.3	Pengalaman Belajar Materi Lingkaran, Elips, dan Garis Singgung Lingkaran	27
Tabel 1.4	Persamaan Lingkaran dan Persamaan Garis Polar	56
Tabel 1.5	Contoh Kisi-Kisi Penilaian Uji Kompetensi (Asesmen Sumatif)	61
Tabel 1.6	Contoh Rubrik Penskoran untuk Soal Berbentuk Uraian	61
Tabel 1.7	Refleksi untuk Peserta Didik	92
Tabel 1.8	Refleksi untuk Guru	93
Tabel 2.1	Tujuan Pembelajaran dan Indikator Bab 2	96
Tabel 2.2	Kerangka Pembelajaran pada Materi Turunan Fungsi	99
Tabel 2.3	Pengalaman Belajar Materi Turunan Fungsi	102
Tabel 2.4	Contoh Kisi-Kisi Penilaian Uji Kompetensi (Asesmen Sumatif)	132

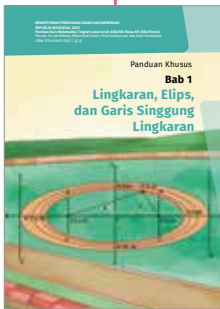
Tabel 2.5	Contoh Rubrik Penskoran untuk Soal Berbentuk Uraian	133
Tabel 2.6	Refleksi untuk Peserta Didik.....	164
Tabel 2.7	Refleksi Untuk Guru	165
Tabel 3.1	Tujuan Pembelajaran dan Indikator Bab 3.....	168
Tabel 3.2	Kerangka Pembelajaran pada Materi Integral.....	171
Tabel 3.3	Pengalaman Belajar Materi Integral.....	174
Tabel 3.4	Contoh Kisi-Kisi Penilaian Uji Kompetensi (Asesmen Sumatif)	205
Tabel 3.5	Contoh Rubrik Penskoran Soal Berbentuk Uraian.....	206
Tabel 3.6	Refleksi untuk Peserta Didik.....	221
Tabel 3.7	Refleksi untuk Guru.....	222
Tabel 4.1	Tujuan Pembelajaran dan Indikator Bab 4.....	226
Tabel 4.2	Kerangka Pembelajaran pada Materi Analisis Data dan Peluang	228
Tabel 4.3	Pengalaman Belajar Materi Analisis Data dan Peluang	232
Tabel 4.4	Taksiran Bola Putih yang Terambil.....	235
Tabel 4.5	Taksiran Pasangan Angka yang Terpilih (Muncul).....	240
Tabel 4.6	Nilai $Y = y$ dan $f(y)$	246
Tabel 4.7	Nilai $Z = z$ dan Peluangnya.....	246
Tabel 4.8	Peluang Kegagalan Mencanting	253
Tabel 4.9	Contoh Kisi-Kisi Penilaian Uji Kompetensi (Asesmen Sumatif)	259
Tabel 4.10	Contoh Rubrik Penskoran untuk Soal Berbentuk Uraian	260
Tabel 4.11	Taksiran Suku Cadang Busi Motor yang Cacat.....	262
Tabel 4.12	Taksiran Banyak Mobil yang Tergores.....	262
Tabel 4.13	Taksiran Pasangan Angka yang Terpilih (Muncul).....	263
Tabel 4.14	Nilai $Y = y$ dan $f(y)$	265
Tabel 4.15	Nilai x dan Peluang ($X = x$)	265
Tabel 4.16	Nilai $X = x$ dan $f(x)$	267
Tabel 4.17	Nilai $N = n$ dan $f(n)$	267
Tabel 4.18	Nilai $X = x$ dan $f(x)$	267

Ada Apa di Buku Ini?



Panduan Umum

Panduan Umum memaparkan latar belakang dan tujuan panduan, pengantar pembelajaran mendalam, Dimensi Profil Lulusan, capaian pembelajaran Fase F, tujuan pembelajaran, penjelasan mengenai empat kerangka pembelajaran, prinsip pembelajaran, dan panduan bagi guru dalam melakukan asesmen terhadap peserta didik.



Panduan Khusus

Bagian ini memuat komponen-komponen yang berkaitan dengan konten pada Buku Siswa untuk setiap bab. Komponen Panduan Khusus dimulai dari Pendahuluan hingga Sumber Belajar.



A. Pendahuluan

Subbab ini memuat tabel tujuan pembelajaran dan indikator, peta konsep, serta saran periode/waktu pembelajaran. Guru dapat merancang pembelajaran dengan mengacu pada ketiga komponen tersebut.

B. Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Bagian ini menjelaskan kemampuan prasyarat yang harus dikuasai peserta didik sebelum mempelajari materi tertentu dalam suatu bab.

C. Kerangka Pembelajaran

Berupa alternatif kerangka pembelajaran untuk materi bab tertentu berdasarkan empat kerangka pembelajaran, yaitu praktik pedagogis, kemitraan pembelajaran, lingkungan pembelajaran, dan pemanfaatan digital.

D. Apersepsi

Penjelasan mengenai apersepsi yang terdapat dalam Buku Siswa. Guru dapat mempelajarinya sebagai acuan dalam melakukan awal pembelajaran dan menyesuaikannya dengan kebutuhan peserta didik.

E. Formatif Awal

Penjelasan mengenai tes formatif awal yang dapat dilakukan guru untuk mengetahui pengetahuan awal peserta didik. Dengan demikian, guru dapat menyesuaikan pembelajaran dengan kompetensi rata-rata peserta didik.

F. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Panduan pembelajaran diawali tabel pengalaman belajar yang memuat judul aktivitas, pengalaman belajar dalam aktivitas, dan karakteristik pengalaman belajar. Panduan dilanjutkan dengan pemaparan tahapan pembelajaran setiap subbab berdasarkan materi pada Buku Siswa. Di dalamnya juga tersaji alternatif penyelesaian dari setiap soal Ayo Mencoba yang terdapat pada Buku Siswa.

G. Sumatif

Langkah-langkah dalam melakukan tes sumatif setelah peserta didik menyelesaikan pembelajaran materi suatu bab pada Buku Siswa. Bagian ini juga dilengkapi kisi-kisi penilaian uji kompetensi dan contoh rubrik penskoran yang dapat dijadikan guru sebagai acuan dalam menilai jawaban peserta didik.

H. Kunci Jawaban

Bagian ini memuat kunci jawaban dari setiap soal latihan dan uji kompetensi pada Buku Siswa. Sebagian besar kunci jawaban dilengkapi pembahasan/alternatif penyelesaian.

I. Tindak Lanjut

Penjelasan mengenai tindak lanjut dari kegiatan pembelajaran bagi peserta didik yang telah memenuhi tujuan pembelajaran dan yang belum memenuhi tujuan pembelajaran. Tindak lanjut tersebut mengacu pada prinsip Pembelajaran Mendalam, yaitu berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan.

J. Refleksi

Penjelasan mengenai refleksi bagi peserta didik dan guru beserta tindak lanjut dari hasil refleksi tersebut.

K. Sumber Belajar

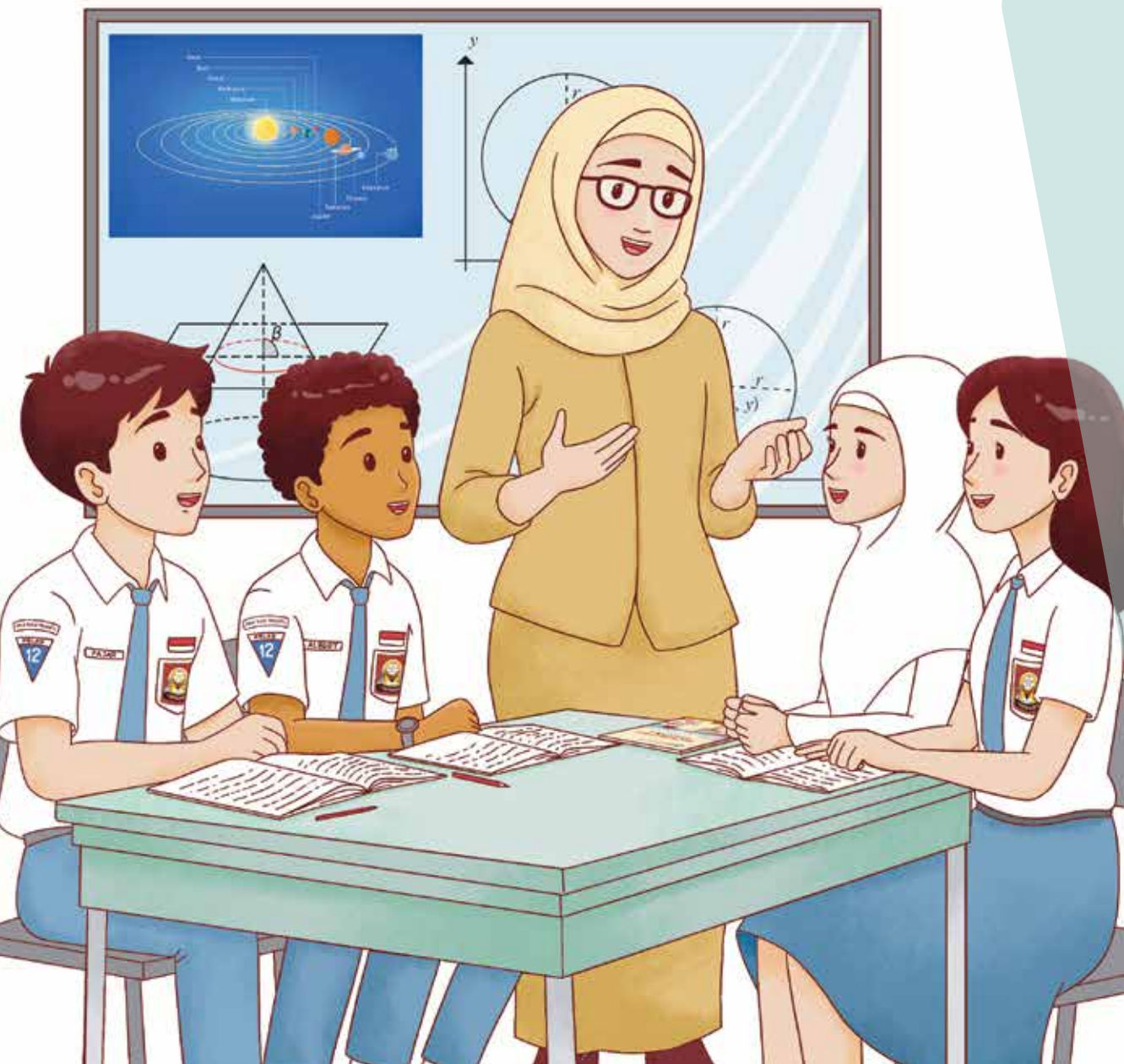
Daftar referensi sebagai acuan bagi guru dalam menerapkan pembelajaran materi suatu bab pada Buku Siswa.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
REPUBLIK INDONESIA, 2025

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi)

Penulis: Sri Adi Widodo, Wikan Budi Utami, Fitria Sulistyowati, dan Atiek Sandrawati
ISBN: 978-634-00-3303-8 (jil.2 PDF)

Panduan Umum



1. Latar Belakang dan Tujuan Panduan

Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 75 Tahun 2019 menetapkan bahwa buku teks utama terdiri atas Buku Siswa dan Buku Panduan Guru. Pemerintah melalui Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah menerbitkan Buku Siswa berjudul *Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi)*. Adapun buku ini sebagai Buku Panduan Guru yang berjudul *Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi)*.

Buku Panduan Guru ini memiliki empat fitur utama. *Pertama*, buku ini digunakan sebagai panduan penggunaan Buku Siswa (*Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi)*). Guru dapat terlebih dahulu membaca petunjuk pada buku ini sebelum memulai setiap kegiatan pembelajaran pada Buku Siswa. Buku ini memiliki penjelasan yang lebih detail untuk setiap bagian dari Buku Siswa sehingga guru dapat melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan tujuan yang telah ditetapkan.

Kedua, buku ini digunakan sebagai acuan aktivitas atau kegiatan pembelajaran Matematika. Buku ini berisi tujuan pembelajaran, tahapan kegiatan pembelajaran, alternatif jawaban untuk latihan soal pada Ayo Mencoba, dan latihan soal pada setiap akhir subbab. Uji kompetensi diberikan pada setiap akhir bab. Oleh karena itu, buku ini diharapkan dapat memudahkan guru untuk mengidentifikasi kegiatan pembelajaran untuk mencapai pengalaman belajar yang diinginkan.

Ketiga, buku ini digunakan untuk memberikan gambaran tentang metode atau pendekatan pembelajaran yang dapat diterapkan di kelas seperti pendekatan Pembelajaran Mendalam. Dalam buku ini, setiap materi pada setiap subbab dimulai dengan latar kehidupan nyata atau apersepsi kontekstual. Latar ini bertujuan memudahkan guru dalam menyampaikan materi matematika yang bersifat abstrak sehingga peserta didik mudah menjangkau materi matematika. Materi matematika yang dikaitkan dengan kehidupan sehari-hari dapat memotivasi peserta didik untuk mempelajarinya.

Buku Panduan Guru ini dilengkapi berbagai kegiatan eksplorasi yang dapat membantu guru untuk memahami konsep yang disajikan, memberikan alternatif

metode pembelajaran yang dapat digunakan untuk berdiskusi, bertanya, dan menjawab pertanyaan. Selain itu, buku ini memberikan alternatif metode pembelajaran yang dapat diterapkan di kelas, seperti pendekatan kontekstual, penemuan terbimbing, dan Pembelajaran Mendalam (*Deep Learning*). Berkaitan dengan hal tersebut, buku ini memberikan alternatif proses pembelajaran dengan pendekatan yang berbeda-beda agar dapat memfasilitasi guru dalam melakukan proses pembelajaran yang disesuaikan dengan karakteristik peserta didik atau materi pembelajaran.

Keempat, pada buku ini tersedia alternatif untuk melakukan tes formatif awal. Tes ini bertujuan mengetahui kemampuan peserta didik terhadap ketercapaian kompetensi sebelumnya. Seperti yang telah diketahui bersama, kedua tes ini diperlukan oleh guru untuk mempersiapkan strategi pembelajaran yang akan diterapkan di kelas Matematika.

Guru juga diharapkan mengembangkan metode dan pendekatan pembelajaran yang meningkatkan keterampilan abad ke-21 seperti pendekatan Pembelajaran Mendalam. Hal ini memungkinkan guru untuk meningkatkan kemampuan memecahkan masalah matematis, keterampilan berpikir kritis matematis, kreativitas matematis, kerja sama, dan komunikasi matematis berdasarkan kegiatan pembelajaran yang terdapat dalam Buku Siswa. Penerapan keterampilan belajar pada abad ke-21 juga erat kaitannya dengan dukungan terhadap peserta didik untuk mengembangkan keterampilan berpikir tingkat rendah (LOTS) ke keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS). Oleh karena itu, guru diharapkan mampu memberikan ruang, kesempatan, dan pengalaman belajar kepada peserta didik untuk melatih mereka agar tidak hanya memiliki keterampilan berpikir sederhana, tetapi juga berpikir tingkat tinggi.

Selaras dengan visi Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah, yaitu “Pendidikan Bermutu untuk Semua”, buku ini diharapkan dapat memberikan pendidikan yang berkualitas tinggi kepada seluruh peserta didik di Indonesia, tanpa membedakan latar belakang atau kondisi sosial ekonomi sehingga pendidikan matematika melalui pembelajaran Matematika menjadi bermutu untuk semua.

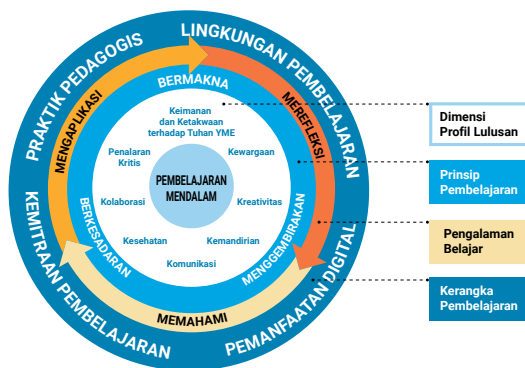
2. Pengantar Pembelajaran Mendalam

Pembelajaran Mendalam (PM) merupakan pendekatan pembelajaran yang memuliakan dengan menekankan pada penciptaan suasana belajar dan proses

pembelajaran berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan melalui olah pikir, olah hati, olah rasa, dan olah raga secara holistik dan terpadu. Pembelajaran Mendalam telah diterapkan di beberapa negara, baik secara eksplisit maupun implisit sebagai prinsip kurikulum dan pendekatan pembelajaran. Pembelajaran Mendalam, dalam konteks penerapannya di Indonesia, bukan merupakan kurikulum, melainkan suatu pendekatan pembelajaran. Pembelajaran Mendalam diharapkan dapat menjadi salah satu pendekatan pembelajaran yang mampu meningkatkan proses dan mutu pembelajaran.

Kerangka kerja Pembelajaran Mendalam terdiri atas empat komponen, yaitu (1) dimensi profil lulusan, (2) prinsip pembelajaran, (3) pengalaman belajar, dan (4) kerangka pembelajaran. Pembelajaran Mendalam difokuskan pada pencapaian delapan dimensi Profil Lulusan yang merupakan kompetensi utuh yang harus dimiliki oleh setiap peserta didik setelah menyelesaikan proses pembelajaran dan pendidikan. Profil Lulusan tersebut, yaitu (1) Keimanan dan Ketakwaan terhadap Tuhan YME, (2) Kewargaan, (3) Penalaran Kritis, (4) Kreativitas, (5) Kolaborasi, (6) Kemandirian, (7) Kesehatan, dan (8) Komunikasi. Delapan Profil Lulusan ini tidak hanya menekankan aspek kognitif, tetapi juga pengembangan karakter dan keterampilan yang dibutuhkan dalam kehidupan sehari-hari.

Profil Lulusan peserta didik Indonesia dapat diwujudkan melalui prinsip pembelajaran berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan. Prinsip tersebut direalisasikan melalui pengalaman belajar peserta didik, yaitu memahami, mengaplikasi, dan merefleksikan. Penerapan pendekatan PM didukung dengan praktik pedagogis progresif oleh guru, lingkungan belajar yang memberikan keamanan dan kenyamanan kepada peserta didik, pemanfaatan digitalisasi, serta adanya kemitraan pembelajaran yang optimal.



Gambar 1 Empat Kerangka Pembelajaran diadaptasi dari *Four Elements of Learning Design* ©copyright 2018 Education in Motion (*New Pedagogies for Deep Learning*) <https://deep-learning.global>.

Implementasi Pembelajaran Mendalam di SMA/MA atau yang sederajat diterapkan dengan cara yang lebih kompleks, yang mencakup proyek lintas mata pelajaran dan penelitian berbasis masalah yang aktual dan kontekstual untuk mengembangkan kemampuan berpikir tingkat tinggi yang meliputi berpikir kritis, perumusan dan pemecahan masalah, serta pengambilan keputusan. Implementasi PM di SMA/MA atau yang sederajat difokuskan pada pengembangan kemampuan berolah pikir, rasa, raga, dan hati, serta perencanaan karier peserta didik.

Di samping itu, implementasi PM SMA/MA atau yang sederajat perlu mencakup hal-hal sebagai berikut.

- a. Pilihan Karier: Model PM memberikan prediksi karier berdasarkan minat dan performa akademik.
- b. Kompetensi Pribadi: Menilai kemampuan diri, yang mencakup kemandirian, kreativitas, dan kemampuan berpikir kritis.
- c. Strategi Pembelajaran: Pemilihan strategi pembelajaran yang sesuai dengan gaya belajarnya.
- d. Keseimbangan Akademik dan Non-Akademik: Mengidentifikasi keselarasan antara kegiatan belajar dan ekstrakurikuler.

Dalam rangka penerapan Pembelajaran Mendalam, buku ini diharapkan dapat menginspirasi para guru untuk menyusun perencanaan pembelajaran yang sesuai dengan kebutuhan peserta didik dan karakteristik satuan pendidikan.

3. Dimensi Profil Lulusan

Pendidikan bermutu melalui pembelajaran Matematika menjadi fondasi dalam membentuk profil lulusan yang ideal. Delapan Dimensi Profil Lulusan merupakan cerminan dari hasil pendidikan yang menyeluruh dan menjadi salah satu karakteristik pembelajaran di Indonesia. Adapun kedelapan Dimensi Profil Lulusan adalah Keimanan dan Ketakwaan terhadap Tuhan Yang Maha Esa, Kewargaan, Penalaran Kritis, Kreativitas, Kolaborasi, Kemandirian, Kesehatan, dan Komunikasi. Adapun distribusi Dimensi Profil Lulusan (DPL) untuk setiap bab dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1 Distribusi Dimensi Profil Lulusan

Bab	DPL	Kegiatan
Bab 1	DPL 2 Kewargaan	Ayo Bereksplorasi, Ayo Berdiskusi
	DPL 3 Penalaran Kritis	Ayo Bereksplorasi, Ayo Berdiskusi, Ayo Mencoba
	DPL 4 Kreativitas	Ayo Berpikir Kreatif, Ayo Bereksplorasi
	DPL 5 Kolaborasi	Ayo Mencoba, Ayo Bereksplorasi
	DPL 6 Kemandirian	Ayo Mencoba
	DPL 8 Komunikasi	Ayo Mengomunikasikan, Ayo Berdiskusi
Bab 2	DPL 2 Kewargaan	Ayo Berpikir Kreatif, Ayo Berdiskusi
	DPL 3 Penalaran Kritis	Ayo Berpikir Kritis, Ayo Mencoba, Ayo Bereksplorasi
	DPL 4 Kreativitas	Ayo Bereksplorasi, Ayo Berpikir Kreatif
	DPL 5 Kolaborasi	Ayo Bereksplorasi, Ayo Berpikir Kreatif
	DPL 6 Kemandirian	Ayo Mencoba
	DPL 7 Kesehatan	Ayo Berpikir Kritis
	DPL 8 Komunikasi	Ayo Berdiskusi, Ayo Mengingat Kembali
Bab 3	DPL 2 Kewargaan	Ayo Berdiskusi
	DPL 3 Penalaran Kritis	Ayo Mencoba, Ayo Berpikir Kritis, Ayo Bereksplorasi
	DPL 4 Kreativitas	Ayo Mencoba, Ayo Berpikir Kreatif
	DPL 5 Kolaborasi	Ayo Berdiskusi, Ayo Berpikir Kritis, Ayo Bereksplorasi
	DPL 6 Kemandirian	Ayo Bereksplorasi, Ayo Mencoba
	DPL 7 Kesehatan	Ayo Berdiskusi
	DPL 8 Komunikasi	Ayo Mengingat Kembali, Ayo Berdiskusi
Bab 4	DPL 2 Kewargaan	Ayo Berdiskusi, Ayo Bereksplorasi
	DPL 3 Penalaran Kritis	Ayo Mencoba, Ayo Bereksplorasi
	DPL 4 Kreativitas	Ayo Mencoba, Ayo Bereksplorasi

Bab	DPL	Kegiatan
	DPL 5 Kolaborasi	Ayo Mengomunikasikan, Ayo Bereksplorasi
	DPL 6 Kemandirian	Ayo Mencoba
	DPL 7 Kesehatan	Ayo Mencoba
	DPL 8 Komunikasi	Ayo Mengomunikasikan, Ayo Mencoba

Setiap dimensi tersebut saling melengkapi dalam membentuk individu yang siap menghadapi tantangan zaman, berkontribusi secara positif di tengah masyarakat global, dan tetap berpijak pada nilai-nilai luhur bangsa. Untuk mencapai delapan profil lulusan tersebut, pada buku ini terdapat beberapa fitur yang dapat digunakan sebagai alternatif pembelajaran. Beberapa fitur buku yang menunjuk pada delapan Profil Lulusan, antara lain Ayo Mengomunikasikan, Ayo Mencoba, Ayo Bereksplorasi, Ayo Berpikir Kreatif, Ayo Berpikir Kritis, dan Ayo Berdiskusi.

Dengan berpedoman pada Buku Panduan Guru dalam menyampaikan materi yang terdapat dalam Buku Siswa, tentu saja pada akhirnya peserta didik harus memenuhi capaian pembelajaran yang diharapkan.

B. Capaian Pembelajaran

1. Karakteristik Mata Pelajaran

Mata pelajaran Matematika Tingkat Lanjut diorganisasikan dalam lingkup empat elemen konten dan lima elemen proses.

- Elemen konten dalam mata pelajaran Matematika Tingkat Lanjut terkait dengan pandangan bahwa matematika sebagai materi pembelajaran (*subject matter*) yang harus dipahami murid. Pemahaman matematis terkait erat dengan pembentukan alur pemahaman terhadap materi pembelajaran Matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, dan relasi yang bersifat formal-universal.

Elemen dan deskripsi elemen konten mata pelajaran Matematika Tingkat Lanjut adalah sebagai berikut.

Tabel 2 Elemen Konten Mata Pelajaran Matematika Tingkat Lanjut

Elemen	Deskripsi
Aljabar dan Fungsi	Bidang kajian Aljabar membahas tentang bentuk aljabar nonformal dalam bentuk simbol gambar sampai dengan aljabar formal dalam bentuk simbol huruf yang mewakili bilangan tertentu dalam sub-elemen persamaan dan pertidaksamaan, relasi dan pola bilangan, rasio dan proporsi, transformasi geometri, dan fungsi trigonometri.
Geometri	Bidang kajian Geometri membahas tentang berbagai bentuk bangun datar dan bangun ruang, vektor, serta ciri-cirinya dalam sub-elemen geometri datar dan geometri ruang.
Analisis Data dan Peluang	Bidang kajian Analisis Data dan Peluang membahas tentang pengertian data, jenis-jenis data, pengolahan data dalam berbagai bentuk representasi, dan analisis data kuantitatif terkait pemusatan dan penyebaran data serta peluang munculnya suatu data atau kejadian tertentu dalam sub-elemen data dan representasinya, serta membahas variabel acak diskrit dan fungsi peluang.
Kalkulus	Bidang kajian Kalkulus membahas tentang laju perubahan sesaat dari suatu fungsi kontinu, dan mencakup topik limit, diferensial, dan integral, serta penggunaannya.

- b. Elemen proses dalam mata pelajaran Matematika Tingkat Lanjut, terkait dengan pandangan bahwa Matematika sebagai alat konseptual untuk mengkonstruksi dan merekonstruksi materi pembelajaran Matematika berupa aktivitas mental yang membentuk alur berpikir dan alur pemahaman yang dapat mengembangkan kecakapan Matematika.

Elemen dan deskripsi elemen mata pelajaran Matematika Tingkat Lanjut adalah sebagai berikut.

Tabel 3 Elemen Proses Mata Pelajaran Matematika Tingkat Lanjut

Elemen	Deskripsi
Penalaran dan Pembuktian Matematis	Penalaran terkait dengan proses penggunaan pola hubungan dalam menganalisis situasi untuk menyusun serta menyelidiki praduga. Pembuktian matematis terkait proses membuktikan kebenaran suatu prinsip, rumus, atau teorema tertentu.
Pemecahan Masalah Matematis	Pemecahan masalah matematis terkait dengan proses penyelesaian masalah matematis atau masalah sehari-hari dengan cara menerapkan dan mengadaptasi berbagai strategi yang efektif. Proses ini juga mencakup konstruksi dan rekonstruksi pemahaman Matematika melalui pemecahan masalah.

Elemen	Deskripsi
Komunikasi	Komunikasi matematis terkait dengan pembentukan alur pemahaman materi pembelajaran Matematika melalui cara mengomunikasikan pemikiran matematis menggunakan bahasa matematis yang tepat. Komunikasi matematis juga mencakup proses menganalisis dan mengevaluasi pemikiran matematis orang lain.
Representasi Matematis	Representasi matematis terkait dengan proses membuat dan menggunakan simbol, tabel, diagram, atau bentuk lain untuk mengomunikasikan gagasan dan pemodelan Matematika. Proses ini juga mencakup fleksibilitas dalam mengubah dari satu bentuk representasi ke bentuk representasi lainnya, dan memilih representasi yang paling sesuai untuk memecahkan masalah.
Koneksi Matematis	Koneksi matematis terkait dengan proses mengaitkan antara materi pembelajaran Matematika pada suatu bidang kajian, lintas bidang kajian, lintas bidang ilmu, dan dengan kehidupan.

2. Capaian Pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut Fase F

Adapun Capaian Pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut atau Matematika Fase F kelas XII SMA/MA/Program Paket C dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 4 Capaian Pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut Kelas XII

Elemen	Capaian Pembelajaran
Aljabar dan Fungsi	Melakukan operasi aritmetika pada polinomial (suku banyak), menentukan faktor polinomial, dan menggunakan identitas polinomial untuk menyelesaikan masalah; melakukan operasi aljabar pada matriks dan menerapkannya dalam transformasi geometri; menyatakan fungsi trigonometri menggunakan lingkaran satuan, memodelkan fenomena periodik dengan fungsi trigonometri, dan membuktikan serta menerapkan identitas trigonometri dan aturan cosinus dan sinus; mengenal berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga dan fungsi <i>piecewise</i>) dan menggunakannya untuk memodelkan berbagai fenomena.
Geometri	Menyatakan vektor pada bidang datar, dan melakukan operasi aljabar pada vektor; melakukan pembuktian geometris menggunakan vektor; serta menyatakan sifat-sifat geometri dari persamaan lingkaran, elips dan persamaan garis singgung.
Analisis Data dan Peluang	Memahami variabel acak diskrit (distribusi binomial) dan fungsi peluang (distribusi normal), dan menggunakannya dalam memodelkan data; menginterpretasi parameter distribusi data secara statistik, menghitung nilai harapan distribusi binomial dan normal, dan menggunakannya dalam penyelesaian masalah.

Elemen	Capaian Pembelajaran
Kalkulus	Memahami laju perubahan dan laju perubahan rata-rata, serta laju perubahan sesaat sebagai konsep kunci derivatif (turunan), baik secara geometris maupun aljabar; menentukan turunan dari fungsi polinomial, eksponensial, dan trigonometri, dan menerapkan derivatif untuk membuat sketsa kurva, menghitung gradien dan menentukan persamaan garis singgung, menentukan kecepatan sesaat dan menyelesaikan soal optimasi; memahami integral, baik sebagai proses yang merupakan kebalikan dari derivatif dan juga sebagai cara menghitung luas; serta memahami teorema dasar kalkulus sebagai penghubung antara derivatif dan integral.

3. Tujuan Pembelajaran Fase F

Tabel 5 Elemen, Capaian Pembelajaran, dan Tujuan Pembelajaran

Elemen	Capaian Pembelajaran	Tujuan Pembelajaran
Aljabar dan Fungsi	Melakukan operasi aritmetika pada polinomial (suku banyak), menentukan faktor polinomial, dan menggunakan identitas polinomial untuk menyelesaikan masalah; melakukan operasi aljabar pada matriks dan menerapkannya dalam transformasi geometri; menyatakan fungsi trigonometri menggunakan lingkaran satuan, memodelkan fenomena periodik dengan fungsi trigonometri, dan membuktikan serta menerapkan identitas trigonometri dan aturan cosinus dan sinus; mengenal berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga dan fungsi piecewise) dan menggunakannya untuk memodelkan berbagai fenomena.	• Melakukan operasi aritmetika pada polinomial (suku banyak). • Menentukan faktor polinomial. • Menggunakan identitas polinomial untuk menyelesaikan masalah. • Melakukan operasi aljabar pada matriks. • Mengoperasikan komposisi transformasi geometri dengan bantuan matriks yang merepresentasikan transformasi. • Menerapkan transformasi geometri dalam permasalahan nyata. • Menyatakan fungsi trigonometri menggunakan lingkaran satuan. • Memodelkan fenomena periodik dengan fungsi trigonometri.

Elemen	Capaian Pembelajaran	Tujuan Pembelajaran
		• Menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk membuktikan identitas-identitas trigonometri lainnya, termasuk identitas trigonometri terkait penjumlahan dan pengurangan sudut. • Menyelesaikan permasalahan menggunakan Aturan Sinus dan Aturan Kosinus. • Menentukan nilai berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi <i>piecewise</i>). • Menganalisis karakteristik berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi <i>piecewise</i>). • Memodelkan permasalahan sehari-hari menggunakan berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi <i>piecewise</i>).

Elemen	Capaian Pembelajaran	Tujuan Pembelajaran
		Menyelesaikan permasalahan sehari-hari menggunakan berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi <i>piecewise</i>).
Geometri	Menyatakan vektor pada bidang datar, dan melakukan operasi aljabar pada vektor; melakukan pembuktian geometris menggunakan vektor; serta menyatakan sifat-sifat geometri dari persamaan lingkaran, elips dan persamaan garis singgung.	- Menyatakan vektor pada bidang datar. - Melakukan operasi aljabar pada vektor. - Membuktikan beberapa teorema geometris menggunakan konsep vektor. - Menentukan persamaan lingkaran. - Menentukan persamaan elips. - Menentukan persamaan garis singgung lingkaran.
Analisis Data dan Peluang	Memahami variabel acak diskrit (distribusi binomial) dan fungsi peluang (distribusi normal), dan menggunakannya dalam memodelkan data; menginterpretasi parameter distribusi data secara statistik, menghitung nilai harapan distribusi binomial dan normal, dan menggunakannya dalam penyelesaian masalah.	- Memahami konsep variabel acak, variabel acak diskret, dan variabel acak kontinu. - Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan variabel acak. - Menginterpretasikan parameter fungsi peluang. - Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan fungsi densitas peluang.

Elemen	Capaian Pembelajaran	Tujuan Pembelajaran
		- Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi binomial. - Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi normal.
Kalkulus	Memahami laju perubahan dan laju perubahan rata-rata, serta laju perubahan sesaat sebagai konsep kunci derivatif (turunan), baik secara geometris maupun aljabar; menentukan turunan dari fungsi polinomial, eksponensial, dan trigonometri, dan menerapkan derivatif untuk membuat sketsa kurva, menghitung gradien dan menentukan persamaan garis singgung, menentukan kecepatan sesaat dan menyelesaikan soal optimasi; memahami integral, baik sebagai proses yang merupakan kebalikan dari derivatif dan juga sebagai cara menghitung luas; serta memahami teorema dasar kalkulus sebagai penghubung antara derivatif dan integral.	- Memahami limit dan sifat-sifat limit. - Menentukan turunan fungsi aljabar dan trigonometri. - Mengidentifikasi konsep kemonotonan fungsi, titik, dan nilai stasioner, serta jenis ekstremnya. - Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menerapkan konsep kemonotonan fungsi, titik, dan nilai stasioner, serta jenis ekstremnya. - Menemukan konsep integral tak tentu. - Menerapkan konsep integral tak tentu melalui penyelesaian masalah. - Menemukan konsep integral tentu. - Menerapkan konsep integral tentu melalui penyelesaian masalah.

4. Alur Tujuan Pembelajaran Fase F

Kelas XI

- Melakukan operasi aljabar pada matriks.
- Melakukan operasi aritmetika pada polinomial (suku banyak).
- Menentukan faktor polinomial.
- Menggunakan identitas polinomial untuk menyelesaikan masalah.
- Menyatakan fungsi trigonometri menggunakan lingkaran satuan.

- ▶ Memodelkan fenomena periodik dengan fungsi trigonometri.
- ▶ Menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk membuktikan identitas-identitas trigonometri lainnya, termasuk identitas trigonometri terkait penjumlahan dan pengurangan sudut.
- ▶ Menyelesaikan permasalahan menggunakan Aturan Sinus dan Aturan Kosinus.
- ▶ Menyatakan vektor pada bidang datar.
- ▶ Melakukan operasi aljabar pada vektor.
- ▶ Membuktikan beberapa teorema geometris menggunakan konsep vektor.
- ▶ Mengoperasikan komposisi transformasi geometri dengan bantuan matriks yang merepresentasikan transformasi.
- ▶ Menerapkan transformasi geometri dalam permasalahan nyata.
- ▶ Menentukan nilai berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi piecewise).
- ▶ Menganalisis karakteristik berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi piecewise).
- ▶ Memodelkan permasalahan sehari-hari menggunakan berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi piecewise).
- ▶ Menyelesaikan permasalahan sehari-hari menggunakan berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi piecewise).

Kelas XII

- ▶ Menentukan persamaan lingkaran.
- ▶ Menentukan persamaan elips.
- ▶ Menentukan persamaan garis singgung lingkaran.
- ▶ Memahami limit dan sifat-sifat limit.
- ▶ Menentukan turunan fungsi aljabar dan trigonometri.
- ▶ Mengidentifikasi konsep kemonotonan fungsi, titik, dan nilai stasioner, serta jenis ekstremnya.
- ▶ Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menerapkan konsep kemonotonan fungsi, titik, dan nilai stasioner, serta jenis ekstremnya.
- ▶ Menemukan konsep integral tak tentu.
- ▶ Menerapkan konsep integral tak tentu melalui penyelesaian masalah.

- ▶ Menemukan konsep integral tentu.
- ▶ Menerapkan konsep integral tentu melalui penyelesaian masalah.
- ▶ Memahami konsep variabel acak, variabel acak diskret, dan variabel acak kontinu.
- ▶ Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan variabel acak.
- ▶ Menginterpretasikan parameter fungsi peluang.
- ▶ Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan fungsi densitas peluang.
- ▶ Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi binomial.
- ▶ Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi normal.

5. Alur Tujuan Pembelajaran Alternatif

Untuk memastikan pembelajaran berlangsung efektif dan bermakna, penyusunan Alur Tujuan Pembelajaran (ATP) alternatif perlu disesuaikan dengan karakteristik peserta didik dan konteks satuan pendidikan. Langkah-langkah dan pertimbangan dalam penyusunan ATP alternatif adalah sebagai berikut.

a. Menganalisis Capaian Pembelajaran (CP)

Guru terlebih dahulu melakukan pengkajian terhadap Capaian Pembelajaran (CP) yang berlaku pada fase tertentu. Kegiatan ini bertujuan memahami dan memastikan bahwa proses pembelajaran yang dirancang benar-benar selaras dengan capaian yang harus diraih oleh peserta didik sesuai dengan tahap perkembangannya.

b. Memetakan Karakteristik Peserta Didik

Untuk merancang pembelajaran yang relevan dan bermakna, guru perlu mengidentifikasi berbagai aspek penting dari peserta didik, seperti latar belakang, kemampuan awal, gaya belajar, minat, serta kebutuhan khusus mereka. Informasi ini menjadi pijakan dalam menyusun tujuan pembelajaran dan memilih strategi yang paling tepat agar proses belajar benar-benar sesuai dengan karakteristik dan potensi setiap individu.

c. Menyesuaikan Urutan dan Kedalaman Materi

Urutan penyajian topik atau materi pembelajaran dapat disusun secara fleksibel, menyesuaikan dengan alur berpikir yang lebih logis dan pengalaman belajar yang relevan bagi peserta didik. Di samping itu, tingkat kedalaman materi

pun dapat diatur berdasarkan kesiapan belajar peserta didik sehingga proses pembelajaran menjadi lebih efektif dan sesuai dengan kebutuhan mereka.

d. Mengintegrasikan Konteks Lokal dan Isu Aktual

Dalam upaya menciptakan pembelajaran yang relevan dan bernilai bagi peserta didik, materi serta aktivitas pembelajaran perlu dikembangkan secara kontekstual. Hal ini dapat dilakukan dengan mengintegrasikan unsur budaya lokal, potensi khas daerah, maupun isu-isu global yang aktual dan bermakna. Pendekatan ini tidak hanya memperkaya pengalaman belajar bagi peserta didik, tetapi juga menumbuhkan kesadaran terhadap lingkungan sosial dan global tempat mereka hidup.

e. Memilih Strategi dan Metode Pembelajaran yang Tepat

Untuk menyesuaikan pembelajaran dengan karakteristik kelas, guru dapat menerapkan pendekatan yang variatif, seperti pembelajaran berbasis masalah yang menekankan pada pemecahan situasi nyata, penemuan terbimbing yang memfasilitasi eksplorasi konsep secara bertahap, pembelajaran kolaboratif yang mengedepankan kerja sama antarpeserta didik, dan *flipped classroom* yang mendorong keterlibatan aktif melalui pemahaman materi secara mandiri sebelum sesi tatap muka.

f. Menyesuaikan Metode dan Instrumen Asesmen

Asesmen formatif dan sumatif perlu dirancang secara fleksibel agar sesuai dengan kebutuhan dan kemampuan peserta didik. Bentuknya dapat bervariasi, mulai dari proyek, observasi, jurnal refleksi, tes tertulis atau tes lisan, hingga portofolio. Semuanya bertujuan memberikan gambaran menyeluruh tentang proses dan hasil belajar peserta didik.

g. Mengakomodasi Pembelajaran Berdiferensiasi

ATP alternatif perlu dirancang untuk memfasilitasi penerapan pembelajaran berdiferensiasi, baik dalam hal konten, proses, maupun produk, guna memastikan setiap peserta didik memperoleh layanan pembelajaran yang adil, setara, dan sesuai dengan kebutuhan serta potensi individualnya.

h. Menyusun Alur secara Progresif dan Logis

Tujuan pembelajaran dirancang secara runtut dan bertahap agar pelaksanaan pembelajaran dapat berlangsung secara sistematis serta lebih mudah dipahami dan diikuti oleh peserta didik.

1. Praktik Pedagogis

Selain menggunakan pendekatan Pembelajaran Mendalam (*Deep Learning*), Buku Siswa dirancang dengan pendekatan Pembelajaran Berbasis Masalah (*Problem-Based Learning*), yaitu peserta didik dihadapkan pada masalah matematis dan diberikan kesempatan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Selain itu, guru dapat menggunakan pendekatan lain seperti Penemuan Terbimbing (*Discovery Learning*). Dengan pendekatan ini, peserta didik memiliki kesempatan untuk melakukan pra-eksplorasi dan dibimbing melalui pertanyaan pemandu terstruktur (*scaffolding question*) untuk mengeksplorasi konsep-konsep kunci yang menjadi tujuan belajar mereka. Namun, guru dapat menggunakan berbagai pendekatan lain bergantung pada situasi lokal.

Proses pembelajaran memungkinkan peserta didik untuk melakukan kegiatan eksploratif secara individu maupun kegiatan *kolaboratif* secara berkelompok. Proses pembelajaran secara eksploratif memungkinkan peserta didik belajar secara mandiri; mengembangkan rasa ingin tahu, berpikir kritis, dan berpikir kreatif; memperkuat pemahaman konsep; serta meningkatkan kepercayaan diri melalui pengalaman langsung dan penemuan sendiri. Proses pembelajaran secara *kolaboratif* dapat dilakukan antara peserta didik dan guru atau antarpeserta didik. Interaksi tersebut merupakan dasar dari pemahaman yang lebih dalam.

Guru berperan sangat penting dalam memimpin kegiatan pembelajaran, membimbing proses berpikir peserta didik, dan memfasilitasi diskusi kelas untuk mencapai tujuan pembelajaran. Dengan posisi guru dalam aktivitas pembelajaran tersebut, guru menjadi ujung tombak agar pembelajaran yang dilakukan tidak melenceng dari arah capaian pembelajaran yang sudah ditetapkan.

2. Kemitraan Pembelajaran

Interaksi antarpeserta didik dapat terjadi jika mereka memiliki kebutuhan dan tujuan yang sama dalam pembelajaran. Adapun tujuan kolaborasi antarpeserta didik pada pembelajaran Matematika adalah meningkatkan pemahaman konsep melalui diskusi, melatih kemampuan komunikasi dan kerja sama, membangun sikap saling menghargai, serta mengembangkan keterampilan pemecahan masalah secara bersama-sama.

3. Lingkungan Pembelajaran

Guru dapat menggunakan media pembelajaran yang relevan dan sesuai dengan karakteristik materi dan peserta didik. Alternatif metode pembelajaran yang dapat digunakan pada pembelajaran Matematika adalah *Flipped Classroom*. Metode ini menekankan pada proses pembelajaran yang dibalik dari yang konvensional. Pada proses konvensional, guru menyampaikan materi terlebih dahulu, kemudian peserta didik mengerjakan tugas atau latihan untuk penguatan. Namun pada metode *flipped classroom*, peserta didik mengerjakan soal tutorial secara asinkron (melalui Google Classroom atau sejenisnya) dan melakukan komunikasi virtual menggunakan Google Meet atau Zoom dalam sesi sinkron (sesi daring). Peserta didik dapat mencari buku, berdiskusi, atau bertanya, dengan tetap melalui pembimbingan dari seorang guru. Guru dapat merekam penjelasan materi sehingga peserta didik dapat menonton pembahasan dari soal eksplorasi termasuk penjelasan konsepnya setelah melakukan eksplorasi secara mandiri. Kegiatan pada sesi sinkron lebih banyak digunakan untuk berdiskusi, tanya jawab, dan memberikan umpan balik kepada peserta didik.

4. Pemanfaatan Digital

Teknologi membantu dalam proses pembelajaran Matematika. Ada beberapa teknologi alternatif yang tersedia, seperti kalkulator saintifik, GeoGebra, Photomath, dan Mathway. Guru juga dapat menggunakan teknologi lainnya. Walaupun teknologi informasi dapat menyebabkan peserta didik menjadi bergantung pada Kecerdasan Artifisial (*Artificial Intelligence*), guru diharapkan dapat mengurangi ketergantungan peserta didik agar mereka dapat memahami konsep matematika dan mampu berpikir kritis serta kreatif. Misalnya sebagai batasan, teknologi informasi digunakan oleh peserta didik untuk membantunya dalam mengecek jawaban yang telah dibuat, bukan untuk mencari jawaban.

D. Prinsip Pembelajaran

Pembelajaran matematika dalam buku ini disusun berdasarkan tiga prinsip utama, yaitu berkesadaran (*mindful*), bermakna (*meaningful*), dan menggembarakan (*joyful*). Ketiga prinsip ini bertujuan mendukung guru dalam

merancang pembelajaran yang sesuai dengan karakteristik peserta didik dan esensi dari materi matematika yang diajarkan.

1. Berkesadaran

Pembelajaran dilakukan dengan kesadaran penuh terhadap kondisi dan kesiapan peserta didik. Guru diajak untuk melakukan identifikasi awal melalui asesmen formatif awal guna memahami kebutuhan dan potensi peserta didik. Dengan demikian, strategi pembelajaran yang dipilih benar-benar relevan dan dapat menjembatani kesenjangan pemahaman sejak awal proses belajar.

2. Bermakna

Matematika akan lebih mudah dipahami jika dikaitkan dengan kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu, dalam buku ini disediakan beragam contoh kontekstual, aktivitas eksploratif, dan masalah nyata yang dirancang agar peserta didik tidak hanya mempelajari rumus, tetapi juga memahami makna di balik konsep. Pembelajaran bermakna membantu peserta didik melihat kegunaan matematika dalam berbagai bidang, seperti sains, teknologi, ekonomi, dan kesehatan.

3. Menggembirakan

Agar peserta didik terlibat aktif dan termotivasi, pembelajaran dirancang dalam suasana yang menyenangkan, tidak menegangkan. Guru dapat memanfaatkan aktivitas kelompok, diskusi terbuka, permainan edukatif, atau pendekatan *flipped classroom* sesuai dengan kebutuhan kelas. Dalam buku ini, aktivitas seperti Ayo Mencoba, Ayo Bereksplorasi, dan Ayo Berdiskusi disusun untuk mendukung terciptanya suasana belajar yang positif dan memotivasi.

E. Asesmen

Untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diinginkan, proses *monitoring* dan evaluasi pembelajaran berlangsung terus-menerus sepanjang proses pembelajaran (penilaian formatif atau *assessment for learning*) dan pada akhir proses pembelajaran (penilaian sumatif atau *assessment of learning*). Peserta didik juga terlibat dalam penilaian diri (*assessment as learning*) untuk mengembangkan keterampilan metakognitif (*self-learning monitoring*).

Sebagai asesmen formatif awal, guru dapat mengidentifikasi kesulitan belajar atau masalah yang dialami peserta didik, kemudian merencanakan tindak lanjut yang tepat untuk mengatasi masalah tersebut. Secara umum asesmen formatif awal terdiri atas tes formatif nonkognitif dan tes formatif kognitif. Tes formatif nonkognitif diberikan untuk mengetahui kondisi psikologis peserta didik sebelum menerima materi. Adapun tes formatif kognitif diberikan pada awal pembelajaran untuk mengetahui capaian kompetensi peserta didik, menyesuaikan pembelajaran di kelas dengan kompetensi rata-rata peserta didik, dan memberikan pembelajaran tambahan kepada peserta didik dengan kompetensi di bawah rata-rata. Pada tes formatif kognitif, guru dapat menggunakan pertanyaan kontekstual yang relevan dengan pengalaman peserta didik untuk melakukan penilaian awal sebelum dimulainya pembelajaran inti.

Pertanyaan-pertanyaan tersebut dapat digunakan untuk menentukan tahap pemahaman peserta didik, apakah berada pada tahap *unistruktural* atau *multistruktural*. Tahap *unistruktural* menunjukkan bahwa pemahaman peserta didik sangat terbatas pada satu aspek atau elemen dari sebuah konsep atau tugas. Pada tahap ini mereka mampu membuat hubungan yang sederhana dan jelas, tetapi tidak memiliki pemahaman mendalam tentang relevansi atau pentingnya informasi tersebut. Pada tahap *multistruktural*, peserta didik dapat mengenali beberapa informasi penting meskipun belum terkait.

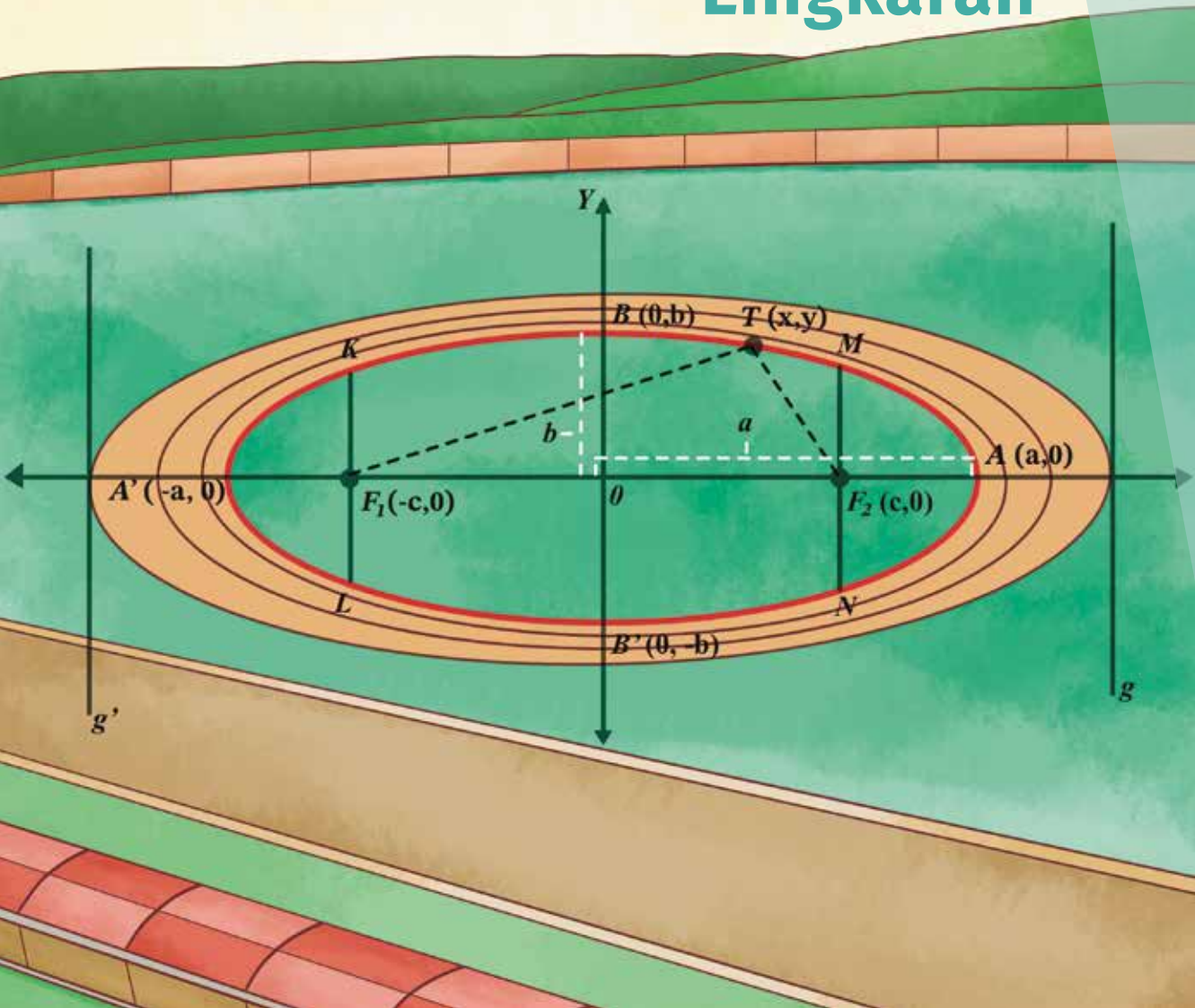
Guru dapat melakukan penilaian formatif dan memberikan umpan balik kepada peserta didik melalui kegiatan Ayo Mencoba dan Latihan Soal. Adapun penilaian sumatif dapat dilakukan melalui tes atau Uji Kompetensi pada akhir bab. Peserta didik memiliki kesempatan untuk menilai diri sendiri melalui kegiatan refleksi pada akhir bab. Materi pengayaan/proyek juga merupakan kesempatan bagi guru untuk menilai pengetahuan, keterampilan, dan aspek lain, seperti kerja tim dan keterampilan komunikasi.

Pada aspek penilaian, guru dapat menggunakan instrumen penilaian yang disesuaikan dengan karakteristik peserta didik dan materi, seperti tes tertulis, tes lisan, penugasan, penilaian diri, observasi, kinerja, produk, proyek, dan portofolio. Buku Panduan Guru ini dilengkapi dengan alternatif atau contoh penilaian diri (*self assessment*) bagi peserta didik, contoh kisi-kisi penilaian uji kompetensi, dan rubrik penilaian tes tertulis baik untuk penilaian formatif maupun penilaian sumatif.

Panduan Khusus

Bab 1

Lingkaran, Elips, dan Garis Singgung Lingkaran



A. Pendahuluan

1. Tujuan Pembelajaran dan Indikator

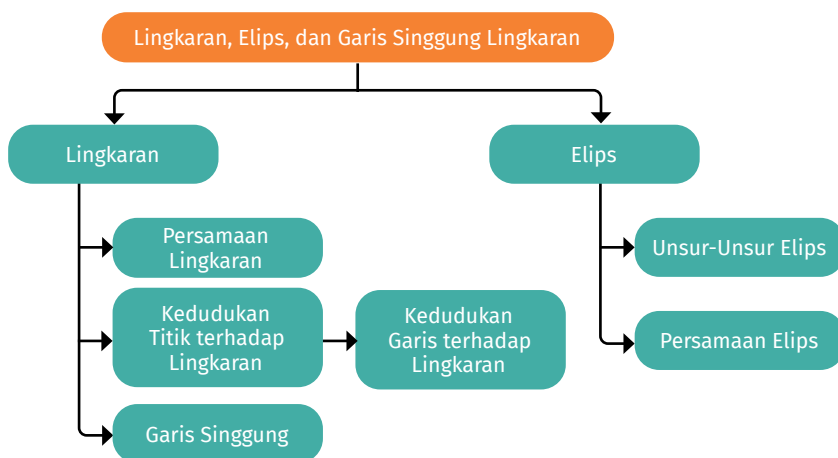
Guru dapat mempelajari tujuan pembelajaran dan indikator Bab 1 Buku Siswa pada tabel berikut.

Tabel 1.1 Tujuan Pembelajaran dan Indikator Bab 1

Tujuan Pembelajaran	Indikator
Peserta didik mampu menentukan persamaan lingkaran, persamaan elips, dan persamaan garis singgung lingkaran.	Peserta didik mampu: 1. menentukan persamaan lingkaran; 2. menggunakan unsur-unsur elips untuk menentukan persamaan elips; 3. menentukan kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran (di dalam, pada, atau di luar; menyinggung, memotong, atau tidak berpotongan); serta 4. memecahkan permasalahan matematis yang berkaitan dengan garis singgung lingkaran.

2. Peta Konsep

Gambar 1.1 merupakan peta konsep materi Lingkaran, Elips, dan Garis Singgung Lingkaran pada Bab 1 Buku Siswa.



Gambar 1.1 Peta Konsep Bab 1 Buku Siswa

Di dalam Bab 1 ini terdapat keterkaitan antara materi kedudukan titik atau garis terhadap lingkaran dan materi garis singgung lingkaran. Peserta didik diharapkan menguasai materi kedudukan titik atau garis terhadap lingkaran terlebih dahulu sebelum mempelajari materi garis singgung lingkaran.

3. Saran Periode/Waktu Pembelajaran

Alokasi waktu yang disarankan untuk mempelajari materi Bab 1 adalah 50 JP. Guru dapat mengatur alokasi waktu tersebut secara efektif agar proses pembelajaran berjalan lancar dan tujuan pembelajaran tercapai.

B. Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Konsep dasar yang harus dikuasai oleh peserta didik untuk memahami materi ini, di antaranya Teorema Pythagoras, persamaan linear, trigonometri (terutama pada sinus, kosinus, dan tangen), serta persamaan kuadrat.

Teorema Pythagoras merupakan konsep untuk mengukur jarak, panjang, dan arah dalam geometri analitik. Teorema ini menjadi dasar dari berbagai rumus yang melibatkan posisi, pergerakan, dan bentuk dalam koordinat Kartesius. Hal tersebut menunjukkan bahwa Teorema Pythagoras digunakan untuk menentukan jarak antartitik, jarak titik terhadap garis, dan kemiringan suatu garis (gradien). Begitu juga pada konsep dasar trigonometri (terutama pada sinus, kosinus, dan tangen), Teorema Pythagoras dapat digunakan untuk menentukan kemiringan suatu garis (gradien).

Selain Teorema Pythagoras, persamaan kuadrat memiliki peran krusial dalam geometri analitik. Hal ini karena banyak masalah geometri yang melibatkan titik, garis, dan kurva dapat diselesaikan dengan persamaan kuadrat, seperti menentukan titik potong atau titik tertentu suatu garis dengan kurva.

C. Kerangka Pembelajaran

Kerangka pembelajaran untuk materi pada Bab 1 ini berdasarkan empat dimensi utama, yaitu praktik pedagogis, kemitraan pembelajaran, lingkungan pembelajaran, dan pemanfaatan digital. Alternatif kerangka pembelajaran ini diharapkan dapat menciptakan pengalaman belajar yang mendalam,

kontekstual, dan bermakna bagi peserta didik dalam memahami konsep geometri analitik, khususnya pada materi lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran.

Tabel 1.2 Kerangka Pembelajaran pada Materi Lingkaran, Elips, dan Garis Singgung Lingkaran

Kerangka Pembelajaran	Deskripsi
Praktik Pedagogis	Model pembelajaran: <i>Problem-Based Learning, Inquiry-Based Learning, dan Deep Learning.</i> Strategi pembelajaran: ▶ Eksplorasi menggunakan apersepsi kontekstual dengan latar kehidupan nyata. Strategi ini bertujuan memudahkan guru dalam menyampaikan materi matematika yang bersifat abstrak sehingga peserta didik mudah menjangkau materi matematika. ▶ Diskusi kelompok untuk menganalisis permasalahan matematis dan menyimpulkan beberapa alternatif solusi dari permasalahan matematis yang dihadapi. ▶ Refleksi individu melalui penilaian diri yang terdapat pada akhir setiap subbab. Asesmen: ▶ Formatif: latihan soal dalam kegiatan Ayo Mencoba dan latihan soal pada akhir setiap subbab. ▶ Sumatif: Uji Kompetensi Bab 1.
Kemitraan Pembelajaran	Kolaborasi: ▶ <i>Peer teaching</i>: peserta didik saling menjelaskan konsep. ▶ Kerja kelompok: bekerja sama dalam kelompok kecil untuk menyelesaikan permasalahan matematika. Kegiatan ini bertujuan meningkatkan pemahaman konsep, keterampilan berpikir kritis, serta kemampuan berkomunikasi dan bekerja sama. ▶ Diskusi soal: peserta didik membahas dan menyelesaikan soal-soal matematika. ▶ Kontrak belajar: peserta didik menyepakati target pembelajaran. ▶ Interdisipliner: integrasi materi lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran dengan mata pelajaran lain.

Kerangka Pembelajaran	Deskripsi
	Peran guru: ► Fasilitator dan pengarah eksplorasi. ► Pemberi umpan balik reflektif.
Lingkungan Pembelajaran	Fisik: Media pembelajaran berupa LCD proyektor, papan Kartesius, papan tulis, atau yang sejenis. Psikososial: ► Kelas yang mendorong rasa ingin tahu. ► Kesalahan dihargai sebagai bagian dari proses belajar. ► Diskusi terbuka untuk mengeksplorasi ide.
Pemanfaatan Digital	Alat dan platform: ► GeoGebra: simulasi jawaban untuk mengecek jawaban peserta didik. ► Kahoot!/Quizizz: evaluasi formatif dan sumatif interaktif. ► Padlet/Jamboard: kolaborasi dan refleksi visual. Aktivitas digital: ► Mengecek jawaban peserta didik menggunakan platform GeoGebra atau platform lain yang sejenis. ► Menyelesaikan permasalahan matematis menggunakan platform Kahoot!, Quizizz, atau platform lain yang sejenis. ► Mengolaborasikan dan mempresentasikan hasil diskusi menggunakan platform Padlet, Jamboard, atau platform lain yang sejenis.

D. Apersepsi

Pada awal pembelajaran, guru mengajak peserta didik mengamati berbagai objek nyata di sekitar yang berbentuk lingkaran dan elips. Contoh bentuk lingkaran dapat dilihat pada jam, ban, roda, dan *sprocket* sepeda yang dapat dikaitkan dengan garis singgung lingkaran. Sementara itu, contoh bentuk elips dapat ditemukan pada orbit planet atau lintasan pacuan kuda. Melalui pengamatan tersebut, peserta didik diajak menyadari bahwa lingkaran dan elips tidak terbatas sebagai bentuk geometri abstrak, tetapi juga diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Selanjutnya, guru mengaitkan kembali materi prasyarat yang telah dipelajari sebelumnya, seperti persamaan garis, jarak

titik ke garis, dan sistem koordinat Kartesius sehingga peserta didik mampu membangun jembatan antara pengetahuan lama dengan materi baru tentang lingkaran, elips, serta persamaan garis singgung lingkaran.

Pendekatan Pembelajaran Mendalam berbasis Taksonomi SOLO diharapkan mampu mendorong peserta didik untuk tidak hanya mengenali bentuk lingkaran dan elips, tetapi juga menghubungkan konsep, mengintegrasikan informasi baru dengan pengetahuan sebelumnya, serta menerapkannya dalam permasalahan yang lebih kompleks. Apersepsi kontekstual melalui situasi nyata seperti roda sepeda atau orbit planet membantu mengurangi kesan abstrak. Apersepsi kontekstual yang mengaitkan materi dengan dunia nyata, membangun pemahaman secara bertahap sehingga peserta didik memiliki fondasi kuat dalam memahami persamaan lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran.

E. Formatif Awal

Formatif awal berfungsi untuk mengidentifikasi kesulitan belajar atau masalah yang dialami peserta didik, kemudian merencanakan tindak lanjut yang tepat untuk mengatasi masalah tersebut. Secara umum, tes formatif terdiri atas tes formatif kognitif dan tes formatif nonkognitif.

Guru dapat memberikan tes formatif awal kognitif kepada peserta didik pada awal pembelajaran untuk mengetahui capaian kompetensi peserta didik, menyesuaikan pembelajaran di kelas dengan kompetensi rata-rata peserta didik, dan memberikan pembelajaran tambahan kepada peserta didik dengan kompetensi di bawah rata-rata. Guru dapat menggunakan pertanyaan kontekstual yang relevan dengan pengalaman peserta didik sebelum dimulainya pembelajaran inti. Contoh pertanyaannya sebagai berikut.

Contoh Tes Formatif Awal

- ▶ Apakah kalian mengetahui bentuk koin, roda, atau cincin?
- ▶ Apakah kalian mengetahui lintasan bumi terhadap matahari?
- ▶ Apakah kalian dapat membedakan persamaan lingkaran dengan persamaan elips?
- ▶ Apakah kalian dapat memprediksi ketinggian maksimal truk agar bisa melintasi sebuah terowongan yang berbentuk setengah elips atau setengah lingkaran?

Pertanyaan-pertanyaan tersebut dapat digunakan untuk menentukan apakah pemahaman peserta didik berada pada tahap *prastruktural*, *unistruktural*, atau *multistruktural*. Tahap *prastruktural* menunjukkan bahwa peserta didik belum memiliki pemahaman atau ide yang kuat mengenai suatu topik atau masalah sehingga mengalami kesulitan untuk memberikan jawaban yang relevan atau gagal menggunakan informasi yang dimiliki dalam menyelesaikan tugas. Tahap *unistruktural* menunjukkan bahwa pemahaman peserta didik sangat terbatas pada satu aspek atau elemen dari sebuah konsep atau tugas. Pada tahap ini mereka hanya mampu membuat hubungan yang sederhana dan jelas, tetapi tidak memiliki pemahaman mendalam tentang relevansi atau pentingnya informasi tersebut. Tahap *multistruktural* menunjukkan bahwa peserta didik dapat mengenali beberapa informasi penting meskipun belum terkait.

F. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Tujuan umum aktivitas belajar mengajar adalah peserta didik memiliki kemampuan untuk menentukan persamaan lingkaran, persamaan elips, dan persamaan garis singgung lingkaran. Untuk mencapai tujuan pembelajaran ini, diperlukan rancangan pengalaman belajar yang sistematis dan kontekstual. Tabel 1.3 berikut menunjukkan pengalaman belajar dan karakteristik pembelajaran dari setiap aktivitas pada Bab 1 Buku Siswa.

Tabel 1.3 Pengalaman Belajar Materi Lingkaran, Elips, dan Garis Singgung Lingkaran

Judul Aktivitas	Pengalaman Belajar	Karakteristik
 Ayo Mengingat Kembali Mengingat kembali materi sebelumnya.	Memahami	Menghubungkan pengetahuan baru dengan pengetahuan sebelumnya.
 Ayo Bereksplorasi Kegiatan menyelidiki konsep matematika.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.

Judul Aktivitas	Pengalaman Belajar	Karakteristik
 Ayo Mengomunikasikan Kegiatan mengomunikasikan pendapat atau hasil diskusi.	Mengaplikasi	Menerapkan pengetahuan ke dalam situasi nyata atau bidang lain.
 Ayo Mencoba Kegiatan mengerjakan soal.	Mengaplikasi	Menghubungkan konsep yang dipelajari dengan ide baru.
 Ayo Berdiskusi Kegiatan bertukar pikiran dan menyatakan gagasan.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.
 Tahukah Kamu Pengetahuan umum yang berkaitan dengan materi.	Merefleksi	Refleksi terhadap pencapaian tujuan pembelajaran (evaluasi diri).
 Ayo Berpikir Kreatif Kegiatan menghasilkan gagasan, karya, atau tindakan orisinal.	Mengaplikasi	Berpikir kritis dan mencari solusi inovatif berdasarkan pengetahuan yang ada.
 Ayo Berpikir Kritis Kegiatan memproses informasi dan gagasan.	Mengaplikasi	Berpikir kritis dan mencari solusi inovatif berdasarkan pengetahuan yang ada.
 Ayo Menggunakan Teknologi Kegiatan memanfaatkan kalkulator atau aplikasi lain.	Mengaplikasi	Menerapkan pengetahuan ke dalam situasi nyata atau bidang lain.

Judul Aktivitas	Pengalaman Belajar	Karakteristik
 Petunjuk Penjelasan mengenai koneksi antarkonsep materi.	Memahami	Menghubungkan pengetahuan baru dengan pengetahuan sebelumnya.

Subbab A: Lingkaran

Indikator Tujuan Pembelajaran

- menentukan persamaan lingkaran.

1. Definisi Lingkaran

Guru meminta pendapat kepada peserta didik mengenai definisi lingkaran dari beberapa definisi yang tercantum pada Buku Siswa. Guru dapat mengarahkan pada kata kunci *jarak yang sama* dan *titik tertentu*. Kegiatan ini bertujuan agar peserta didik dapat mengonstruksi pengetahuan yang berkaitan dengan definisi lingkaran. Guru dapat menggunakan gambar atau kegiatan Ayo Bereksplorasi 1.1 pada Buku Siswa untuk mempermudah peserta didik dalam memahami definisi lingkaran.

Ayo Bereksplorasi 1.1

Guru menyiapkan alat sederhana berupa benang, pensil/bolpoin, dan kertas untuk setiap peserta didik atau kelompok. Guru menjelaskan bahwa benang dapat berfungsi seperti jangka dengan salah satu ujung benang sebagai pusat lingkaran. Selanjutnya, peserta didik diminta mengikatkan benang pada pensil/bolpoin, menahan ujung benang dengan jari sebagai titik pusat, lalu menarik benang hingga tegang dan menggerakkan pensil sehingga terbentuk lingkaran.

Saat kegiatan berlangsung, guru mendampingi dan mengajukan pertanyaan pemantik seperti “*Mengapa bentuk yang terbentuk selalu lingkaran?*” atau “*Apa hubungan panjang benang dengan jari-jari lingkaran?*”. Arahkan peserta didik untuk menyimpulkan bahwa lingkaran adalah himpunan titik-titik yang berjarak sama dari suatu titik pusat.

Contoh jawaban yang akan diberikan oleh peserta didik:

Bentuknya selalu lingkaran karena jarak dari pusat ke pensil selalu sama, yaitu sepanjang benang. Jarak itu disebut jari-jari lingkaran.

Setelah mendengar jawaban, guru dapat memberikan respons agar peserta didik merasa diapresiasi, kemudian menegaskan konsep inti dari definisi lingkaran.

2. Persamaan Lingkaran

Materi diawali penjelasan proses penentuan persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ dan jari-jari r . Setelah peserta didik mempelajari Contoh Soal 1.1, guru dapat meminta mereka untuk menyelesaikan soal pada Ayo Mencoba 1.1.



Ayo Mencoba 1.1

1. Diketahui lingkaran memiliki pusat O dan diameter $d = 4\sqrt{3}$.

Karena $d = 2r$, maka $r = \frac{d}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ atau $r^2 = 12$.

Dengan menyubstitusikan $r^2 = 12$ pada $x^2 + y^2 = r^2$, diperoleh persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 12$.

2. Diketahui pusat lingkaran berada di titik $O(0, 0)$. Lingkaran melalui titik $T(6, -8)$. Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, diperoleh

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= 6^2 + (-8)^2 \\ &= 100. \end{aligned}$$

Jadi, persamaan lingkaran tersebut adalah $x^2 + y^2 = 100$.

Materi dilanjutkan dengan penjelasan proses penentuan persamaan lingkaran dengan pusat $P(a, b)$ dan jari-jari r . Setelah peserta didik mempelajari Contoh Soal 1.2 dan 1.3, guru dapat meminta mereka untuk menyelesaikan soal pada Ayo Mencoba 1.2.



Ayo Mencoba 1.2

1. Diketahui titik pusat lingkaran $P(2, -4)$, sehingga

$$a = 2 \text{ dan } b = -4.$$

Jari-jari lingkaran sepanjang $4\sqrt{3}$. Dengan menyubstitusi nilai a, b , dan r ke persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, diperoleh bahwa persamaan lingkaran tersebut adalah

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = (4\sqrt{3})^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 48.$$

2. Diketahui lingkaran L melalui titik $M(-5, 6)$ dan $N(3, 2)$. Karena MN adalah diameter lingkaran, pusat lingkaran tersebut $[P(a, b)]$ berada di tengah-tengah diameter MN dengan

$$a = \left(\frac{x_M + x_N}{2} \right) = \left(\frac{(-5) + 3}{2} \right) = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$b = \left(\frac{y_M + y_N}{2} \right) = \left(\frac{6 + 2}{2} \right) = \frac{8}{2} = 4,$$

diperoleh titik pusat lingkaran $P(-1, 4)$ sehingga jari-jari lingkaran L adalah $|NP|$ atau $|MP|$.

$$\begin{aligned} r &= |NP| = \sqrt{(x_a - x_N)^2 + (y_a - y_N)^2} \\ &= \sqrt{((-1) - 3)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Dengan menyubstitusi nilai a, b , dan r ke persamaan lingkaran $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$, diperoleh $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$.

Materi selanjutnya adalah bentuk umum persamaan lingkaran yang diawali kegiatan Ayo Mengomunikasikan.



Ayo Mengomunikasikan

Guru mengarahkan peserta didik untuk menjabarkan persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ menjadi bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Peserta didik diminta menuliskan langkah-langkah aljabar secara runtut, kemudian menyampaikannya di depan kelas atau dalam kelompok kecil. Tujuan dari kegiatan ini adalah melatih peserta didik untuk mengomunikasikan ide matematis secara lisan maupun tulisan sehingga mereka terbiasa mengungkapkan cara berpikirnya dengan jelas. Apabila peserta didik mengalami kesulitan, guru dapat memberikan contoh alternatif penyelesaian seperti

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Dari hasil ini, guru dapat memandu peserta didik untuk mencermati keterkaitan koefisien dan konstanta dengan pusat dan jari-jari lingkaran, yaitu

$$A = -2a, B = -2b, \text{ dan } C = a^2 + b^2 - r^2.$$

Setelah peserta didik menyampaikan hasil dari kegiatan Ayo Mengomunikasikan, guru memfasilitasi dengan kegiatan Ayo Berdiskusi.



Ayo Berdiskusi

Peserta didik diminta untuk berdiskusi dalam kelompok untuk menganalisis hubungan dari persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan pusat lingkaran $P(a, b)$ dan jari-jari r . Guru dapat memberikan arahan dengan mengajukan beberapa pertanyaan pemantik berikut ini.

- Bagaimana hubungan koefisien A dan B dengan koordinat pusat lingkaran?
- Bagaimana menentukan jari-jari lingkaran dari konstanta C ?
- Mengapa titik pusat dapat dinyatakan dengan $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$?

Melalui diskusi, peserta didik diharapkan dapat menyimpulkan bahwa bentuk umum persamaan lingkaran dapat diturunkan dari bentuk baku persamaan lingkaran dengan hubungan $A = -2a$, $B = -2b$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$. Kegiatan diskusi ini juga menumbuhkan kerja sama, sikap saling menghargai pendapat, dan pemahaman yang lebih mendalam tentang konsep persamaan lingkaran.

Setelah peserta didik mencermati Contoh Soal 1.4, guru meminta mereka untuk mengerjakan soal pada Ayo Mencoba 1.3.



Ayo Mencoba 1.3

Diketahui lingkaran tersebut memiliki jari-jari $r = 4\sqrt{3}$ dan berpusat di titik $P(2, -4)$, berarti

$$a = 2 \text{ dan } b = -4.$$

Dengan menyubstitusi nilai a , b , dan r ke persamaan lingkaran $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$, diperoleh bentuk baku persamaan lingkaran berikut:

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 48.$$

Dengan menjabarkan persamaan tersebut, diperoleh

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 48$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 28 = 0.$$

Jadi, persamaan umum lingkaran tersebut adalah $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 28 = 0$.

Guru dapat meminta peserta didik untuk mempelajari Contoh Soal 1.5 dan 1.6, kemudian mengerjakan soal pada Ayo Mencoba 1.4.



Ayo Mencoba 1.4

1. Dari persamaan $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$, diperoleh

$$A = -8, B = -2, \text{ dan } C = -8.$$

Misalkan pusat lingkaran L adalah $P(a, b)$, maka

$$a = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(-8) = 4,$$

$$b = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}(-2) = 1.$$

sehingga pusat lingkaran pada titik $P(4, 1)$.

Misalkan jari-jari lingkaran L adalah r , nilai r dapat ditentukan menggunakan rumus berikut:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 - (-8)} \\ &= \sqrt{16 + 1 + 8} = 5. \end{aligned}$$

Jadi, lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ berpusat di titik $P(4, 1)$ dan berjari-jari $r = 5$.

2. Persamaan $L \equiv 2x^2 + 2y^2 + 20x - 16y + 16 = 0$ merupakan persamaan lingkaran karena dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, yaitu $L \equiv x^2 + y^2 + 10x - 8y + 8 = 0$.

Dari persamaan di atas, diperoleh

$$A = 10, B = -8, \text{ dan } C = 8.$$

Dengan menggunakan cara seperti pada nomor 1, diperoleh lingkaran L berpusat di titik $P(-5, 4)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{33}$.

Setelah kegiatan pembelajaran pada materi Lingkaran ini berakhir, guru dapat menggunakan kelompok yang dibentuk pada kegiatan Ayo Berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif.



Ayo Berpikir Kreatif

Pada kegiatan ini, peserta didik diharapkan dapat berpikir kreatif untuk menunjukkan lima sifat persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ yang tersaji pada Buku Siswa. Apabila peserta didik kesulitan untuk menunjukkan sifat-sifat tersebut, guru dapat menggunakan alternatif pembuktian berikut.

1. Jika $A = 0$, maka pusat lingkaran berada pada sumbu- y .

Alternatif pembuktian:

Karena $A = 0$, maka $x^2 + y^2 + By + C = 0$.

Pada bagian sebelumnya telah diperoleh bahwa $A = -2a$. Karena $A = 0$, maka $a = 0$. Selain itu, $B = -2b$ dan $C = a^2 + b^2 - r^2$, sehingga

$$x^2 + y^2 + (-2b)y + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa pusat lingkaran berada pada titik $(0, b)$ sehingga persamaan $x^2 + y^2 + By + C = 0$ mempunyai pusat lingkaran berada pada sumbu- y karena $x = 0$.

2. Jika $B = 0$, maka pusat lingkaran terletak pada sumbu- x .

Alternatif pembuktian:

Karena $B = 0$, maka $x^2 + y^2 + Ax + C = 0$.

Pada bagian sebelumnya telah diperoleh bahwa $B = -2b$. Karena $B = 0$, maka $b = 0$. Selain itu, $A = -2a$ dan $C = a^2 + b^2 - r^2$, sehingga

$$x^2 + y^2 + (-2a)x + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = r^2$$

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa pusat berada pada titik $(a, 0)$ sehingga persamaan $x^2 + y^2 + Ax + C = 0$ mempunyai pusat lingkaran berada pada sumbu- x karena $y = 0$.

Untuk sifat nomor 3, 4, dan 5, guru dapat menggunakan langkah-langkah yang serupa dengan alternatif pembuktian di atas.

Subbab B: Elips

Indikator Tujuan Pembelajaran

- menggunakan unsur-unsur elips untuk menentukan persamaan elips.

Pada saat mempelajari materi elips, guru dapat mengawali dengan memberikan pertanyaan definisi elips, seperti “*Apa yang kalian ketahui tentang elips?*” atau “*Coba kalian jelaskan tentang elips dengan bahasa kalian sendiri!*”.

1. Persamaan Elips

Pada sub-subbab “Persamaan Elips”, guru dapat menggunakan contoh menentukan persamaan elips horizontal dengan pusat $O(0, 0)$. Untuk menjelaskan bahwa persamaan elips dengan unsur-unsur tersebut adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ atau } x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

guru dapat menggunakan langkah-langkah yang terdapat pada Buku Siswa. Dari persamaan elips ini, guru dapat menyampaikan unsur-unsur elips lainnya, seperti

- eksentrisitas (e) adalah suatu ukuran untuk menentukan seberapa melengkungnya sebuah elips. Eksentrisitas dapat ditentukan menggunakan rumus $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;

- persamaan garis direktriksnya adalah

$$g \equiv x = \frac{a}{e} \text{ atau } g \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

dan

$$g' \equiv x = -\frac{a}{e} \text{ atau } g' \equiv x = -\frac{a^2}{c};$$

► panjang *latus rectum* adalah $L = \frac{2b^2}{a}$.



Ayo Berdiskusi

Pada aktivitas ini, guru membagi peserta didik menjadi tiga kelompok. Setiap kelompok diminta untuk menunjukkan persamaan elips horizontal dengan titik pusat $P(m, n)$. Tugas lainnya adalah menentukan unsur-unsur elips tersebut.

Apabila peserta didik mengalami kesulitan untuk menunjukkan persamaan elips sesuai dengan tugas kelompok, guru dapat memberikan bimbingan dengan menjelaskan proses menunjukkan persamaan elips.

Guru dapat memberikan pertanyaan kepada peserta didik, seperti “Jika pusat elips berada di titik (m, n) , kira-kira fokus elips berada di mana?”. Pertanyaan-pertanyaan pemantik diajukan oleh guru untuk mengingatkan peserta didik pada unsur elips horizontal dengan pusat $O(0, 0)$.

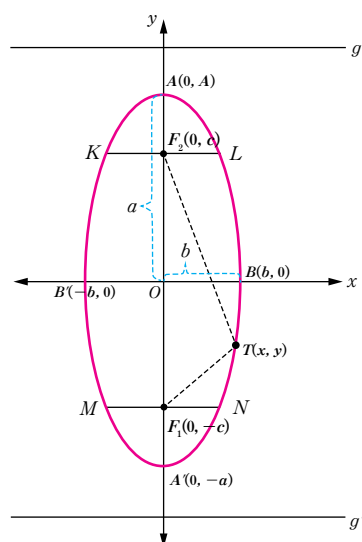
Materi selanjutnya berkaitan dengan elips vertikal. Pada Buku Siswa disajikan gambar elips vertikal dengan titik pusat $O(0, 0)$ beserta unsur-unsurnya.



Ayo Mengomunikasikan

Guru mengarahkan peserta didik untuk berdiskusi kelompok dalam menurunkan persamaan elips vertikal dengan titik pusat $O(0, 0)$. Guru menekankan bahwa prosesnya serupa dengan penurunan persamaan elips horizontal, hanya letak sumbunya yang berbeda.

Peserta didik diminta untuk mempresentasikan hasil diskusi, sementara guru memberikan penguatan dengan menunjukkan langkah kunci



Gambar 1.2 Elips Vertikal dengan Titik Pusat

bahwa jumlah jarak sebarang titik pada elips terhadap kedua fokus selalu sama dengan $2a$. Selanjutnya, guru dapat memandu peserta didik melihat bagaimana penguadratan dan penyederhanaan aljabar menghasilkan persamaan elips $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Guru juga memberi umpan balik atas presentasi peserta didik untuk meluruskan kesalahan konsep sekaligus mengapresiasi argumentasi yang benar.

Adapun langkah-langkah penyelesaiannya sebagai berikut.

Karena titik $T(x, y)$ terletak pada elips, diperoleh

$$\begin{aligned} F_1T + F_2T &= 2a \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} &= 2a \\ \sqrt{x^2 + (y-c)^2} &= 2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2}. \end{aligned}$$

Dengan menguadratkan persamaan di atas, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} x^2 + (y-c)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + (y+c)^2 \\ x^2 + y^2 - 2cy + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 + 2cy + c^2 \\ -4cy - 4a^2 &= -4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} \\ cy + a^2 &= a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}. \end{aligned}$$

Kuadratkan persamaan yang diperoleh sehingga

$$\begin{aligned} c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 &= a^2(x^2 + (y+c)^2) \\ c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 &= a^2x^2 + 2a^2cy + a^2c^2 + a^2y^2 \\ a^4 - a^2c^2 &= a^2x^2 + a^2y^2 - c^2y^2 \\ a^2(a^2 - c^2) &= a^2x^2 + (a^2 - c^2)y^2. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa B adalah titik pada elips. Sesuai dengan definisi elips, diperoleh $F_1B + F_2B = 2a$. Segitiga $\triangle F_1BF_2$ merupakan segitiga sama kaki sehingga $F_1B = F_2B = a$. Dengan menerapkan Teorema Pythagoras pada segitiga $\triangle F_1OB$ atau $\triangle F_2OB$, diperoleh $a^2 = b^2 + c^2$ atau $a^2 - c^2 = b^2$ sehingga

$$\begin{aligned} a^2(a^2 - c^2) &= a^2x^2 + (a^2 - c^2)y^2 \\ a^2b^2 &= a^2x^2 + b^2y^2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan $a^2b^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ dibagi a^2b^2 sehingga menjadi

$$\frac{a^2x^2}{a^2b^2} + \frac{b^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \text{ atau } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Jadi, persamaan elips vertikal dengan titik pusat $O(0, 0)$ adalah $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.



Ayo Berdiskusi

Pada kegiatan ini, guru dapat memandu peserta didik untuk mengeksplorasi persamaan elips vertikal yang pusatnya tidak berada di titik asal, melainkan di titik $P(m, n)$. Mulailah dengan memberikan pertanyaan pemantik seperti “Jika pusat elips berada di (m, n) , kira-kira fokus elips berada di mana?”

Pertanyaan tersebut bertujuan agar peserta didik mengingat kembali letak fokus elips yang bertitik pusat $O(0, 0)$, kemudian menggeneralisasikan ke pusat baru. Setelah diskusi berlangsung, guru mengarahkan peserta didik untuk menuliskan bentuk persamaan elips dengan titik pusat $P(m, n)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu- y , lalu menyimpulkan bahwa persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

atau setara dengan

$$b^2(y-n)^2 + a^2(x-m)^2 = a^2b^2.$$

Guru menutup diskusi dengan menegaskan kembali hubungan antara pergeseran pusat dan perubahan bentuk persamaan elips.



Ayo Bereksplorasi 1.2

Guru membimbing peserta didik untuk melengkapi Tabel 1.1 pada Buku Siswa dengan cara mendiskusikan unsur-unsur elips pada berbagai posisi pusat dan sumbu mayor. Guru dapat memberikan pengingat seperlunya tentang rumus atau contoh sederhana, namun tetap menyediakan ruang eksplorasi bagi peserta didik. Setelah diskusi, arahkan setiap kelompok untuk menyampaikan hasilnya, lalu tegaskan kembali ciri khas elips horizontal dan vertikal, termasuk hubungan a , b , dan c .

Unsur-unsur pembentukan elips horizontal tersedia pada Buku Siswa. Unsur-unsur pembentukan elips dengan pusat $O(0,0)$ dan sumbu mayor terletak pada sumbu- y (elips vertikal) adalah sebagai berikut:

- ▶ titik fokus elips adalah $(0, \pm c)$ dengan $c^2 = a^2 - b^2$;
- ▶ pusat elips terletak pada titik pusat koordinat, yaitu $O(0,0)$;
- ▶ titik puncak elips adalah titik $(0, \pm a)$ dan $(\pm b, 0)$;
- ▶ panjang sumbu mayor adalah $2a$, sedangkan panjang sumbu minor adalah $2b$;
- ▶ nilai eksentrisitas adalah $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;
- ▶ persamaan garis direktriksnya adalah

$$g \equiv y = \frac{a}{e} \text{ atau } g' \equiv y = \frac{a^2}{c}$$

dan

$$g' \equiv y = -\frac{a}{e} \text{ atau } g' \equiv y = -\frac{a^2}{c};$$

- ▶ panjang *latus rectum* adalah $L = \frac{2b^2}{a}$.

Adapun unsur-unsur pembentukan elips dengan pusat (m, n) dan sumbu mayor sejajar sumbu- y , adalah sebagai berikut:

- ▶ titik fokus elips adalah $(m, n \pm c)$ dengan $c^2 = a^2 - b^2$;
- ▶ pusat elips terletak pada titik $P(m, n)$;
- ▶ titik puncak elips adalah titik $(m, n \pm a)$ dan $(m \pm b, n)$;
- ▶ panjang sumbu mayor adalah $2a$, sedangkan panjang sumbu minor adalah $2b$;
- ▶ nilai eksentrisitas adalah $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;
- ▶ persamaan garis direktriksnya adalah

$$g \equiv y = n + \frac{a}{e} \text{ atau } g \equiv y = n + \frac{a^2}{c}$$

dan

$$g' \equiv y = n - \frac{a}{e} \text{ atau } g' \equiv y = n - \frac{a^2}{c};$$

- ▶ panjang *latus rectum* adalah $L = \frac{2b^2}{a}$.



Ayo Mengomunikasikan

Setelah peserta didik berdiskusi dan melengkapi Tabel 1.1 pada Buku Siswa, guru meminta setiap kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya di depan kelas. Guru dapat menunjuk beberapa kelompok secara bergantian

agar semua indikator dalam tabel terbahas. Saat presentasi berlangsung, guru berperan sebagai fasilitator dengan memberi penguatan pada jawaban yang tepat serta meluruskan jika ditemukan adanya kekeliruan. Guru juga dapat mendorong peserta didik untuk menanggapi dan menambahkan sehingga terjadi komunikasi dua arah antarkelompok.



Tahukah Kamu

Guru dapat mengaitkan konsep elips dengan fenomena nyata, yaitu orbit planet dalam tata surya sesuai dengan Hukum Kepler. Ajak peserta didik mengamati contoh orbit Bumi dan arahkan mereka untuk menghubungkan jarak maksimum dan minimum Bumi dari Matahari dengan konsep sumbu mayor, sumbu minor, dan eksentrisitas elips. Jika peserta didik mengalami kesulitan, guru dapat menunjukkan langkah perhitungan sederhana hingga diperoleh estimasi nilai eksentrisitas serta panjang sumbu mayor dan sumbu minor orbit Bumi.



Ayo Mencoba 1.5

1. Dari persamaan elips $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, diperoleh $m = 4$ dan $n = 3$,

Karena $a > b$, pilih nilai a^2 yang lebih besar pada bagian penyebut.

$$a^2 = \frac{25}{4} \text{ sehingga } a = \frac{5}{2},$$

$$b^2 = 4 \text{ sehingga } b = 2,$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25 - 16}{4} = \frac{9}{4} \text{ sehingga } c = \frac{3}{2}.$$

Karena persamaan elips selaras dengan rumus $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, elips tersebut termasuk elips horizontal.

- a. Koordinat titik pusat adalah titik $(4, 3)$.

Koordinat titik puncak adalah titik-titik $(4, 1)$, $(4, 5)$, $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ dan $\left(\frac{13}{2}, 3\right)$.

Koordinat titik fokus adalah titik $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ dan titik $\left(\frac{11}{2}, 3\right)$.

- b. Untuk menentukan persamaan garis sumbu mayor, perhatikan bahwa garis sumbu mayor melewati dua titik puncak elips yaitu puncak elips berada pada titik $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ dan titik $\left(\frac{13}{2}, 3\right)$ sehingga dengan menggunakan persamaan $\frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{x - x_a}{x_b - x_a}$, diperoleh

$$\frac{y - 3}{3 - 3} = \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{13}{2} - \frac{3}{2}}$$

$$5y - 15 = 0$$

$$y = 3.$$

Panjang sumbu mayor dapat dihitung menggunakan rumus $\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$ sehingga panjang sumbu mayor adalah

$$\sqrt{\left(\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Untuk menentukan persamaan garis sumbu minor, perhatikan bahwa garis sumbu minor melewati dua titik puncak elips yaitu titik $(4, 1)$ dan titik $(4, 5)$ sehingga

$$\frac{y - 1}{5 - 1} = \frac{x - 4}{4 - 4}$$

$$0 = 4x - 16$$

$$x = 4.$$

Panjang sumbu minor adalah $\sqrt{(4 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{16} = 4.$

- c. Nilai eksentrisitasnya adalah $e = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$, sedangkan persamaan direktriksnya adalah $g \equiv x = 4 + \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{49}{6}$ dan $g' \equiv x = 4 - \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{5}} = -\frac{1}{6}.$

- d. Panjang *latus rectum* = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(2^2)}{\frac{5}{2}} = \frac{16}{5}.$

2. Diketahui $e = \frac{4}{5}$. Nilai eksentrisitas dapat diperoleh dari $e = \frac{c}{a}$ sehingga $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}.$

Jarak kedua fokus sebesar 16 sehingga $2c = 16$ atau $c = 8.$

Dengan menyubstitusi nilai $c = 8$ ke persamaan $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, diperoleh

$$\frac{8}{a} = \frac{4}{5} \text{ maka } a = \frac{40}{4} = 10.$$

Dengan menyubstitusi nilai a dan c pada persamaan $b^2 = a^2 - c^2$ sehingga diperoleh

$$b^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36, \text{ maka } b = 6.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

3. Panjang sumbu mayor sebesar 20 sehingga $2a = 20$ atau $a = 10$.

Dengan menggunakan nilai eksentrisitas sebesar $\frac{3}{5}$ dan nilai a , diperoleh

$$e = \frac{c}{a} \text{ atau } \frac{3}{5} = \frac{c}{10} \text{ sehingga } c = \frac{30}{5} = 6.$$

Nilai $a = 10$ dan $c = 6$ disubstitusi pada persamaan $b^2 = a^2 - c^2$ sehingga

$$b^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \text{ atau } b = 8.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

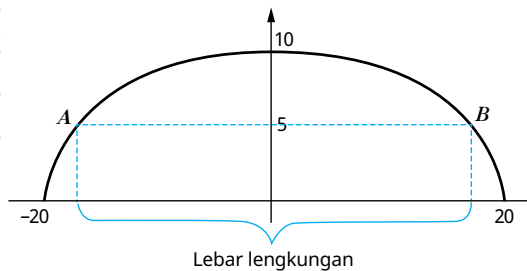
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

4. Diketahui lebar alas 40 meter sehingga panjang sumbu mayor adalah 40 meter. Karena tinggi lengkungan 10 meter, panjang sumbu minor adalah 20 meter. Berikut ini sketsa lengkungan berdasarkan unsur-unsur yang diketahui.

Dengan menganggap titik pusat elips berada pada titik pusat koordinat, yaitu $P(0,0)$ dengan $a = 20$ dan $b = 10$, persamaan elips tersebut adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{100} = 1.$$



Gambar 1.3 Sketsa Lengkungan

Untuk menentukan lebar lengkungan pada ketinggian 5 meter, dapat dianggap bahwa $y = 5$. Hasil substitusi nilai $y = 5$ ke persamaan elips yang diperoleh adalah

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{400} + \frac{5^2}{100} &= 1 \\ \frac{x^2}{400} &= \frac{3}{4} \\ x^2 &= \frac{1.200}{4} = 300\end{aligned}$$

maka $x = \sqrt{300} = \pm 17,3$ meter.

Karena lebar lengkungan setengah elips tersebut tidak mungkin bernilai negatif, nilai x diambil yang positif, yaitu 17,3 meter. Jadi, lebar lengkungan dari setengah elips tersebut adalah

$$2 \times 17,3 = 34,6 \text{ meter.}$$



Ayo Berpikir Kreatif

Guru dapat mendorong peserta didik untuk meninjau kembali soal nomor 4 pada kegiatan Ayo Mencoba 1.5 dan mencari strategi penyelesaian lain. Tekankan bahwa dalam matematika, sebuah masalah sering kali memiliki lebih dari satu cara penyelesaian. Guru juga dapat memfasilitasi diskusi kelas agar peserta didik dapat membandingkan pendekatan yang berbeda, menilai kelebihan dan kekurangan, serta melatih keterampilan berpikir kreatif dan fleksibel.

Subbab C: Kedudukan Titik dan Garis terhadap Lingkaran

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ menentukan kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran (di dalam, pada, atau di luar);
- ▶ menentukan kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran (menyinggung, memotong, atau tidak menyinggung dan tidak memotong).

1. Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

Guru dapat menyampaikan bahwa kedudukan titik terhadap lingkaran merupakan materi prasyarat untuk menguasai persamaan garis singgung lingkaran. Selanjutnya, guru dapat menyampaikan tiga kemungkinan

kedudukan titik terhadap lingkaran dengan bantuan gambar pada Buku Siswa, yaitu (a) kedudukan titik $A(x, y)$ di dalam lingkaran, (b) kedudukan titik $A(x, y)$ pada lingkaran, dan (c) kedudukan titik $A(x, y)$ di luar lingkaran.

Bersama peserta didik, guru dapat menyimpulkan bahwa (1) syarat titik $A(x, y)$ berada di dalam lingkaran jika kuasa titik $A(x, y)$ bernilai negatif atau $K_{A(x,y)} < 0$, (2) syarat titik $A(x, y)$ berada pada lingkaran jika kuasa titik bernilai nol atau $K_{A(x,y)} = 0$, dan (3) syarat titik $A(x, y)$ berada di luar lingkaran jika kuasa titik bernilai positif atau $K_{A(x,y)} > 0$.

Selanjutnya, guru dapat meminta peserta didik untuk mencermati Contoh-Contoh Soal pada Buku Siswa, kemudian mengerjakan soal pada Ayo Mencoba secara runtut.



Ayo Mencoba 1.6

Nilai kuasa titik $A(8, 3)$, yaitu

$$\begin{aligned} K_{A(8,3)} &= 8^2 + 3^2 - 8(8) - 6(3) + 8 \\ &= 64 + 9 - 64 - 18 + 8 = -1. \end{aligned}$$

Nilai kuasa titik $K_{A(8,3)}$ adalah -1 (negatif) sehingga titik $A(8, 3)$ berada di dalam lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$.



Ayo Mencoba 1.7

- Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 18$ dapat dinyatakan dengan $x^2 + y^2 - 18 = 0$ sehingga kuasa titik $A(3, -3)$ adalah

$$K_{A(3,-3)} = 3^2 + (-3)^2 - 18 = 9 + 9 - 18 = 0.$$

Jadi, titik $A(3, -3)$ berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$ karena nilai kuasa titik $K_{A(3,-3)} = 0$.

- Nilai kuasa titik $A(7, 5)$ adalah

$$\begin{aligned} K_{A(7,5)} &= 7^2 + 5^2 - 8(7) - 2(5) - 8 \\ &= 49 + 25 - 56 - 10 - 8 = 0. \end{aligned}$$

Jadi, titik $A(7, 5)$ berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ karena nilai kuasa titik $K_{A(7,5)} = 0$.



Ayo Mencoba 1.8

Nilai kuasa titik $A(8, 3)$ adalah

$$\begin{aligned}
 K_{A(8,3)} &= 8^2 + 3^2 - 8(8) - 2(3) + 8 \\
 &= 64 + 9 - 64 - 6 + 8 = 11.
 \end{aligned}$$

Jadi, titik $A(8, 3)$ berada di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$ karena nilai kuasa titik $K_{A(8,3)} > 0$.

2. Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Guru dapat menyampaikan bahwa selain kedudukan titik terhadap lingkaran, materi kedudukan garis terhadap lingkaran juga merupakan materi prasyarat untuk menguasai persamaan garis singgung lingkaran. Oleh karena itu, peserta didik diharapkan menguasai materi kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran.

Guru dapat menggunakan bantuan gambar pada Buku Siswa untuk menjelaskan kedudukan garis g terhadap lingkaran, yaitu (a) garis g memotong lingkaran, (b) garis g menyinggung lingkaran, dan (c) garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran. Bersama peserta didik, guru dapat menyimpulkan bahwa (1) persyaratan garis g memotong lingkaran adalah $D > 0$, (2) persyaratan garis g menyinggung lingkaran adalah $D = 0$, dan (3) persyaratan garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran adalah $D < 0$.



Ayo Berpikir Kritis

Guru dapat menyampaikan kepada peserta didik tentang syarat kedudukan garis g terhadap lingkaran L . Guru dapat memberikan pertanyaan pemantik seperti berikut ini.

- Mengapa syarat garis g memotong lingkaran L adalah nilai diskriminan lebih dari 0?
- Mengapa syarat garis g menyinggung lingkaran L adalah nilai diskriminan sama dengan 0?

- Mengapa syarat garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran L adalah nilai diskriminan kurang dari 0?

Guru dapat menggunakan gambar pada Buku Siswa untuk membantu memberikan penjelasan yang berkaitan dengan ketiga pertanyaan pemantik tersebut. Selanjutnya, guru dapat menggunakan alternatif penyelesaian berikut.

1. Jika nilai diskriminan pada fungsi kuadrat $(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai positif ($D > 0$), maka garis g memotong lingkaran L .

Guru dapat memberikan penjelasan secara logis bahwa apabila suatu diskriminan bernilai positif ($D > 0$), maka persamaan tersebut memiliki dua akar persamaan (dalam hal ini adalah nilai dari absis x). Dengan menyubstitusikan kedua absis ke persamaan lingkaran L , diperoleh dua titik yang terletak pada lingkaran. Kedua titik inilah yang disebut *titik potong* pada lingkaran.

2. Jika nilai diskriminan pada fungsi kuadrat $(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai nol ($D = 0$), maka garis g bersinggungan dengan lingkaran L .

Guru dapat memberikan penjelasan secara logis bahwa apabila suatu diskriminan bernilai nol ($D = 0$), maka persamaan tersebut memiliki satu akar persamaan (dalam hal ini adalah nilai dari absis x). Dengan menyubstitusikan nilai absis tersebut ke persamaan lingkaran L , diperoleh satu titik yang terletak pada lingkaran. Titik inilah yang disebut *titik singgung* pada lingkaran.

3. Jika nilai diskriminan pada fungsi kuadrat $(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai negatif ($D < 0$), maka garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran L .

Guru dapat memberikan penjelasan secara logis bahwa apabila suatu diskriminan bernilai negatif ($D < 0$), maka persamaan kuadrat tersebut memiliki akar imajiner. Akibatnya, persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki akar real. Dengan kata lain, persamaan kuadrat tersebut tidak memotong sumbu- x (dalam kasus ini, tidak memiliki nilai x). Karena persamaan kuadrat tidak memiliki nilai x , maka tidak ada titik potong antara garis g dan lingkaran L .



Ayo Berpikir Kreatif

Pada kegiatan berpikir kreatif, guru dapat membagi peserta didik menjadi dua kelompok. *Kelompok pertama* bertugas mengkreasikan kedudukan garis terhadap lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Adapun *kelompok kedua* bertugas mengkreasikan kedudukan garis terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$.

Pembagian kelompok ini bertujuan mendorong peserta didik berpikir secara mandiri maupun kolaboratif dalam menemukan konsep yang berkaitan dengan kedudukan garis terhadap lingkaran. Dengan memberikan ruang bagi peserta didik untuk mengeksplorasi dan mengkreasikan sendiri bentuk serta posisi garis, pembelajaran menjadi lebih aktif dan berpusat pada peserta didik. Oleh karena itu, melalui aktivitas Ayo Berpikir Kreatif, peserta didik diharapkan mampu memahami materi persamaan lingkaran dengan pembelajaran yang *berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan*.

Selanjutnya, guru dapat meminta peserta didik untuk mempelajari Contoh Soal 1.18 dan 1.19 pada Buku Siswa, kemudian menyelesaikan soal-soal pada Ayo Mencoba 1.9.



Ayo Mencoba 1.9

1. Persamaan garis $h: x - y - 1 = 0$ ekuivalen dengan $y = x - 1$. Untuk menyelidiki apakah garis h dan lingkaran L berpotongan, perlu ditunjukkan bahwa persamaan kuadrat yang diperoleh dari substitusi persamaan garis h ke persamaan lingkaran L , memiliki diskriminan bernilai positif.

$$x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$$

$$x^2 + (x - 1)^2 + 4x - (x - 1) - 2 = 0$$

$$2x^2 + x = 0.$$

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$a = 2, b = 1, \text{ dan } c = 0$$

sehingga

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= 1^2 - 4(2)(0) = 1.$$

Karena nilai diskriminan $D > 0$, berarti garis $h: x - y - 1 = 0$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$.

Faktorkan persamaan kuadrat $2x^2 + x = 0$ sehingga diperoleh

$$x(2x + 1) = 0,$$

maka

$$x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Substitusikan nilai x pada persamaan garis h .

Untuk $x_1 = 0$, diperoleh

$$x - y - 1 = 0$$

$$y = -1.$$

Untuk $x_2 = -\frac{1}{2}$, diperoleh

$$x - y - 1 = 0$$

$$-\frac{1}{2} - y - 1 = 0$$

$$y = -\frac{3}{2}.$$

Jadi, titik potong garis h dan lingkaran L adalah $(0, -1)$ dan $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

2. Untuk menyelidiki apakah garis $y = kx + 1$ dan lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ tidak berpotongan, perlu ditunjukkan bahwa persamaan kuadrat yang diperoleh dari substitusi persamaan garis y ke persamaan lingkaran L memiliki diskriminan bernilai negatif.

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

$$(x - 1)^2 + ((kx + 1) + 1)^2 = 4$$

$$(x - 1)^2 + (kx + 2)^2 = 4$$

$$x^2 - 2x + 1 + k^2x^2 + 4kx + 4 = 4$$

$$k^2x^2 + x^2 + 4kx - 2x + 1 = 0$$

$$(k^2 + 1)x^2 + (4k - 2)x + 1 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$a = (k^2 + 1), \quad b = (4k - 2), \quad \text{dan } c = 1,$$

sehingga

$$D = b^2 - 4ac = (4k - 2)^2 - 4(k^2 + 1)(1)$$

$$= 16k^2 - 16k + 4 - 4k^2 - 4$$

$$= 12k^2 - 16k.$$

Karena garis $y = kx + 1$ tidak memotong lingkaran L , maka $D < 0$, sehingga

$$12k^2 - 16k < 0$$

$$k(12k - 16) < 0.$$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{0 < k < \frac{4}{3}\right\}$.

Jadi, syarat k agar garis y tidak memotong lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ adalah $0 < k < \frac{4}{3}$.

3. Garis $y = -x + p$ menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ apabila persamaan kuadrat yang diperoleh dari substitusi persamaan garis y ke persamaan lingkaran L memiliki diskriminan bernilai 0.

$$x^2 + (-x + p)^2 - 2x - 4(-x + p) + 3 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 2px + p^2 - 2x + 4x - 4p + 3 = 0$$

$$2x^2 + (2 - 2p)x - 4p + p^2 + 3 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$a = 2, b = 2 - 2p, \text{ dan } c = -4p + p^2 + 3,$$

sehingga

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (2 - 2p)^2 - 4(2)(-4p + p^2 + 3)$$

$$= -4p^2 + 24p - 20.$$

Karena telah ditentukan garis $y = -x + p$ menyinggung lingkaran L , maka $D = 0$, sehingga

$$-4p^2 + 24p - 20 = 0$$

$$p^2 - 6p + 5 = 0$$

$$(p - 5)(p - 1) = 0,$$

diperoleh $p = 5$ atau $p = 1$.

Jadi, nilai p agar garis y menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ adalah $p = 1$ atau $p = 5$.

Indikator Tujuan Pembelajaran

- memecahkan permasalahan matematis yang berkaitan dengan garis singgung lingkaran.

1. Persamaan Garis Singgung Melalui Titik pada Lingkaran

Guru menjelaskan proses untuk menentukan persamaan garis singgung yang titik singgungnya pada lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ telah diketahui. Selanjutnya, guru dapat membimbing peserta didik pada kegiatan Ayo Berdiskusi. Melalui aktivitas tersebut, peserta didik diharapkan mampu memahami materi persamaan garis singgung lingkaran.



Ayo Berdiskusi

Guru dapat membagi peserta didik menjadi dua kelompok. *Kelompok pertama* diberikan tugas untuk membuktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran pada titik $T(x_1, y_1)$ dengan bentuk persamaan $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ adalah $xx_1 + yy_1 = r^2$. *Kelompok kedua* diberikan tugas untuk membuktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran pada titik $T(x_1, y_1)$ dengan bentuk persamaan $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah $xx_1 + yy_1 + A\frac{(x + x_1)}{2} + B\frac{(y + y_1)}{2} + C = 0$.

Apabila peserta didik mengalami kesulitan untuk membuktikannya, guru dapat menggunakan alternatif pembuktian berikut.

- Membuktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ di titik $T(x_1, y_1)$ adalah $xx_1 + yy_1 = r^2$.

Alternatif pembuktian:

Misalkan titik $T(x_1, y_1)$ dan titik $U(x_2, y_2)$ terletak pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$, sehingga persamaan garis TU adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ atau } y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1).$$

Karena titik $T(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran L , maka berlaku

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Karena titik $U(x_2, y_2)$ terletak pada lingkaran L , maka berlaku

$$x_2^2 + y_2^2 = r^2.$$

Dengan melakukan eliminasi r^2 pada persamaan $x_2^2 + y_2^2 = r^2$ dan $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= x_2^2 + y_2^2 \\ y_2^2 - y_1^2 &= -(x_2^2 - x_1^2) \\ (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) &= -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}. \end{aligned}$$

Substitusikanlah persamaan $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$ ke persamaan $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$ sehingga diperoleh

$$y - y_1 = -\left(\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}\right)(x - x_1).$$

Apabila titik $U(x_2, y_2)$ bergerak mendekati $T(x_1, y_1)$, sehingga titik $U(x_2, y_2)$ dan titik $T(x_1, y_1)$ berimpit, maka

$$x_1 = x_2 \text{ dan } y_1 = y_2,$$

sehingga persamaan $y - y_1 = -\left(\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}\right)(x - x_1)$ menjadi

$$\begin{aligned} y - y_1 &= -\left(\frac{x_1 + x_1}{y_1 + y_1}\right)(x - x_1) \\ y - y_1 &= -\left(\frac{2x_1}{2y_1}\right)(x - x_1) \\ (y - y_1)y_1 &= -(x_1)(x - x_1) \\ yy_1 + xx_1 &= x_1^2 + y_1^2 \text{ (terbukti).} \end{aligned}$$

- Membuktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ di titik $T(x_1, y_1)$ adalah $xx_1 + yy_1 + A\frac{(x + x_1)}{2} + B\frac{(y + y_1)}{2} + C = 0$.

Alternatif pembuktian:

Dengan menjabarkan persamaan garis singgung lingkaran berbentuk $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) &= r^2 \\ (xx_1 - ax - ax_1 + a^2) + (yy_1 - by - by_1 + b^2) &= r^2 \\ xx_1 + yy_1 - a(x + x_1) - b(y + y_1) + a^2 + b^2 - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Dengan menyubstitusikan $a = -\frac{A}{2}$, $b = -\frac{B}{2}$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$, diperoleh

$$\begin{aligned}xx_1 + y_1y - a(x + x_1) - b(y + y_1) + a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \\xx_1 + yy_1 + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C &= 0 \\xx_1 + yy_1 + A\frac{(x + x_1)}{2} + B\frac{(y + y_1)}{2} + C &= 0 \text{ (terbukti).}\end{aligned}$$



Ayo Mencoba 1.10

1. Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh

$$\begin{aligned}xx_1 + yy_1 &= 10 \\x - 3y - 10 &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 10$ yang melalui titik $Q(1, -3)$ adalah $x - 3y - 10 = 0$.

2. Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh

$$\begin{aligned}xx_1 + yy_1 - 8\frac{(x + x_1)}{2} - 2\frac{(y + y_1)}{2} - 8 &= 0 \\x - 3y - 4(x + 1) - (y - 3) - 8 &= 0 \\x - 3y - 4x - 4 - y + 3 - 8 &= 0 \\-3x - 4y - 9 &= 0 \\3x + 4y + 9 &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ melalui titik $Q(1, -3)$ adalah $3x + 4y + 9 = 0$.

3. Langkah pertama adalah menentukan titik potong garis $y = 3$ terhadap lingkaran L .

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 + (y - 3)^2 &= 9 \\(x + 1)^2 + (3 - 3)^2 &= 9 \\(x + 1) &= \pm 3,\end{aligned}$$

sehingga

$$x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = -4.$$

Untuk $x_1 = 2$, titik potongnya adalah $(2, 3)$ sehingga persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ melalui titik $(2, 3)$ dapat ditentukan menggunakan prinsip pembagian adil.

$$\begin{aligned}(x+1)(x_1+1)+(y-3)(y_1-3) &= 9 \\(x+1)(2+1)+(y-3)(3-3) &= 9 \\3x-6 &= 0 \text{ atau } x=2.\end{aligned}$$

Untuk $x_1 = -4$, titik potongnya adalah $(-4, 3)$ sehingga persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ melalui titik $(-4, 3)$ dapat ditentukan menggunakan prinsip pembagian adil.

$$\begin{aligned}(x+1)(x_1+1)+(y-3)(y_1-3) &= 9 \\(x+1)(-4+1)+(y-3)(3-3) &= 9 \\-3x-12 &= 0 \text{ atau } x=-4.\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ yang memotong garis $y = 3$ adalah $x = 2$ dan $x = -4$.

2. Persamaan Garis Singgung terhadap Lingkaran dengan Kemiringan m Diketahui

Pada sub-subbab ini, guru memberikan pertanyaan formatif tentang definisi kemiringan dan nilai diskriminan. Selanjutnya, guru dapat menjelaskan proses untuk menemukan persamaan garis singgung lingkaran.



Ayo Berdiskusi

Melalui kegiatan Ayo Berdiskusi, peserta didik diharapkan mampu memahami materi persamaan garis singgung lingkaran dengan pembelajaran yang *berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan*. Pada aktivitas ini, guru dapat membagi peserta didik menjadi dua kelompok. *Kelompok pertama* diberikan tugas untuk mencari persamaan garis singgung $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ jika kemiringan m diketahui. Harapannya, kelompok pertama memperoleh persamaan garis singgung $(y-b) = m(x-a) \pm r\sqrt{(m^2+1)}$. *Kelompok kedua* diberikan tugas untuk mencari persamaan garis singgung $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ jika kemiringan m diketahui. Harapannya, kelompok kedua memperoleh persamaan garis singgung $y + \frac{B}{2} = m\left(x + \frac{A}{2}\right) \pm r\sqrt{(m^2+1)}$.

Apabila peserta didik mengalami kesulitan untuk mencari persamaan garis singgung tersebut, guru dapat membantu kelompok dengan menggunakan alternatif pembuktian berikut.

a. Kelompok pertama.

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang akan dicari adalah $y = mx + n$. Gunakanlah prinsip translasi dengan menggeser persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ dengan pusat $P(0, 0)$ menuju pusat $P(a, b)$ sehingga persamaan lingkaran menjadi

$$L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Akibatnya, persamaan garis singgung yang ditranslasi adalah $y = mx \pm r\sqrt{(m^2 + 1)}$. Dengan demikian, persamaan garis singgungnya menjadi

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{(m^2 + 1)}.$$

b. Kelompok kedua.

Substitusikan $a = -\frac{A}{2}$, $b = -\frac{B}{2}$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$ ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \\x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 &= 0 \\(x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Persamaan lingkaran ini memiliki persamaan garis singgung $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{(m^2 + 1)}$. Dengan menyubstitusikan $a = -\frac{A}{2}$ dan $b = -\frac{B}{2}$ ke $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{(m^2 + 1)}$, diperoleh persamaan garis singgung

$$y + \frac{B}{2} = m\left(x + \frac{A}{2}\right) \pm r\sqrt{(m^2 + 1)}.$$



Ayo Mencoba 1.11

Lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12$ memiliki titik pusat di $(2, -3)$ dan jari-jarinya 25. Dengan demikian, persamaan lingkaran tersebut ekuivalen dengan

$$L \equiv (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Pada persamaan garis $g: y - 2x - 3 = 0$, gradien garis g adalah 2. Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang dicari adalah $y = mx + n$. Persamaan garis singgung tersebut tegak lurus dengan garis $g: y - 2x - 3 = 0$ sehingga kemiringan garis singgung lingkaran memenuhi

$$m \cdot m_g = -1$$

$$m \cdot (2) = -1$$

$$m = -\frac{1}{2}.$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, diperoleh nilai kemiringan garis singgung $y = mx + n$ adalah $m = -\frac{1}{2}$.

Untuk menentukan nilai n , dapat menggunakan

$$n = \pm \sqrt{r^2(m^2 + 1)}$$

$$n = \pm \sqrt{25\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)}$$

$$= \pm \sqrt{25\left(\frac{5}{4}\right)} = \pm \sqrt{\frac{125}{4}} = \pm \frac{5}{2}\sqrt{5},$$

sehingga diperoleh

$$n_1 = \frac{5}{2}\sqrt{5} \text{ dan } n_2 = -\frac{5}{2}\sqrt{5}.$$

Selanjutnya, substitusikan nilai $m = -\frac{1}{2}$ dan $n = \frac{5}{2}\sqrt{5}$ ke persamaan garis singgung $y = mx + n$, sehingga diperoleh

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{5}.$$

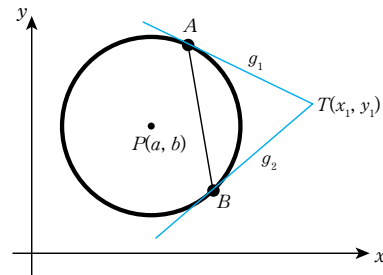
Kemudian, substitusikan nilai $m = -\frac{1}{2}$ dan $n = -\frac{5}{2}\sqrt{5}$ ke persamaan garis singgung $y = mx + n$, sehingga diperoleh

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\sqrt{5}.$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12$ yang tegak lurus terhadap garis $g: y - 2x - 3 = 0$ adalah $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{5}$ dan $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

3. Sebuah Titik di Luar Lingkaran Telah Ditentukan

Guru memberikan pertanyaan formatif tentang garis polar atau garis kuasa. Selanjutnya, guru dapat menjelaskan proses untuk menemukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ jika titik di



Gambar 1.4 Lingkaran, Garis Singgung Lingkaran, dan Titik Singgung

luar garis diketahui. Guru dapat menggunakan Gambar 1.4. Adapun metode alternatifnya sebagai berikut.

- a. Misalkan kedua garis singgung tersebut adalah g_1 dan g_2 . Jika garis g_1 menyinggung lingkaran di titik A dan garis g_2 menyinggung lingkaran di titik B , maka garis yang menghubungkan titik A dan titik B disebut *garis polar* atau *garis kutub*. Untuk menentukan persamaan garis polar atau garis kutub pada lingkaran, guru dapat menggunakan prinsip pembagian adil seperti pada Tabel 1.4. Pembuktian sifat prinsip pembagian adil dapat dilihat pada sub-subbab “Persamaan Garis Singgung Melalui titik pada Lingkaran”.

Tabel 1.4 Persamaan Lingkaran dan Persamaan Garis Polar

Persamaan Lingkaran	Persamaan Garis Polar
$x^2 + y^2 = r^2$	$xx_1 + yy_1 = r^2$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$xx_1 + yy_1 + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$

- b. Substitusikan persamaan garis polar ke persamaan lingkaran. Persamaan yang diperoleh biasanya berbentuk persamaan kuadrat.
- c. Dari persamaan kuadrat ini dapat dicari akar persamaannya dengan cara memfaktorkan atau menggunakan rumus abc sehingga diperoleh dua akar real. Dua akar real ini menunjukkan bahwa ada dua garis singgung yang bisa ditarik dari setiap titik tersebut.
- d. Misalkan dua akar real tersebut adalah m dan n . Dengan menyubstitusikan m dan n ke persamaan garis polar, diperoleh dua titik singgung yang terletak pada lingkaran.
- e. Dengan menggunakan prinsip pembagian adil (lihat Tabel 1.4), dapat dicari persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik singgung lingkaran dan titik di luar lingkaran yang sudah ditentukan.
- f. Perlu diperhatikan bahwa pada langkah (d) diperoleh dua titik singgung pada lingkaran, artinya juga ada dua garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran.

Untuk memudahkan peserta didik dalam memahami materi persamaan garis singgung lingkaran dengan titik di luar lingkaran diketahui, guru dapat

memberikan alternatif Contoh Soal 1.26 dan 1.27 pada Buku Siswa. Guru juga dapat menggunakan contoh soal lain yang sejenis. Selanjutnya, guru meminta peserta didik untuk mengerjakan soal pada Ayo Mencoba 1.12 dan 1.13.



Ayo Mencoba 1.12

Substitusikan $x = \frac{24}{13}$ ke persamaan $y = \frac{(4-3x)}{2}$ sehingga diperoleh

$$y = \frac{\left(4 - 3\left(\frac{24}{13}\right)\right)}{2} = \frac{\left(4 - \frac{72}{13}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{52}{13} - \frac{72}{13}\right)}{2} = -\frac{20}{26} = -\frac{10}{13}.$$

Jadi, titik polarnya adalah $\left(\frac{24}{13}, -\frac{10}{13}\right)$.

Persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ yang melalui $\left(\frac{24}{13}, -\frac{10}{13}\right)$ adalah

$$\begin{aligned} xx_a + yy_a &= 4 \\ \left(\frac{24}{13}\right)x + \left(-\frac{10}{13}\right)y &= 4 \end{aligned}$$

$$24x - 10y = 52 \text{ atau } 12x - 5y = 26.$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ melalui titik $T(3, 2)$ adalah $y = 2$ dan $12x - 5y = 26$.



Ayo Mencoba 1.13

1. Titik $(3, 2)$ berada di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ karena

$$L \equiv (3)^2 + (2)^2 - 2(3) + 4(2) - 5 = 10 > 0.$$

Misalkan sebuah garis melalui titik $T(3, 2)$ dan menyinggung lingkaran L di titik $A(x_a, y_a)$. Dengan demikian, persamaan garis polar yang melalui titik $A(x_a, y_a)$ adalah

$$xx_T + yy_T - \frac{2}{2}(x + x_T) + \frac{4}{2}(y + y_T) - 5 = 0$$

$$3x + 2y - (x + 3) + 2(y + 2) - 5 = 0$$

$$2x + 4y - 4 = 0$$

$$x + 2y - 2 = 0.$$

Persamaan ini ekuivalen dengan $x = 2 - 2y$. Selanjutnya, substitusikan persamaan $x = 2 - 2y$ ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ sehingga diperoleh

$$(2 - 2y)^2 + y^2 - 2(2 - 2y) + 4y - 5 = 0$$

$$4 - 8y + 4y^2 + y^2 - 4 + 4y + 4y - 5 = 0$$

$$5y^2 - 5 = 0$$

$$y^2 - 1 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat $y^2 - 1 = 0$, diperoleh

$$y_1 = 1 \text{ atau } y_2 = -1.$$

► **Untuk** $y_1 = 1$.

Dengan menyubstitusikan $y_1 = 1$ ke persamaan $x = 2 - 2y$, diperoleh

$$x = 2 - 2(1) = 0.$$

Dari perhitungan ini, diperoleh titik polar $(0, 1)$

Persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ melalui titik $(0, 1)$ adalah

$$x(0) + y(1) - 2\frac{(x+0)}{2} + 4\frac{(y+1)}{2} - 5 = 0$$

$$3y - x - 3 = 0.$$

► **Untuk** $y_2 = -1$.

Dengan menyubstitusikan $y_2 = -1$ ke persamaan $x = 2 - 2y$, diperoleh

$$x = 2 - 2(-1) = 4.$$

Dari perhitungan ini, diperoleh titik polar $(4, -1)$.

Persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ melalui titik $(4, -1)$ adalah

$$x(4) + y(-1) - 2\frac{(x+4)}{2} + 4\frac{(y+(-1))}{2} - 5 = 0$$

$$4x - y - (x + 4) + 2(y - 1) - 5 = 0$$

$$3x + y - 11 = 0.$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ yang melalui titik $(3, 2)$ adalah $3y - x - 3 = 0$ dan $3x + y - 11 = 0$.

2. Titik $A(5, 4)$ berada di luar lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 - 16 = 0$ karena

$$L \equiv (5-1)^2 + (4-2)^2 - 16 = 4 > 0.$$

Misalkan sebuah garis melalui titik $A(5, 4)$ dan menyinggung lingkaran L di titik $P(x_a, y_a)$. Dengan demikian, persamaan garis polar yang melalui titik $P(x_a, y_a)$ adalah

$$(x-1)(x_a-1) + (y-2)(y_a-2) - 16 = 0$$

$$(x-1)(5-1) + (y-2)(4-2) - 16 = 0$$

$$4(x-1) + 2(y-2) - 16 = 0$$

$$4x + 2y - 24 = 0.$$

Persamaan ini ekuivalen dengan $y = 12 - 2x$. Selanjutnya, substitusikan persamaan $y = 12 - 2x$ ke persamaan lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 - 16 = 0$ sehingga diperoleh

$$(x-1)^2 + ((12-2x)-2)^2 - 16 = 0$$

$$5x^2 - 42x + 85 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat $5x^2 - 42x + 85 = 0$, diperoleh

$$x_1 = 5 \text{ atau } x_2 = \frac{17}{5}.$$

► **Untuk** $x_1 = 5$.

Dengan menyubstitusikan $x_1 = 5$ ke persamaan $y = 12 - 2x$, diperoleh

$$y = 12 - 2(5) = 2.$$

Dari perhitungan ini, diperoleh titik polar $(5, 2)$.

Persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 - 16 = 0$ melalui titik $(5, 2)$ adalah

$$(x-1)(5-1) + (y-2)(2-2) - 16 = 0$$

$$4(x-1) + 0 - 16 = 0$$

$$4x - 20 = 0$$

$$x - 5 = 0.$$

► **Untuk** $x_2 = \frac{17}{5}$.

Dengan cara yang sama, diperoleh titik polar $\left(\frac{17}{5}, \frac{26}{5}\right)$ sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$(x-1)\left(\frac{17}{5}-1\right)+(y-2)\left(\frac{26}{5}-2\right)-16=0$$

$$12x+16y-124=0$$

$$3x+4y-31=0.$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 - 16 = 0$ yang melalui titik $A(5, 4)$ adalah $x-5=0$ dan $3x+4y-31=0$.

G. Sumatif

1. Guru menugaskan peserta didik untuk menyelesaikan Uji Kompetensi Bab 1. Uji kompetensi ini dapat digunakan sebagai salah satu alternatif untuk melakukan evaluasi sumatif pada akhir pembelajaran.
2. Peserta didik didorong untuk berpikir kritis, kreatif, dan inovatif melalui asesmen ini (*berkesadaran*). Peserta didik juga didorong untuk membuat hubungan yang signifikan antara konten matematis dan skenario dunia nyata (*bermakna*), seperti mengaitkan konsep persamaan lingkaran dan elips pada kehidupan sehari-hari. Untuk menumbuhkan lingkungan belajar yang ceria dan menyenangkan (*menggembirakan*), asesmen ini disusun sebagai proyek kreatif yang memberi kesempatan bagi peserta didik untuk bekerja secara mandiri, kolaboratif, dan berkomunikasi berdasarkan temuan mereka secara interaktif di depan kelas.
3. Asesmen ini mengevaluasi kemampuan kognitif peserta didik dalam memahami materi lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran sekaligus mendorong kreativitas, keingintahuan, dan komunikasi. Berdasarkan pendekatan ini, peserta didik diharapkan dengan penuh kesadaran dapat mempelajari matematika secara mendalam (*berkesadaran*), relevan (*bermakna*), dan menyenangkan (*menggembirakan*).

Contoh kisi-kisi untuk asesmen sumatif pada materi lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran dapat dilihat pada Tabel 1.5, sedangkan rubrik penskoran asesmen sumatif dapat dilihat pada Tabel 1.6.

Tabel 1.5 Contoh Kisi-Kisi Penilaian Uji Kompetensi (Asesmen Sumatif)

No.	Tujuan Pembelajaran	Materi	Indikator	Teknik Penilaian	No. Soal	Level SOLO	Jumlah
1.	Peserta didik mampu menentukan persamaan lingkaran, persamaan elips, dan persamaan garis singgung lingkaran.	Lingkaran	Menentukan unsur-unsur lingkaran.	Uraian	1	Multistruktural	1
			Menyelesaikan masalah matematis yang berkaitan dengan persamaan lingkaran.		2 3 10	<i>Extended abstract</i> <i>Extended abstract</i> Relasional	3
2.		Elips	Menentukan unsur-unsur elips.	Uraian	5	Multistruktural	1
			Menyelesaikan masalah matematis yang berkaitan dengan persamaan elips.		4	Multistruktural	1
					9	Multistruktural	1
3.		Garis Singgung Lingkaran	Menyelesaikan masalah matematis yang berkaitan dengan persamaan garis singgung lingkaran.	Uraian	6 7 8	Relasional Relasional <i>Extended abstract</i>	3

Tabel 1.6 Contoh Rubrik Penskoran untuk Soal Berbentuk Uraian

Langkah	Skor	Indikator Penskoran
Memahami masalah	3	Peserta didik mampu menuliskan (mengungkapkan) apa yang diketahui dan ditanyakan dari masalah yang diajukan dengan jelas.
	2	Peserta didik hanya menuliskan (mengungkapkan) apa yang diketahui atau apa yang ditanyakan.
	1	Peserta didik menuliskan (mengungkapkan) data/konsep/ pengetahuan yang tidak berhubungan dengan masalah yang diajukan.
	0	Peserta didik tidak menuliskan apa pun sehingga tidak memahami makna dari masalah yang diajukan.
Merencanakan penyelesaian	2	Peserta didik menuliskan/menceritakan syarat cukup dan syarat perlu (rumus) dari masalah yang diajukan serta menggunakan semua informasi yang telah dikumpulkan.
	1	Peserta didik menceritakan/menuliskan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah, tetapi tidak runtut.
	0	Peserta didik tidak menceritakan/menuliskan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah.

Langkah	Skor	Indikator Penskoran
Melaksanakan rencana	4	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, menggunakan langkah-langkah menyelesaikan masalah dengan benar, tidak terjadi kesalahan prosedur, dan tidak terjadi kesalahan algoritma/perhitungan.
	3	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, menggunakan langkah-langkah menyelesaikan masalah dengan benar, dan tidak terjadi kesalahan prosedur, tetapi terjadi kesalahan algoritma/perhitungan.
	2	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, tetapi terjadi kesalahan prosedur.
	1	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, tetapi terjadi kesalahan prosedur dan kesalahan algoritma/perhitungan.
	0	Peserta didik tidak mampu melaksanakan rencana yang telah dibuat.
Memeriksa kembali	1	Peserta didik melakukan pemeriksaan kembali jawaban.
	0	Peserta didik tidak melakukan pemeriksaan kembali jawaban.

Catatan:

Guru dapat menetapkan bobot yang berbeda-beda antara aspek satu dan aspek lainnya (sebagaimana contoh rubrik penskoran pada Tabel 1.6) dengan memperhatikan karakteristik tujuan pembelajaran atau keterampilan yang dinilai.

H. Kunci Jawaban

Latihan Soal Lingkaran

- Diketahui titik pusat lingkaran $O(0,0)$.
 - $x^2 + y^2 = 15$.
 - $x^2 + y^2 = \frac{4}{5}$.
 - Lingkaran melalui titik $A(1,2)$ maka $r^2 = (1-0)^2 + (2-0)^2 = 5$. Jadi, persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = 5$.
 - Lingkaran melalui titik $B\left(1\frac{1}{2}, 5\right)$ maka $r^2 = \left(\frac{3}{2}-0\right)^2 + (5-0)^2 = \frac{109}{4}$.
Jadi, persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = \frac{109}{4}$.
- Dari persamaan $(x-1)^2 + (x+5)^2 = 9$, diperoleh $a = 1$, $b = -5$, dan $r^2 = 9$. Jadi, pusat lingkaran terletak di titik $(1, -5)$ dengan jari-jari $r = 3$.

b. Dari persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 39 = 0$, diperoleh

$$A = -6 \text{ maka } a = 3,$$

$$B = 8 \text{ maka } b = -4, \text{ dan}$$

$$C = -39,$$

sehingga pusat lingkaran terletak pada titik $(3, -4)$.

Jari-jari lingkaran $r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$, sehingga

$$r = \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - C} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 - (-39)} = 8.$$

c. Dari persamaan $x^2 + y^2 = 15$, diperoleh $a = 0$, $b = 0$, dan $r^2 = 15$.
Jadi, pusat lingkaran terletak pada titik $(0, 0)$.

3. Diketahui lingkaran melalui titik $A(-5, 6)$ dan titik $B(3, 2)$ dengan diameter AB . Misalkan titik pusat lingkaran adalah $P(a, b)$, maka

$$a = \frac{(-5 + 3)}{2} = -1 \text{ dan } b = \frac{(6 + 2)}{2} = 4,$$

sehingga titik pusat lingkaran adalah $P(-1, 4)$.

Jari-jari lingkaran merupakan setengah diameter AB sehingga

$$r = \frac{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{(8^2 + (-4)^2)}}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

Jadi, persamaan lingkaran tersebut adalah $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$.

4. Misalkan persamaan umum lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.
Persamaan lingkaran yang melalui titik $P(2, -4)$ adalah

$$2^2 + (-4)^2 + 2A + (-4)B + C = 0$$

$$4 + 16 + 2A - 4B + C = 0$$

$$2A - 4B + C = -20. \quad (1)$$

Dengan cara yang sama, persamaan lingkaran yang melalui

► titik $Q(5, -1)$ adalah $5A - B + C = -26, \quad (2)$

► titik $R(2, 2)$ adalah $2A + 2B + C = -8. \quad (3)$

Dengan mengeliminasi variabel C pada persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$-3A - 3B = 6$$

$$A + B = -2. \quad (4)$$

Dengan mengeliminasi variabel C pada persamaan (1) dan (3), diperoleh nilai $B = 2$, kemudian nilai B disubstitusikan ke persamaan (4) sehingga

$$A + 2 = -2 \text{ maka } A = -4.$$

Hasil substitusi $A = -4$ dan $B = 2$ pada persamaan (1) adalah

$$2(-4) - 4(2) + C = -20 \text{ atau } C = -4.$$

Jadi, persamaan lingkaran yang melalui titik-titik $P(2, -4)$, $Q(5, -1)$, dan $R(2, 2)$ adalah $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

5. Diketahui sebuah lingkaran menyinggung sisi persegi $ABCD$ di titik $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 4)$, dan $D(1, 4)$.

Diameter lingkaran = jarak AB

$$d = \sqrt{(4-1)^2 - (1-1)^2} = 3.$$

Jari-jari lingkaran $r = \frac{3}{2}$.

Pusat lingkaran $P(x, y)$ terletak pada titik potong diagonal AC dan BD sehingga

$$P_x = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \text{ dan } P_y = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2},$$

maka pusat lingkaran terletak pada titik $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Jadi, persamaan lingkaran yang menyinggung keempat sisi persegi $ABCD$ adalah $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

6. *Langkah pertama:* menemukan titik B

► Persamaan garis AB adalah $x - y = 1$ (1)

► Persamaan garis BC adalah $x + y = 0$ (2)

Dengan mengeliminasi x pada persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$-2y = 1 \text{ atau } y = -\frac{1}{2}.$$

Dengan menyubstitusikan $y = -\frac{1}{2}$ ke persamaan (1), diperoleh $x = \frac{1}{2}$, sehingga titik B berada pada koordinat $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Langkah kedua: menemukan titik C

► Persamaan garis BC adalah $x + y = 0$ (2)

► Persamaan garis CD adalah $x - y = 0$ (3)

Dengan mengeliminasi x pada persamaan (2) dan (3), diperoleh

$$2y = 0 \text{ atau } y = 0.$$

Dengan menyubstitusikan $y = 0$ ke persamaan (2), diperoleh $x = 0$, sehingga titik C berada pada koordinat $(0, 0)$.

Langkah ketiga: menemukan titik D

► Persamaan garis CD adalah $x - y = 0$ (3)

► Persamaan garis AD adalah $x + y = 1$ (4)

Dengan mengeliminasi x pada persamaan (3) dan (4), diperoleh

$$-2y = -1 \text{ atau } y = \frac{1}{2}.$$

Dengan menyubstitusikan $y = \frac{1}{2}$ ke persamaan (3), diperoleh $x = \frac{1}{2}$, sehingga titik D berada pada koordinat $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Langkah keempat: menemukan titik A

► Persamaan garis AD adalah $x + y = 1$ (4)

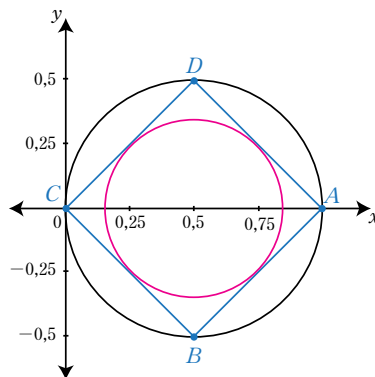
► Persamaan garis AB adalah $x - y = 1$ (1)

Dengan mengeliminasi x pada persamaan (1) dan (4), diperoleh

$$2y = 0 \text{ atau } y = 0.$$

Dengan menyubstitusikan $y = 0$ ke persamaan $x - y = 1$, maka diperoleh $x = 1$, sehingga titik A berada pada koordinat $(1, 0)$.

Dari proses tersebut diperoleh bahwa persegi $ABCD$ memiliki koordinat $A(1, 0)$, $B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $C(0, 0)$, dan $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



Gambar 1.5 Sketsa Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Persegi

Persamaan lingkaran dalam persegi

Lingkaran dalam persegi dapat terjadi apabila titik pusat lingkaran berada di tengah-tengah diagonal persegi dan jari-jari lingkaran merupakan setengah panjang sisi persegi.

- (a) Pusat lingkaran berada di tengah-tengah diagonal persegi. Misalkan titik pusat lingkaran ini adalah $P(a, b)$, maka

$$a = \frac{x_c + x_a}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ dan } b = \frac{y_c + y_a}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0.$$

Jadi, pusat lingkaran ini adalah $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

- (b) Jari-jari lingkaran merupakan setengah panjang sisi persegi sehingga

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\sqrt{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dari pusat $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ dan jari-jari $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, persamaan lingkaran dalam persegi adalah $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{8}$.

Persamaan lingkaran luar persegi

Lingkaran luar persegi dapat terjadi apabila titik pusat lingkaran berada di tengah-tengah diagonal persegi dan jari-jari lingkaran merupakan setengah panjang diagonal persegi. Pusat lingkaran luar persegi sama dengan pusat lingkaran dalam persegi, yaitu titik $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Selanjutnya, jari-jari lingkaran dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\sqrt{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 0)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dari pusat $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ dan jari-jari $\frac{1}{2}$, persamaan lingkaran luar persegi adalah $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

7. Persamaan $x^2 + y^2 + px + 2y + 26 = 0$ dapat diubah ke bentuk $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + px + 2y + 26 &= 0 \\ x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 + 26 &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 + 2y + 1 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1 - 26$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 25.$$

Dari persamaan di atas, diperoleh kuadrat jari-jari lingkaran sebesar $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 25$. Syarat sebuah lingkaran dapat terbentuk adalah nilai $r > 0$ sehingga

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 25 > 0$$

$$\left(\frac{p}{2} - 5\right)\left(\frac{p}{2} + 5\right) > 0$$

maka

$$\frac{p}{2} - 5 = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{p}{2} + 5 = 0$$

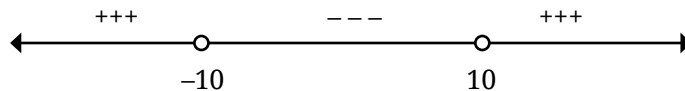
$$\frac{p}{2} = 5 \quad \frac{p}{2} = -5$$

$$p = 10 \quad p = -10$$

Sebarang titik di antara -10 dan 10 (misalkan $p = 0$) disubstitusikan ke persamaan $\left(\frac{p}{2} - 5\right)\left(\frac{p}{2} + 5\right) = 0$ sehingga diperoleh

$$\left(\frac{0}{2} - 5\right)\left(\frac{0}{2} + 5\right) = -25 < 0.$$

Representasi nilai jari-jari pada garis bilangan sebagai berikut.



Karena titik yang diambil $p = 0$ bernilai negatif, sedangkan $\left(\frac{p}{2} - 5\right)\left(\frac{p}{2} + 5\right)$ harus bernilai positif, maka himpunan penyelesaiannya adalah $\{p < -10 \text{ atau } p > 10\}$.

Jadi, batas nilai p agar persamaan $x^2 + y^2 + px + 2y + 26 = 0$ menunjukkan sebuah lingkaran adalah $\{p < -10 \text{ atau } p > 10\}$.

8. Pada lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y - 39 = 0$, diperoleh

$$A = -6, B = 8, \text{ dan } C = -39.$$

Misalkan pusat lingkaran L_1 adalah $P(a, b)$, maka

$$a = -\frac{A}{2} = -\frac{(-6)}{2} = 3 \text{ dan } b = -\frac{B}{2} = -\frac{8}{2} = -4,$$

sehingga lingkaran L_1 berpusat pada titik $P(3, -4)$.

Misalkan jari-jari lingkaran L_1 adalah r , maka

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2} - C = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + 39} = 8.$$

Langkah selanjutnya adalah menemukan persamaan lingkaran L_2 .

- ▶ Titik pusat lingkaran L_2

Karena berasal dari titik pusat lingkaran L_1 , yaitu $P(3, -4)$, yang dicerminkan terhadap sumbu- x , pusat lingkaran L_2 adalah titik $P'(3, 4)$.

- ▶ Jari-jari lingkaran L_2

Jari-jari lingkaran L_1 sebesar 8 diperbesar 3 kali sehingga jari-jari lingkaran L_2 adalah 24.

- ▶ Persamaan lingkaran L_2 yang berpusat pada titik $P'(3, 4)$ dan berjari-jari 24 adalah

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y-4)^2 &= 24^2 \\(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) &= 576 \\x^2 + y^2 - 6x - 8y - 551 &= 0.\end{aligned}$$

9. Diketahui lingkaran L berpusat di titik $(-2, 3)$ dan melalui titik $(1, 5)$ sehingga persamaannya adalah $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Titik pusat baru dihasilkan dari:

- ▶ titik pusat $(-2, 3)$ yang diputar searah jarum jam sejauh 90° terhadap titik $O(0, 0)$ sehingga diperoleh titik $(3, 2)$;
- ▶ dari titik $(3, 2)$ digeser ke bawah sejauh 5 satuan sehingga diperoleh titik $(3, -3)$.

Titik pusat baru lingkaran L' adalah $(3, -3)$ sehingga persamaan lingkaran yang dihasilkan adalah $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 13$.

10. Diketahui jangkauan radar kapal penyelamat yang berada di pelabuhan adalah 45 km ke segala arah. Dengan demikian, jarak kapal motor penumpang yang mengalami kerusakan mesin harus ≤ 45 km terhadap kapal penyelamat agar terdeteksi.

Jarak kapal motor penumpang (d) yang diduga berada pada koordinat $(30, 25)$ dengan kapal penyelamat yang dimisalkan berkoordinat $(0, 0)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(30-0)^2 + (25-0)^2} \\ &= \sqrt{30^2 + 25^2} \\ &= \sqrt{1.525} \approx 39,05 \text{ km.} \end{aligned}$$

Karena jaraknya 39,05 km, berarti kapal motor penumpang tersebut dapat terdeteksi oleh radar kapal penyelamat.

Latihan Soal Elips

1. a. Bentuk umum persamaan elips diubah terlebih dahulu ke bentuk bakunya.

$$\begin{aligned} 9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 &= 0 \\ 9(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 4y) &= 116 \\ 9(x-1)^2 + 25(y+2)^2 &= 116 + 9 + 100 \\ \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Pada elips berlaku $a > b$ maka $a^2 > b^2$ sehingga persamaan yang diperoleh memenuhi persamaan elips horizontal $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$. Dari persamaan baru tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ dan } n = -2 & b^2 &= 9 \text{ atau } b = 3 \\ a^2 &= 25 \text{ atau } a = 5 & c &= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4. \end{aligned}$$

Dengan demikian, ketiga unsur elips tersebut sebagai berikut:

- ▶ titik pusat adalah $(m, n): (1, -2)$;
- ▶ titik fokus adalah $(m \pm c, n): (5, -2)$ dan $(-3, -2)$;
- ▶ titik puncak adalah $(m \pm a, n)$ dan $(m, n \pm b)$:
 $(6, -2)$, $(-4, -2)$, $(1, 1)$, dan $(1, -5)$.

- b. Dengan menggunakan metode pada bagian a, diperoleh ketiga unsur elips berikut:

- ▶ titik pusat adalah $(2, -1)$;
- ▶ titik fokus adalah $(6, -1)$ dan $(-2, -1)$;
- ▶ titik puncak adalah $(-3, -1)$, $(7, -1)$, $(2, -4)$, dan $(2, 2)$.

- c. Dengan menggunakan metode pada bagian a, diperoleh ketiga unsur elips berikut:
- ▶ titik pusat adalah $(-2, 1)$;
 - ▶ titik fokus adalah $(-2 + \sqrt{5}, 1)$ dan $F_2(-2 - \sqrt{5}, 1)$;
 - ▶ titik puncak adalah $(-5, 1)$, $(1, 1)$, $(-2, -1)$, dan $(-2, 3)$.
- d. Dengan menggunakan metode pada bagian a, diperoleh ketiga unsur elips berikut:
- ▶ titik pusat adalah $(0, 0)$;
 - ▶ titik fokus adalah $(-3, 0)$ dan $(3, 0)$;
 - ▶ titik puncak adalah $(-5, 0)$, $(5, 0)$, $(0, -4)$, dan $(0, 4)$.
2. a. Diketahui:
- ▶ titik fokus = $(0, 6)$ dan $(0, -6)$
 - ▶ titik puncak = $(0, 7)$ dan $(0, -7)$

Titik fokus dan titik puncak terletak pada sumbu- y (elips vertikal) sehingga persamaan elips yang digunakan adalah $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Dari titik fokus dan titik puncak, diperoleh

$$c = 6 \text{ dan } a = 7,$$

maka

$$b^2 = a^2 - c^2 = 7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{49} = 1$.

- b. Titik puncak pada $(5, 0)$ dan $(-5, 0)$ maka $a = 5$.

Panjang *latus rectum* adalah

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{4}{5}$$

$$10b^2 = 4a \text{ atau } 5b^2 = 2a.$$

Substitusikan $a = 5$ ke persamaan $5b^2 = 2a$, diperoleh

$$5b^2 = 2(5) \text{ maka } b^2 = 2.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{2} = 1$.

- c. Titik fokus terletak pada $(1, -1)$ dan $(1, -3)$ maka titik pusat elips: $\left(1, \frac{-3 + (-1)}{2}\right) = (1, -2)$.

Karena titik fokus dan titik pusat berada pada satu sumbu yang sejajar sumbu- y (elips vertikal), persamaan elips yang memenuhi adalah $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$ dengan titik pusat (m, n) dan titik fokus $(m, n \pm c)$.

Dari titik pusat $(1, -2)$, diperoleh

$$m = 1 \text{ dan } n = -2.$$

Dari titik fokus $(1, -1)$ dan $(1, -3)$, diperoleh

$$n + c = -1 \text{ dan } n - c = -3.$$

Dengan menggunakan metode eliminasi dan substitusi pada kedua persamaan, diperoleh

$$n = -2 \text{ dan } c = 1.$$

Karena elips menyinggung sumbu- y , nilai b adalah jarak dari pusat elips $(1, -2)$ ke sumbu- y yang senilai dengan absis yaitu $b = 1$. Dengan menyubstitusikan $b = 1$ dan $c = 1$ ke $a^2 = b^2 + c^2$, diperoleh

$$a^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{2} = 1$.

- d. Elips termasuk elips horizontal karena ordinat titik pusat $(4, -1)$ dan salah satu titik fokus $(1, -1)$ sama. Persamaan yang sesuai adalah

$$\frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1.$$

Dari titik pusat $(4, -1)$ dan titik fokus $(1, -1)$, diperoleh

$$c = 4 - 1 = 3.$$

Dengan menyubstitusikan $c = 3$ ke $a^2 = b^2 + c^2$, diperoleh

$$a^2 = b^2 + 9.$$

Karena elips melalui titik $(8, 0)$, maka berlaku

$$\begin{aligned} \frac{(8-4)^2}{a^2} + \frac{(0+1)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Dengan menyubstitusikan $a^2 = b^2 + 9$ ke persamaan $\frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, diperoleh

$$\frac{16}{b^2+9} + \frac{1}{b^2} = 1$$

$$(b^2-9)(b^2+1) = 0,$$

maka

$$b^2 = 9 \text{ atau } b^2 = -1.$$

Karena nilai b harus positif sehingga yang memenuhi syarat adalah $b^2 = 9$ atau $b = 3$. Dengan menyubstitusikan $b = 3$ ke persamaan $a^2 = b^2 + 9$, diperoleh $a^2 = 18$.

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

3. Nilai eksentrisitas elips sebesar $\frac{12}{13}$, maka $e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$.

Jarak dua titik fokus adalah 36, maka $2c = 36$ atau $c = 18$.

Dengan menyubstitusikan $c = 18$ ke rumus eksentrisitas $e = \frac{c}{a}$, diperoleh

$$\frac{12}{13} = \frac{18}{a} \text{ atau } a = (18)\left(\frac{13}{12}\right) = 19,5.$$

Dengan menyubstitusikan $a = 19,5$ dan $c = 18$ ke rumus $a^2 = b^2 + c^2$, diperoleh

$$b^2 = a^2 - c^2 = (19,5)^2 - (18)^2 = 56,25 \text{ atau } b = 7,5.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{(19,5)^2} + \frac{y^2}{(7,5)^2} = 1$.

4. Titik fokus elips pada $F_1(8, -1)$ dan $F_2(-4, -1)$ sehingga elips memiliki sumbu mayor sejajar sumbu- x dengan persamaan $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.

Titik fokus $F_1(8, -1)$, maka $m + c = 8$ dan $n = -1$.

Titik fokus $F_2(-4, -1)$, maka $m - c = -4$ dan $n = -1$.

Dengan melakukan metode eliminasi dan substitusi pada persamaan $m + c = 8$ dan $m - c = -4$, diperoleh

$$m = 2 \text{ dan } c = 6,$$

sehingga pusat elips terletak pada titik $(2, -1)$.

Salah satu koordinat ujung sumbu minornya adalah $(2, 7)$, maka $m = 2$ dan $n + b = 7$. Dengan menyubstitusikan $n = -1$, diperoleh

$$-1 + b = 7 \text{ maka } b = 8.$$

Dengan menyubstitusikan $b = 8$ dan $c = 6$ ke rumus $a^2 = b^2 + c^2$, diperoleh

$$a^2 = 8^2 + 6^2 = 100.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{64} = 1$.

5. Elips memiliki titik pusat $O(0,0)$ dan salah satu titik fokusnya $(0,3)$ sehingga termasuk elips vertikal dengan persamaan $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Panjang sumbu mayor elips adalah 10, maka $2a = 10$ atau $a = 5$.

Salah satu titik fokus pada $(0,3)$, maka $c = 3$.

Dari $a = 5$ dan $c = 3$, diperoleh

$$b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \text{ atau } b = 4.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

6. Dari permasalahan pada soal, diketahui:

- ▶ lintasan elips berbentuk elips;
- ▶ jarak terdekat satelit terhadap Bumi (sumbu minor) adalah 119 mil sehingga $2b = 119$ atau $b = 59,5$;
- ▶ jarak terjauh satelit terhadap Bumi (sumbu mayor) adalah 881 mil sehingga $2a = 881$ atau $a = 440,5$;
- ▶ Pusat lintasan satelit tersebut berada pada titik $(-2,1)$ sehingga $m = -2$ dan $n = 1$.

Dari $a = 440,5$; $b = 59,5$; $m = -2$, dan $n = 1$, persamaan lintasan satelit yang mengitari Bumi adalah

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{440,5^2} + \frac{(y-1)^2}{59,5^2} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{194.040,25} + \frac{(y-1)^2}{3.540,25} = 1.$$

Jadi, persamaan lintasan satelit adalah $\frac{(x+2)^2}{194.040,25} + \frac{(y-1)^2}{3.540,25} = 1$.

7. Diketahui:

- ▶ jarak terdekat Matahari terhadap Bumi adalah $9,3 \times 10^6$ mil
- ▶ jarak terjauh Matahari terhadap Bumi adalah $9,6 \times 10^6$ mil
- ▶ posisi Matahari sebagai fokus elips dengan titik pusat $(0,0)$

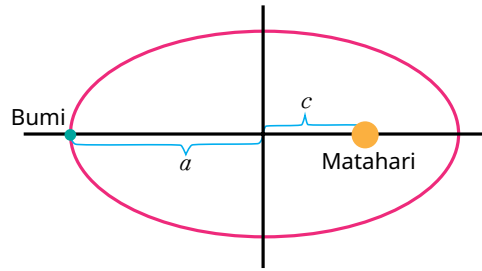
Berikut ini sketsa orbit Bumi mengitari Matahari.

Jarak terjauh adalah $9,6 \times 10^6$ mil sehingga

$$a + c = 9,6 \times 10^6.$$

Jarak terdekat adalah $9,3 \times 10^6$ mil sehingga

$$a - c = 9,3 \times 10^6.$$



Gambar 1.6 Sketsa Orbit Bumi Mengitari Matahari

Dengan menggunakan metode eliminasi pada kedua persamaan, diperoleh

$$2c = 0,3 \times 10^6$$

$$c = 0,15 \times 10^6.$$

Dengan menyubstitusikan nilai c ke salah satu persamaan, diperoleh

$$a + (0,15 \times 10^6) = 9,6 \times 10^6$$

$$a = (9,6 \times 10^6) - (0,15 \times 10^6)$$

$$a = 9,45 \times 10^6.$$

Dengan menyubstitusikan nilai a dan c ke persamaan $b^2 = a^2 - c^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} b^2 &= (9,45 \times 10^6)^2 - (0,15 \times 10^6)^2 \\ &= 89,3025 \times 10^{12} - 0,0225 \times 10^{12} \\ &= 89,28 \times 10^{12} = 8,928 \times 10^{13} \end{aligned}$$

Jadi, persamaan lintasan bumi terhadap matahari yang berbentuk elips

$$\text{adalah } \frac{x^2}{8,93025 \times 10^{13}} + \frac{y^2}{8,928 \times 10^{13}} = 1.$$

8. a. Panjang sumbu utama orbit Komet Halley mendekati 35,88 satuan astronomis sehingga

$$2a = 35,88 \text{ atau } a = 17,94.$$

Nilai eksentrisitas orbit (e) adalah 0,967, sehingga

$$e = \frac{c}{a}$$

$$0,967 = \frac{c}{17,94}$$

$$c = 0,967 \times 17,94 = 17,348.$$

Dengan menyubstitusikan nilai a dan c ke persamaan $b^2 = a^2 - c^2$, diperoleh

$$b^2 = 17,94^2 - 17,348^2$$

$$= 321,8436 - 300,953104 = 20,890496,$$

Karena pusat orbit pada titik asal $(0,0)$ dan sumbu mayor pada sumbu- x , persamaan elips yang sesuai adalah $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jadi, persamaan orbit komet Halley adalah

$$\frac{x^2}{321,8436} + \frac{y^2}{20,890496} = 1.$$

- b. Misalkan a setengah sumbu utama dan e adalah eksentrisitas, maka jarak terpanjang (*aphelion*) pusat Matahari ke pusat Komet dapat ditentukan dengan rumus $a \times (1 + e)$ sehingga

$$\begin{aligned} \text{jarak terpanjang} &= a \times (1 + e) \\ &= 17,94 \times (1 + 0,967) \\ &= 35,28798 \text{ satuan astronomis.} \end{aligned}$$

Adapun jarak terpendek (*perihelion*) pusat Matahari ke pusat Komet dapat ditentukan dengan rumus $= a \times (1 - e)$ sehingga

$$\begin{aligned} \text{jarak terpendek} &= a \times (1 - e) \\ &= 17,94 \times (1 - 0,967) \\ &= 0,59202 \text{ satuan astronomis.} \end{aligned}$$

9. Diketahui:

- bentuk terowongan setengah elips dengan panjang 10 m dan ketinggian 6 m
- truk barang memiliki lebar 5 m dan tinggi 5 m

Panjang elips merupakan panjang sumbu minor, maka

$$\begin{aligned} 2b &= 10 \\ b &= \frac{10}{2} = 5 \text{ m.} \end{aligned}$$

Tinggi busur elips merupakan setengah panjang sumbu mayor sehingga

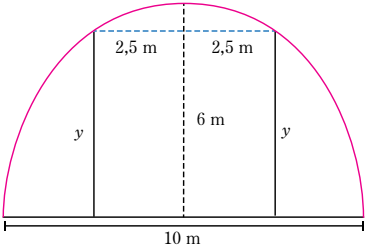
$$a = 6 \text{ m.}$$

Dengan menganggap titik pusat elips sebagai titik asal $(0,0)$ maka persamaan elips tersebut adalah

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ atau } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Sebuah kendaraan dapat melewati terowongan secara maksimal apabila berada tepat di tengah terowongan tersebut. Kita dapat menentukan ketinggian maksimal kendaraan tersebut yang bergantung pada lebarnya. Karena lebar truk 5 m, kita harus menentukan nilai y untuk $x = \frac{5}{2} = 2,5$, yaitu ketinggian maksimum untuk titik 2,5 meter di kiri dan kanan titik pusat elips. Oleh karena itu, untuk $x = 2,5$, maka

$$\begin{aligned} \frac{(2,5)^2}{25} + \frac{y^2}{36} &= 1 \\ \frac{y^2}{36} &= 1 - \frac{6,25}{25} \\ y^2 &= \frac{675}{25} = 27 \\ y &= \sqrt{27} = 5,20. \end{aligned}$$



Gambar 1.7 Sketsa Terowongan

Jadi, truk barang dapat melewati terowongan tersebut karena tinggi truk (5 m) di bawah ketinggian maksimum terowongan (5,2 m) pada titik 2,5 m di kanan dan kiri titik pusatnya.

10. Diketahui diameter terowongan Cisumdawu sepanjang 14 m. Hal ini menunjukkan bahwa panjang sumbu mayor adalah 14 sehingga $2a = 14$ atau $a = 7$.

Ketinggian maksimum terowongan tersebut adalah 5 m sehingga $b = 5$.

Misalkan kita menganggap pusatnya berada pada titik pusat koordinat, yaitu $O(0,0)$, maka persamaan terowongan Cisumdawu yang berbentuk setengah elips adalah $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ atau $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Latihan Soal Kedudukan Titik dan Garis terhadap Lingkaran

1. Berikut ini ringkasan jawaban nomor 1.

Titik	Persamaan Lingkaran	Kedudukan Titik terhadap Lingkaran L
$A(2,3)$	$L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$.	Di dalam lingkaran
$B(2,8)$		Di luar lingkaran
$C(8,5)$		Di luar lingkaran
$D(5,3)$		Di dalam lingkaran

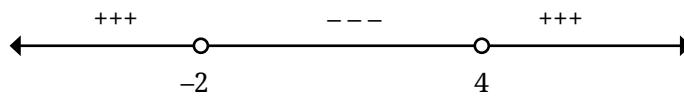
2. a. Dengan menyubstitusikan titik $P(a, 1)$ ke persamaan lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 25 = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} K_{P(a,1)} &= (a - 1)^2 + (1 + 3)^2 - 25 \\ &= a^2 - 2a - 8 \\ &= (a - 4)(a + 2). \end{aligned}$$

Syarat kedudukan titik $P(a, 1)$ di dalam lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ adalah $K_{P(a,1)} < 0$, maka

$$(a - 4)(a + 2) < 0.$$

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan, diperoleh



Dari garis bilangan tersebut, terlihat a bernilai negatif pada interval $-2 < a < 4$.

Jadi, agar titik $P(a, 1)$ terletak di dalam lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$, maka batasan nilai a adalah $-2 < a < 4$.

- b. Dengan menyubstitusikan titik $P(a, 1)$ ke persamaan lingkaran $L \equiv (x + 3)^2 + (y - 3)^2 - 13 = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} (a + 3)^2 + (1 - 3)^2 - 13 &= 0 \\ a^2 + 6a &= 0 \\ a(a + 6) &= 0. \end{aligned}$$

Syarat titik $P(a, 1)$ berada di luar lingkaran adalah kuasa titik $P(a, 1)$ bernilai positif, maka $a^2 + 6a > 0$. Dengan menggunakan cara yang sama pada soal nomor 2(a), diperoleh $a < -6$ atau $a > 0$.

Jadi, agar titik $P(a, 1)$ terletak di luar lingkaran $L \equiv (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 13$, maka batasan nilai a adalah $a < -6$ atau $a > 0$.

3. Dengan menyubstitusikan titik $A(2t, -t)$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 2 = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} (2t)^2 + (-t)^2 + 2(2t) + 8(-t) - 2 &= 0 \\ 5t^2 - 4t - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Syarat titik $A(2t, -t)$ terletak pada lingkaran adalah kuasa titik $A(2t, -t)$ bernilai 0. Dengan menggunakan rumus abc, diperoleh $t = \frac{2 - \sqrt{14}}{5}$ atau $t = \frac{2 + \sqrt{14}}{5}$.

4. a. Persamaan garis $x + y = 2$ dapat dinyatakan dengan $y = 2 - x$, sehingga dengan menyubstitusikannya ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 + (2 - x)^2 + 4x - (2 - x) + 1 &= 0 \\ 2x^2 + x + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Dari persamaan kuadrat $2x^2 + x + 3 = 0$, diperoleh

$$a = 2, b = 1, \text{ dan } c = 3.$$

Dengan menyubstitusikan nilai a , b , dan c ke rumus diskriminan, maka

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(2)(3) = -23.$$

Diskriminan yang diperoleh adalah $D < 0$ sehingga garis $g: x + y = 2$ tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$.

- b. Dengan menyubstitusikan $x = 0$ pada persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$, diperoleh

$$y^2 - y + 1 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat $y^2 - y + 1 = 0$, diperoleh

$$a = 1, b = -1, \text{ dan } c = 1.$$

Dengan menyubstitusikan nilai a , b , dan c ke rumus diskriminan, maka

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3.$$

Diskriminan yang diperoleh adalah $D < 0$ sehingga garis $k: x = 0$ tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$.

5. Dengan menyubstitusikan $y = kx + 1$ ke persamaan lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, diperoleh

$$(x-1)^2 + ((kx+1)+1)^2 = 4$$

$$(1+k^2)x^2 + (-2+4k)x + 1 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat ini, diperoleh

$$a = 1 + k^2, \quad b = -2 + 4k, \quad \text{dan} \quad c = 1.$$

Dengan menyubstitusikan nilai a , b , dan c ke rumus diskriminan, maka

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-2 + 4k)^2 - 4(1 + k^2)(1) \\ &= 4 - 16k + 16k^2 - 4 - 4k^2 \\ &= 12k^2 - 16k. \end{aligned}$$

Suatu garis tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran apabila diperoleh nilai diskriminan kurang dari 0 ($D < 0$), maka

$$\begin{aligned} 12k^2 - 16k &< 0 \\ 3k^2 - 4k &< 0 \\ k(3k - 4) &< 0. \end{aligned}$$

Dengan bantuan garis bilangan, diperoleh himpunan penyelesaian $\{0 < k < \frac{4}{3}\}$. Jadi, syarat k agar garis $y = kx + 1$ tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ adalah $0 < k < \frac{4}{3}$.

6. Garis $px + qy = r^2$ dapat dinyatakan dengan $y = \frac{r^2 - px}{q}$. Dengan menyubstitusikan $y = \frac{r^2 - px}{q}$ ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{r^2 - px}{q}\right)^2 &= r^2 \\ x^2 + \frac{r^4 - 2pr^2x + p^2x^2}{q^2} &= r^2 \\ \left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right)x^2 - \frac{2pr^2}{q^2}x + \left(\frac{r^4}{q^2} - r^2\right) &= 0. \end{aligned}$$

Dari persamaan ini, diperoleh

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= \left(-\frac{2pr^2}{q^2}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right)\left(\frac{r^4}{q^2} - r^2\right) \\ &= 4r^2 + \frac{4r^2}{q^2}(p^2 - r^2). \end{aligned}$$

Karena titik $N(p, q)$ berada di luar lingkaran, maka $p^2 > r^2$, sehingga

$$p^2 - r^2 > 0.$$

Akibatnya, $4r^2 + \frac{4r^2}{q^2}(p^2 - r^2) = D$, dengan $D > 0$. Dengan demikian, persamaan garis $g: px + qy - r^2$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ di dua titik berbeda.

7. Dengan menyubstitusikan $y = -x + p$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 + (-x + p)^2 - 2x - 4(-x + p) + 3 &= 0 \\ 2x^2 + (2 - 2p)x + p^2 - 4p + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Dari persamaan kuadrat ini, diperoleh

$$a = 2, b = 2 - 2p, \text{ dan } c = p^2 - 4p + 3.$$

Dengan menyubstitusikan nilai a , b , dan c ke rumus diskriminan, maka

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (2 - 2p)^2 - 4(2)(p^2 - 4p + 3) \\ &= -4p^2 + 24p - 20. \end{aligned}$$

Suatu garis menyinggung lingkaran apabila diperoleh nilai diskriminan sama dengan nol ($D = 0$), sehingga

$$\begin{aligned} -4p^2 + 24p - 20 &= 0 \\ p^2 - 6p + 5 &= 0 \\ (p - 1)(p - 5) &= 0, \end{aligned}$$

diperoleh $p_1 = 1$ atau $p_2 = 5$.

Jadi, syarat p agar garis $y = -x + p$ menyinggung lingkaran L adalah $p = 1$ atau $p = 5$.

Latihan Soal Persamaan Garis Singgung Lingkaran

1. a. Langkah pertama adalah melihat kedudukan titik $A(2, 2)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 3x + 4y - 10 = 0$. Dengan menyubstitusikan titik $A(2, 2)$ ke persamaan lingkaran L , diperoleh

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 10 = (2)^2 + (2)^2 - 3(2) + 4(2) - 10 = 0.$$

Karena titik $A(2, 2)$ berada pada lingkaran, maka dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh

$$xx_1 + yy_1 - 3\frac{(x+x_1)}{2} + 4\frac{(y+y_1)}{2} - 10 = 0$$

$$2x + 2y - 3\frac{(x+2)}{2} + 4\frac{(y+2)}{2} - 10 = 0$$

$$\frac{1}{2}x + 4y - 9 = 0.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $\frac{1}{2}x + 4y - 9 = 0$.

- b. Dengan cara yang sama pada bagian a, diperoleh bahwa kedudukan titik $D(5, -2)$ berada di dalam lingkaran sehingga titik tersebut tidak memiliki garis singgung.

2. Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + 1\frac{1}{2}\right)^2 - 16 = 0$.

- a. Dari persamaan lingkaran L , diketahui

$$a = \frac{1}{2}, b = -1\frac{1}{2}, r = 4, \text{ dan kemiringan } m = 2,$$

sehingga

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$y + 1\frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \pm 4\sqrt{2^2 + 1}$$

$$y = 2x - \frac{5}{2} \pm 4\sqrt{5}.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y = 2x - \frac{5}{2} + 4\sqrt{5}$ dan $y = 2x - \frac{5}{2} - 4\sqrt{5}$.

- b. Sudut yang terbentuk adalah 60° terhadap sumbu- y positif, maka $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Dengan demikian, kemiringan garis singgungnya adalah $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Dengan menyubstitusikan $a = \frac{1}{2}$, $b = -1\frac{1}{2}$, $r = 4$, dan kemiringan $m = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, diperoleh

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$y + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \pm 4\sqrt{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 + 1}$$

$$y + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \pm \frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{8}{3}\sqrt{3}$ dan $y + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3}\sqrt{3}$.

3. Misalkan persamaan lingkaran adalah $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Langkah pertama adalah menentukan jarak garis $l: 3x - 4y + 7 = 0$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan titik pusat $P(2, -3)$, yaitu

$$\begin{aligned} r &= \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(3)(2) + (-4)(-3) + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{|6 + 12 + 7|}{\sqrt{25}} = 5. \end{aligned}$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah $L \equiv (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

4. Persamaan $y + 2x = c$ ekuivalen dengan persamaan $y = -2x + c$. Substitusikan persamaan ini ke persamaan $L \equiv x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 + (-2x + c)^2 - 4x - (-2x + c) + 3 &= 0 \\ x^2 + 4x^2 - 4xc + c^2 - 4x + 2x - c + 3 &= 0 \\ 5x^2 - (4c + 2)x + c^2 - c + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Syarat bahwa garis $y + 2x = c$ menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$ adalah nilai diskriminan $D = 0$ sehingga

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ -(4c + 2)^2 - 4(5)(c^2 - c + 3) &= 0 \\ -4c^2 + 36c - 56 &= 0 \\ c^2 - 9c + 14 &= 0. \end{aligned}$$

Dengan memfaktorkan persamaan di atas, diperoleh $c = 2$ atau $c = 7$.

Jadi, nilai c agar garis $y + 2x = c$ menyinggung lingkaran L adalah $c = 2$ atau $c = 7$.

5. Pada persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - Ax - 10y + 4 = 0$, maka

$$A = -A, B = -10, \text{ dan } C = 4.$$

Pusat lingkaran L ini terletak di titik $\left(\frac{A}{2}, 5\right)$ sehingga

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} = \sqrt{\left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{A^2}{4} + 21}.$$

Karena lingkaran L menyinggung sumbu- x , jarak titik pusat lingkaran L ke sumbu- x , yaitu 5, merupakan jari-jari lingkaran L . Dengan menyubstitusikan $r = 5$ ke persamaan $r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + 21}$, diperoleh

$$5 = \sqrt{\frac{A^2}{4} + 21}$$

$$25 = \frac{A^2}{4} + 21$$

$$\frac{A^2}{4} = 4$$

$$A = \pm 4.$$

Jadi, nilai A adalah 4 atau -4 .

6. Untuk membuktikan bahwa titik $(6, -8)$ terletak pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 100$, perlu ditunjukkan bahwa nilai kuasa titik $(6, -8)$ adalah nol, maka

$$K_{(6, -8)} = x^2 + y^2 - 100 = 6^2 + (-8)^2 - 100 = 0.$$

Nilai kuasa titiknya nol sehingga titik $(6, -8)$ terbukti berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 100$. Selanjutnya, persamaan garis singgung lingkaran L di titik $(6, -8)$ adalah

$$xx_1 + yy_1 = 100$$

$$6x - 8y - 100 = 0.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $6x - 8y - 100 = 0$.

7. Misalkan titik singgung yang akan dicari adalah $(2, y)$. Titik ini terletak pada lingkaran L sehingga

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$$

$$(2)^2 + y^2 + 4(2) - 6y - 7 = 0$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0.$$

Dengan memfaktorkan persamaan di atas, diperoleh $y = 5$ atau $y = 1$. Jadi, titik singgungnya terletak pada $(2, 5)$ dan $(2, 1)$.

- Untuk titik $(2, 5)$.

Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh

$$xx_a + yy_a + \frac{4(x + x_a)}{2} - \frac{6(y + y_a)}{2} - 7 = 0$$

$$2x + 5y + 2(x + 2) - 3(y + 5) - 7 = 0$$

$$2x + y - 9 = 0.$$

- Untuk titik $(2, 1)$.

Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh

$$\begin{aligned}
 xx_a + yy_a + \frac{4(x+x_a)}{2} - \frac{6(y+y_a)}{2} - 7 &= 0 \\
 2x + y + 2(x+2) - 3(y+1) - 7 &= 0 \\
 2x - y - 3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $2x + y - 9 = 0$ dan $2x - y - 3 = 0$.

8. Misalkan titik singgung yang akan dicari adalah $(x, 4)$. Titik ini terletak pada lingkaran L sehingga

$$(x+4)^2 + (y-1)^2 = 34$$

$$(x+4)^2 + (4-1)^2 = 34$$

$$x+4 = \pm 5.$$

Dari persamaan $x+4 = \pm 5$, diperoleh $x = 1$ atau $x = -9$. Jadi, titik singgungnya terletak pada $(1, 4)$ dan $(-9, 4)$.

- Untuk titik $(1, 4)$.

Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh

$$(x+4)(1+4) + (y-1)(4-1) = 34$$

$$5(x+4) + 3(y-1) = 34$$

$$5x + 3y = 17.$$

- Untuk $(-9, 4)$.

Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh

$$(x+4)(-9+4) + (y-1)(4-1) = 34$$

$$(x+4)(-5) + (y-1)(3) = 34$$

$$-5x + 3y = 57.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $5x + 3y = 17$ dan $-5x + 3y = 57$.

9. Karena lingkaran $L \equiv (x-2q)^2 + (y+5)^2 - 4q^2 = 13$ menyinggung sumbu- x , maka $y = 0$. Dengan menyubstitusikan $y = 0$ ke persamaan lingkaran L , diperoleh

$$(x-2q)^2 + (y+5)^2 - 4q^2 = 13$$

$$(x-2q)^2 - 4q^2 + 12 = 0$$

$$x^2 - 4qx + 12 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat $x^2 - 4qx + 12 = 0$, diperoleh

$$a = 1, b = -4q, \text{ dan } c = 12.$$

Karena syarat kedudukan garis menyinggung lingkaran adalah nilai diskriminannya nol, maka

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ b^2 - 4ac &= 0 \\ (-4q)^2 - 4(1)(12) &= 0 \\ q &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Jadi, syarat agar lingkaran $L \equiv (x - 2q)^2 + (y + 5)^2 - 4q^2 = 13$ menyinggung sumbu- x adalah nilai $q_1 = \sqrt{3}$ atau $q_2 = -\sqrt{3}$.

► Untuk $q_1 = \sqrt{3}$.

Substitusikan $q_1 = \sqrt{3}$ ke persamaan $x^2 - 4qx + 12 = 0$ sehingga

$$x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0 \text{ atau } x = 2\sqrt{3}.$$

Jadi, titik singgungnya adalah $(2\sqrt{3}, 0)$.

► Untuk $q_2 = -\sqrt{3}$.

Substitusikan $q_2 = -\sqrt{3}$ ke persamaan $x^2 - 4qx + 12 = 0$ sehingga

$$x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 = 0 \text{ atau } x = -2\sqrt{3}.$$

Jadi, titik singgungnya adalah $(-2\sqrt{3}, 0)$.

10. Pada persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2px + q = 0$, diperoleh

$$A = -2p, B = 0, \text{ dan } C = q.$$

Pusat lingkaran berada pada titik $(x_p, y_p) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (p, 0)$.

Diketahui lingkaran L berjari-jari 2 dan menyinggung garis $x - y = 0$.

Dengan menggunakan jarak titik ke garis $x - y = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{|Ax_p + By_p + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ 2 &= \frac{|(1)(p) + (-1)(0) + 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \\ 2 &= \frac{|p|}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

maka $p = 2\sqrt{2}$ atau $p = -2\sqrt{2}$.

Jadi, nilai p adalah $2\sqrt{2}$ atau $-2\sqrt{2}$.

Uji Kompetensi Bab 1

1. Pada lingkaran $x^2 + y^2 - ax + 2ay + 1 = 0$, diperoleh

$$A = -a, B = 2a, \text{ dan } C = 1.$$

Dengan menyubstitusikan $r = 2$ pada $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$, diperoleh

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

$$2 = \sqrt{\frac{1}{4}(-a)^2 + \frac{1}{4}(2a)^2 - 1}$$

$$4 = \frac{1}{4}(a^2) + \frac{1}{4}(4a^2) - 1$$

$$5 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{4}$$

$$5 = \frac{5a^2}{4},$$

maka $a^2 = 4$ atau $a = \pm 2$.

Pada soal sudah ditentukan bahwa $a < 0$ sehingga dipilih nilai $a = -2$.

Dengan menyubstitusikan nilai $a = -2$, maka

$$A = -a = -(-2) = 2$$

$$\text{dan } B = 2a = 2(-2) = -4.$$

Misalkan pusat lingkaran adalah $P(x, y)$, maka

$$x = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(2) = -1$$

$$\text{dan } y = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}(-4) = 2.$$

Jadi, pusat lingkaran tersebut adalah $P(-1, 2)$.

2. Pada lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$, diperoleh

$$A = 8, B = -2, \text{ dan } C = -8.$$

Pusat lingkaran di titik $P(h, k)$ sehingga

$$h = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(8) = -4 \text{ dan } k = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}(-2) = 1.$$

Dengan menyubstitusikan $A = 8$, $B = -2$, dan $C = -8$ ke rumus jari-jari lingkaran, diperoleh

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}(8)^2 + \frac{1}{4}(2)^2 - (-8)}$$

$$= \sqrt{\frac{64}{4} + \frac{4}{4} + \frac{32}{4}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5.$$

Jadi, $r + k - h = 5 + 1 + 4 = 10$.

3. Dengan menyubstitusikan $(-2, 1)$ pada persamaan lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3py - 30 = 0$, diperoleh

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 3py - 30 = 0$$

$$2(-2)^2 + 2(1)^2 - 4(-2) + 3p(1) - 30 = 0$$

$$2(4) + 2(1) + 8 + 3p - 30 = 0$$

$$-12 + 3p = 0$$

$$3p = 12$$

$$p = 4.$$

Substitusikan nilai $p = 4$ pada persamaan lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3py - 30 = 0$ sehingga persamaan lingkaran yang melalui titik $(-2, 1)$ adalah

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 30 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0.$$

Misalkan titik pusatnya adalah $P(x, y)$, maka

$$x = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(-2) = 1 \text{ dan } y = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}(6) = -3,$$

sehingga titik pusatnya berada pada $P(1, -3)$.

Adapun jari-jari lingkaran tersebut adalah

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(-2)^2 + \frac{1}{4}(6)^2 + 15} = \sqrt{1 + 9 + 15} = 5.$$

Lingkaran lain memiliki jari-jari dua kali jari-jari lingkaran tersebut, tetapi sepusat, berarti jari-jarinya 10 dan titik pusatnya $P(1, -3)$. Jadi, persamaan lingkaran yang dicari adalah $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10^2$ atau $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 90 = 0$.

4. Karena pusat elips terletak pada titik $O(0, 0)$ dan salah satu fokus elips terletak pada titik $(0, 3)$, maka elips tersebut merupakan elips vertikal.

Panjang sumbu mayor elips tersebut sebesar 10 sehingga

$$a = 5 \text{ atau } a^2 = 25.$$

Dari salah satu titik fokus elips di titik $(0, 3)$, diperoleh nilai $c = 3$.

Dengan menyubstitusikan $a = 5$ dan $c = 3$ pada persamaan $b^2 = a^2 - c^2$, diperoleh $b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

Jadi, persamaan elips tersebut adalah $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

5. Dari persamaan elips $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, diperoleh

$$a = 5 \text{ dan } b = 4.$$

Panjang sumbu mayor adalah $2a = 2(5) = 10$ dan panjang sumbu minor adalah $2b = 2(4) = 8$.

6. Persamaan $L \equiv (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$ menunjukkan bahwa lingkaran L memiliki titik pusat $(4, 4)$ dan jari-jari $r = 4$.

Dengan menyubstitusikan persamaan garis $y = 4$ ke persamaan lingkaran, diperoleh

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + (y-4)^2 &= 16 \\(x-4)^2 &= 16 \\x-4 &= \pm 4.\end{aligned}$$

Dari persamaan $x-4 = \pm 4$, diperoleh

$$x_1 = 8 \text{ atau } x_2 = 0,$$

sehingga titik potong garis $y = 4$ terhadap lingkaran $L \equiv (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$ adalah $A(8, 4)$ dan $B(0, 4)$.

- Untuk titik $(8, 4)$

Dengan menggunakan pembagian adil, diperoleh

$$\begin{aligned}(x-4)(x_a-4) + (y-4)(y_a-4) &= 16 \\(x-4)(8-4) + (y-4)(4-4) &= 16 \\4x-16 &= 16 \text{ atau } x = 8.\end{aligned}$$

- Untuk titik $(0, 4)$

Dengan menggunakan pembagian adil, diperoleh

$$\begin{aligned}(x-4)(x_a-4) + (y-4)(y_a-4) &= 16 \\(x-4)(0-4) + (y-4)(4-4) &= 16 \\-4x+16 &= 16 \text{ atau } x = 0.\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $x = 8$ dan $x = 0$.

7. Persamaan $L \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ menunjukkan bahwa lingkaran L memiliki titik pusat $(-5, 3)$ dan jari-jari $r = 6$.

Misalkan persamaan garis yang membagi lingkaran menjadi dua bagian sama besar adalah $ax + by + c = 0$. Persamaan garis ini sejajar dengan garis $x + 2y - 5 = 0$ sehingga diperoleh

$$a = 1 \text{ dan } b = 2.$$

Untuk menentukan nilai c , titik pusat lingkaran L disubstitusikan ke persamaan $ax + by + c = 0$ sehingga

$$\begin{aligned}
 ax + by + c &= 0 \\
 (1)(-5) + (2)(3) + c &= 0 \\
 c &= -1.
 \end{aligned}$$

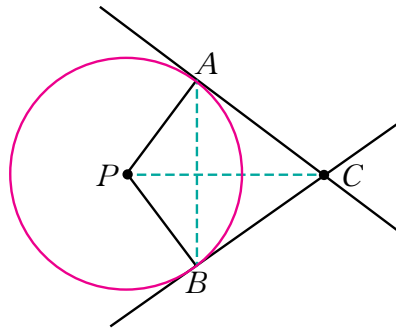
Jadi, persamaan garisnya adalah $x + 2y - 1 = 0$.

8. Persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$ menunjukkan bahwa lingkaran ini berpusat di titik $P(3, 1)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{10 - k}$.

Garis-garis singgung yang melalui titik $C(8, 1)$ ke lingkaran L berpotongan di titik A atau titik B , maka panjang garis dari titik $C(8, 1)$ ke lingkaran L adalah $\sqrt{(PC)^2 - r^2}$ dan PC merupakan diagonal layang-layang $PACB$.

$$\text{Panjang } PC = \sqrt{(8 - 3)^2 - (1 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Karena $PACB$ membentuk layang-layang dengan diagonal PC , maka dapat diasumsikan bahwa garis AB tegak lurus ke PC . Garis AB merupakan garis polar dengan persamaan garis polar sebagai berikut.



Gambar 1.8 Sketsa Lingkaran dan Layang-Layang $PACB$

$$\begin{aligned}
 8x + y - \frac{6}{2}(x + 8) - \frac{2}{2}(y + 1) + k &= 0 \\
 5x - 25 + k &= 0.
 \end{aligned}$$

Luas layang-layang $PACB$ adalah 12 sehingga

$$\begin{aligned}
 L &= 12 \\
 \frac{(PC \times AB)}{2} &= 12 \\
 \frac{(5 \times AB)}{2} &= 12, \text{ maka } AB = \frac{24}{5}.
 \end{aligned}$$

Jarak titik pusat $P(3, 1)$ ke garis polar AB dengan persamaan $5x - 25 + k = 0$ dapat dihitung dengan rumus:

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\
 &= \frac{|(5)(3) + 0 - 25 + k|}{\sqrt{5^2 + 0^2}} \\
 &= \frac{|k - 10|}{5}
 \end{aligned}$$

Selain garis polar, garis AB merupakan tali busur. Kita dapat menentukan nilai k menggunakan Teorema Pythagoras.

$$\begin{aligned} r^2 - d^2 &= \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \\ (\sqrt{10-k})^2 - \left(\frac{|k-10|}{5}\right)^2 &= \left(\frac{12}{5}\right)^2 \\ (10-k) - \left(\frac{k^2-20k+100}{25}\right) &= \frac{144}{25} \\ k^2 + 5k - 6 &= 0 \\ (k-1)(k+6) &= 0, \end{aligned}$$

diperoleh $k = 1$ atau $k = -6$.

Jadi, nilai k adalah 1 atau -6 .

9. Kedua fokus elips berada pada sumbu- x sehingga elips tersebut berbentuk horizontal.

Panjang sumbu mayor adalah 10 sehingga $a = \frac{10}{2} = 5$.

Panjang sumbu minor adalah 8 sehingga $b = \frac{8}{2} = 4$.

Karena elips menyinggung sumbu- y , jarak pusat elips ke sumbu- y adalah $a = 5$. Dengan demikian, pusat elips terletak pada titik $(5, 0)$ atau $(-5, 0)$.

Bentuk umum persamaan elips horizontal jika pusat $p(m, n)$ adalah

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

- ▶ Jika pusat elips terletak pada titik $(5, 0)$, agar elips menyinggung sumbu- y , maka salah satu titik puncaknya di $x = 0$. Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-0)^2}{16} = 1$ atau $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
- ▶ Jika pusat elips terletak pada titik $(-5, 0)$, agar elips menyinggung sumbu- y , maka salah satu titik puncaknya di $x = 0$. Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{(y-0)^2}{16} = 1$ atau $\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

10. Untuk memutuskan apakah kedua radio tersebut saling tumpang tindih maka perlu ditunjukkan bahwa kedua lingkaran tersebut (batas daerah siaran) saling berpotongan. Syarat dua lingkaran saling berpotongan adalah

$$R + r < d,$$

dengan R adalah jari-jari lingkaran pertama, r adalah jari-jari lingkaran kedua, dan d adalah jarak kedua pusat lingkaran.

- ▶ Batas daerah siaran stasiun radio A memiliki persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$. Persamaan lingkaran ini memiliki pusat di titik $(-4, 3)$ dengan jari-jari 5 km.
- ▶ Batas daerah siaran stasiun radio B memiliki persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$. Persamaan lingkaran ini memiliki pusat di titik $(5, -2)$ dengan jari-jari $\sqrt{29}$ km (setara dengan 5,39 km).

Jarak pusat radio A dengan radio B adalah

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(5 - (-4))^2 + ((-2) - 3)^2} \\ &= \sqrt{9^2 + (-5)^2} = \sqrt{106} \text{ km (setara dengan 10,30 km).} \end{aligned}$$

Karena panjang d lebih kecil daripada jarak kedua pusat lingkaran $R + r = 5 + 5,39 = 10,39$, dapat disimpulkan bahwa kedua lingkaran saling berpotongan. Dengan demikian, ada daerah siaran stasiun radio A dan B yang saling tumpang tindih sehingga kedua stasiun radio tersebut harus menggunakan frekuensi yang berbeda.

I. Tindak Lanjut

Guru perlu memberikan perlakuan berbeda berdasarkan capaian peserta didik sebagai tindak lanjut dari kegiatan pembelajaran, dengan tetap berpegang pada prinsip Pembelajaran Mendalam (berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan).

Guru dapat memberikan tantangan tambahan kepada peserta didik yang telah memenuhi tujuan pembelajaran dalam bentuk pertanyaan yang lebih kompleks dan HOTS (*Higher Order Thinking Skills*). Melalui keingintahuan terhadap pengetahuan dan diskusi untuk pengalaman baru, peserta didik didorong untuk merefleksikan diri tentang proses berpikir mereka, yang meningkatkan kesadaran mereka terhadap teknik pemecahan masalah yang cermat (*berkesadaran*). Guru dapat meminta peserta didik untuk menghubungkan konsep lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran dengan aktivitas sehari-hari agar pembelajarannya menjadi lebih bermakna.

Tindak lanjut bagi peserta didik yang belum memenuhi tujuan pembelajaran adalah melalui instruksi yang lebih terstruktur dan mendukung untuk meningkatkan pemahaman mendasar. Peserta didik didorong untuk secara aktif mengenali kesulitan yang dihadapi dan diberikan tindakan

sederhana untuk diikuti. Selanjutnya, guru menghubungkan materi lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran dengan pengalaman langsung untuk membantu peserta didik memahami materi tersebut dalam konteks yang autentik (*bermakna*).

Semua peserta didik, baik yang sedang dalam proses belajar maupun yang sudah memahami, dapat memperoleh kompetensi matematika secara menyeluruh dengan cara yang relevan, penuh perhatian, dan menyenangkan menggunakan pendekatan yang dibedakan berdasarkan Pembelajaran Mendalam.

J. Refleksi

Pencapaian Pembelajaran Mendalam sebagian besar didukung oleh refleksi pembelajaran. Refleksi memungkinkan guru dan peserta didik untuk secara aktif (*berkesadaran*) menilai proses pembelajaran, memahami relevansi konsep dengan kehidupan sehari-hari (*bermakna*), dan mengidentifikasi pengalaman belajar yang menyenangkan dan menginspirasi (*menggembirakan*). Selain mendorong kemajuan berkelanjutan dalam memahami konsep matematika secara utuh dan kontekstual, refleksi ini berupaya untuk meningkatkan kesadaran akan pencapaian dan masalah pembelajaran.

1. Refleksi untuk Peserta Didik

Selain pada Buku Siswa, beberapa pertanyaan refleksi pada Tabel 1.7 dapat digunakan untuk mengetahui kemampuan yang dimiliki oleh peserta didik pada materi lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran. Begitu juga fungsi bagi peserta didik dan tindak lanjut bagi guru dapat dilihat pada Tabel 1.7.

Tabel 1.7 Refleksi untuk Peserta Didik

Tujuan Refleksi	Contoh Pertanyaan untuk Peserta Didik	Fungsi bagi Peserta Didik	Tindak Lanjut Guru
Berkesadaran Menyadari proses dan strategi pembelajaran	Bagian mana dari materi lingkaran, elips, dan persamaan garis singgung yang paling menantang bagiku?	• Melatih meta kognisi. • Mengenali gaya belajar sendiri.	• Menyediakan variasi strategi (peta konsep, kartu rumus, atau simulasi). • Menugaskan teman tutor untuk berbagi teknik yang efektif.

Tujuan Refleksi	Contoh Pertanyaan untuk Peserta Didik	Fungsi bagi Peserta Didik	Tindak Lanjut Guru
Bermakna Mengaitkan materi dengan konteks nyata	Di mana aku pernah melihat konsep persamaan garis singgung lingkaran dalam kehidupan sehari-hari?	- Menumbuhkan relevansi. - Memperkuat transfer pengetahuan.	Mendesain tugas proyek menggunakan bantuan GeoGebra.
Menggembirakan Mengungkap emosi dan motivasi belajar	Momen apa yang paling menggembirakan saat belajar lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran?	- Menyuarakan kebutuhan afektif. - Meningkatkan rasa kepemilikan.	Menambahkan elemen gamifikasi, kuis berhadiah, atau permainan konsep.

2. Refleksi untuk Guru

Refleksi guru merupakan kunci Pembelajaran Mendalam karena guru akan menilai *praktiknya* secara berkesadaran (pengajaran berkesadaran), kemudian memastikan pembelajaran bermakna (pengajaran bermakna) dan menggembirakan bagi peserta didik (pengajaran menggembirakan).

Tabel 1.8 Refleksi untuk Guru

Ranah	Pertanyaan Reflektif	Tindak Lanjut Konkret
Perencanaan	Apakah tujuan, aktivitas, asesmen lingkaran, elips, dan persamaan garis singgung sudah selaras membangun <i>deep learning</i> ?	Melakukan revisi RPP agar HOTS dan konteks nyata lebih ditekankan.
Pelaksanaan	- Bagaimana saya mempraktikkan pembelajaran berkesadaran di bab ini? - Tahapan mana yang sulit untuk membuat suasana menggembirakan?	- Menetapkan <i>mindful pause</i> 2 menit sebelum latihan sulit. - Menambah kegiatan <i>ice breaking</i> (visual) sebelum diskusi.
Respons peserta didik	30% peserta didik masih tidak berminat; apa yang harus diperbaiki?	Survei minat peserta didik, kemudian kontekstualisasikan soal ke hobi peserta didik.
Profesionalisme	Bagian mana yang perlu saya perdalam agar penjelasan lebih sederhana?	Bergabung dengan PLC (komunitas pembelajaran profesional) seperti MGMP.

3. Alur Menindaklanjuti Hasil Refleksi

Langkah awal dalam menindaklanjuti hasil refleksi adalah dengan mengumpulkan data refleksi, misalnya melalui jurnal belajar peserta didik. Selanjutnya, guru perlu mengidentifikasi pola atau tantangan yang muncul, seperti kesulitan dalam memahami konsep, penggunaan strategi belajar yang kurang tepat, atau rendahnya motivasi belajar. Berdasarkan identifikasi tersebut, guru dapat merancang intervensi yang sesuai, seperti memberikan *mini lesson*, pendampingan melalui tutor sebaya, atau merancang proyek kontekstual. Intervensi ini kemudian diimplementasikan pada pertemuan berikutnya sesuai dengan kebutuhan peserta didik. Setelah itu, guru melakukan evaluasi efektivitas intervensi dengan membandingkan hasil belajar sebelum dan sesudah perlakuan. Terakhir, guru melakukan refleksi ulang untuk meninjau apakah strategi yang diterapkan sudah tepat atau masih perlu diperbaiki dan disesuaikan agar pembelajaran semakin optimal.

K. Sumber Belajar

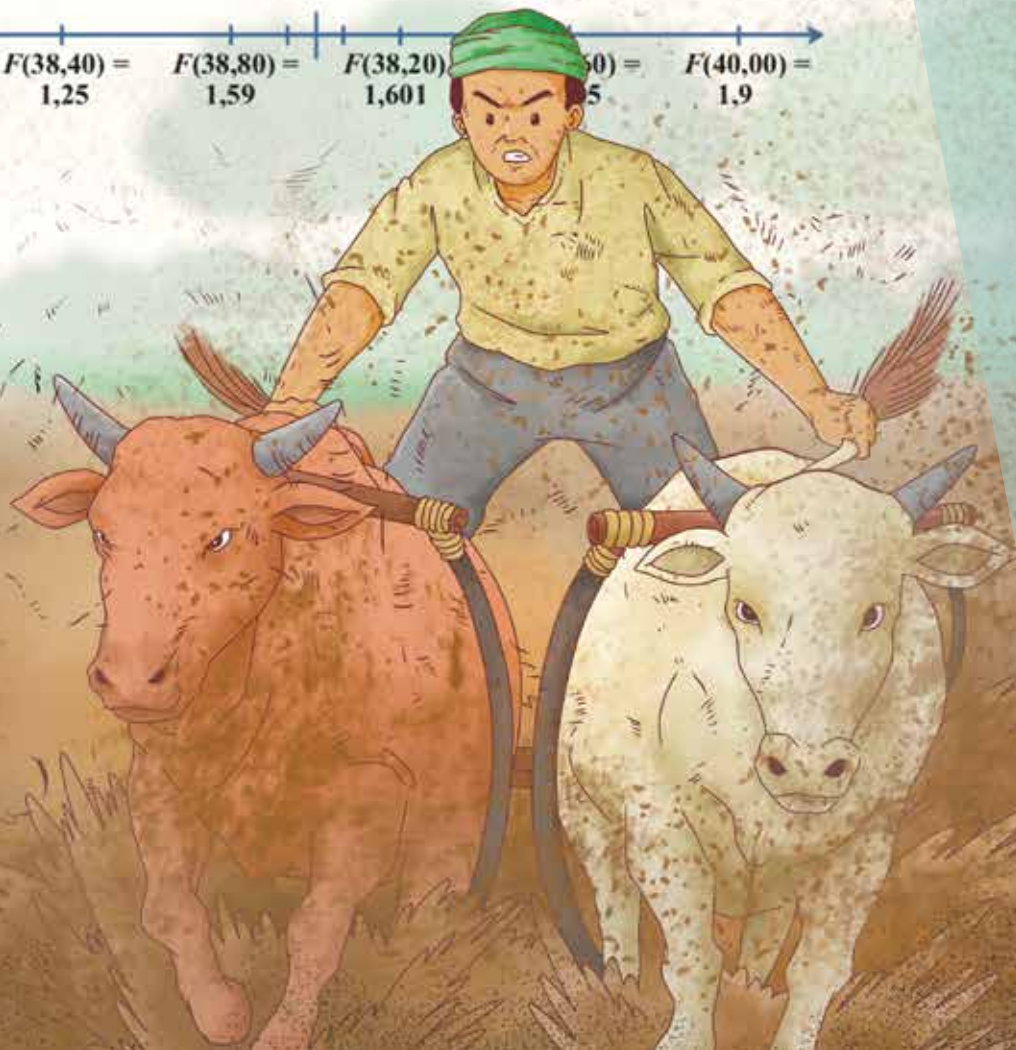
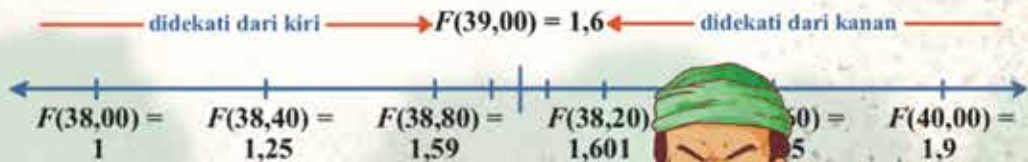
Berikut ini daftar buku atau modul yang dapat dijadikan sebagai alternatif referensi dalam kegiatan pembelajaran Bab 1.

1. Achmad, A. *Modul Pembelajaran SMA: Matematika Peminatan*. Jakarta: Kemdikbud, 2020.
2. Adam, L.J. dan P.A. White. *Analytic Geometry and Calculus*. New York: Oxford University Press, 1968.
3. Danuri, M. *Pembelajaran Lingkaran SMA dengan Geometri Analitik*. Yogyakarta: P4TK Matematika, 2008.
4. Mauladaniyati, R. dan Widodo. *Geometri Analitik Ruang*. Yogyakarta: Matematika, 2020.
5. Pradyumnati, R.M. *Irisan Kerucut: Pengayaan Matematika SMA*. Lampung: UIN Raden Intan.
6. Rizki, N.A. *Geometri Analitik*. Samarinda: Universitas Mulawarman, 2018.
7. Sunardi dan Erfan Yudianto. *Teori dan Soal-soal Geometri Analitika Bidang Jember*: Unej, 2015.
8. Sukmadewi, T.S. *Modul Matematika Umum Kelas XI KD 3.10*. Jakarta: Direktorat Jenderal PAUD, DIKDAS, dan DIKMEN, 2020.
9. Yunita, A. dan Hamdunah. *Modul Geometri Analitik*. Padang: Rumahkayu Pustaka Utama, 2017.

Panduan Khusus

Bab 2

Turunan Fungsi



A. Pendahuluan

1. Tujuan Pembelajaran dan Indikator

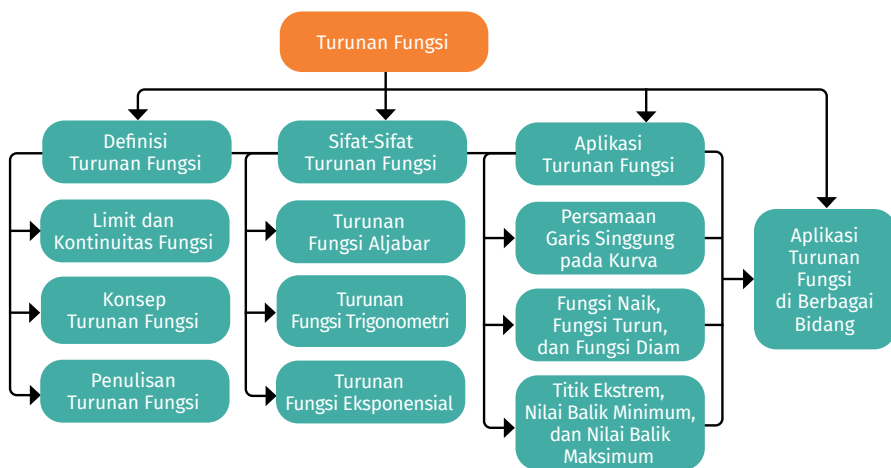
Guru dapat mempelajari tujuan pembelajaran dan indikator Bab 2 Buku Siswa pada tabel berikut.

Tabel 2.1 Tujuan Pembelajaran dan Indikator Bab 2

Tujuan Pembelajaran	Indikator
Peserta didik mampu: 1. memahami konsep limit fungsi dan turunan fungsi beserta sifat-sifatnya; 2. menentukan limit fungsi dan turunan berbagai fungsi kontinu; serta 3. menggunakan konsep limit fungsi dan turunan fungsi dalam aplikasi turunan.	Peserta didik mampu: 1. menjelaskan definisi turunan dengan pendekatan limit secara geometris (gradien garis singgung) dan fisis (laju perubahan sesaat) turunan; 2. menentukan turunan fungsi aljabar, fungsi trigonometri, dan fungsi eksponensial; 3. menentukan gradien dan persamaan garis singgung kurva; 4. menentukan keadaan suatu fungsi naik, fungsi turun, dan fungsi diam; 5. menemukan titik ekstrem, nilai balik maksimum, dan nilai balik minimum fungsi beserta intervalnya; serta 6. menyelesaikan masalah di berbagai bidang ilmu menggunakan aturan turunan maupun uji turunan pertama dan kedua.

2. Peta Konsep

Gambar 2.1 merupakan peta konsep materi Turunan Fungsi pada Bab 2 Buku Siswa.



Gambar 2.1 Peta Konsep Bab 2 Buku Siswa

Materi turunan memiliki keterkaitan dengan materi integral pada Bab 3. Materi ini juga memiliki keterkaitan dengan persamaan garis singgung yang pernah dipelajari peserta didik di Bab 1, tetapi penyelesaiannya pada Bab 2 ini menggunakan pendekatan turunan fungsi. Aplikasi turunan fungsi tidak terbatas hanya di dalam matematika, tetapi juga dapat menjadi alternatif penyelesaian masalah di beberapa bidang kehidupan, seperti Ekonomi dan Sains.

3. Saran Periode/Waktu Pembelajaran

Alokasi waktu yang disarankan untuk mempelajari materi Bab 2 adalah 30 JP. Guru dapat mengatur alokasi waktu tersebut secara efektif agar proses pembelajaran berjalan lancar dan tujuan pembelajaran tercapai.

B. Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Dalam matematika, turunan adalah konsep fundamental dalam kalkulus yang mengukur bagaimana suatu fungsi berubah seiring dengan perubahan inputnya. Secara intuitif, turunan dapat diartikan sebagai laju perubahan sesaat atau kemiringan garis singgung suatu kurva pada titik tertentu. Untuk memahami dan menguasai konsep turunan, terdapat beberapa konsep dan keterampilan prasyarat yang harus dikuasai terlebih dahulu, yaitu sebagai berikut.

1. Fungsi

Pada dasarnya turunan adalah konsep fundamental dalam mengukur bagaimana suatu fungsi berubah seiring dengan perubahan inputnya. Artinya, fungsi merupakan objek utama dalam turunan. Oleh karena itu, peserta didik diharapkan memahami definisi fungsi, jenis-jenis fungsi dasar (aljabar dan trigonometri), serta operasi pada fungsi sebagai konsep prasyarat sebelum mempelajari turunan fungsi.

2. Limit Fungsi

Secara intuitif, turunan dapat diartikan sebagai laju perubahan sesaat yang dipahami sebagai kecepatan suatu kuantitas yang berubah pada titik atau waktu tertentu. Limit membantu peserta didik dalam melihat perubahan yang terjadi pada suatu fungsi tepat di titik tertentu. Artinya, turunan

adalah hasil dari proses limit. Oleh karena itu, peserta didik diharapkan memahami konsep limit dan sifat-sifat limit sebagai konsep prasyarat sebelum mempelajari turunan fungsi.

3. Aljabar

Operasi aljabar dasar, aturan dan sifat-sifat pangkat dan akar, pemfaktoran, penyelesaian persamaan, serta manipulasi aljabar diperlukan dalam turunan.

4. Geometri Analitik

Turunan berfungsi menganalisis sifat-sifat lokal dari sejumlah objek geometri, yaitu untuk menentukan gradien atau kemiringan garis singgung pada suatu kurva di titik tertentu, mengidentifikasi titik ekstrem (maksimum dan minimum lokal) yang merepresentasikan puncak atau lembah kurva, serta menganalisis kecekungan dan titik belok yang menggambarkan perubahan orientasi kelengkungan kurva. Geometri analitik menyediakan kerangka kerja untuk merepresentasikan objek geometri, seperti garis dan kurva, melalui persamaan aljabar dalam sistem koordinat. Artinya, geometri analitik dibutuhkan untuk merepresentasikan objek-objek geometri secara aljabar menggunakan sistem koordinat, dalam turunan untuk mempelajari sifat-sifat lokal dari objek-objek tersebut, seperti kemiringan, laju perubahan, dan kelengkungan. Oleh karena itu, peserta didik diharapkan memahami geometri analitik sebagai konsep prasyarat sebelum mempelajari turunan fungsi.

5. Pemahaman Kontekstual Matematika dalam Dunia Nyata

Pada bagian penerapan turunan, peserta didik perlu memiliki keterampilan awal menganalisis persoalan kontekstual dan menerjemahkannya ke dalam model matematika. Kemampuan ini akan mempermudah mereka memahami penggunaan turunan di berbagai bidang.

C. Kerangka Pembelajaran

Kerangka pembelajaran untuk materi pada Bab 2 ini berdasarkan empat dimensi utama, yaitu praktik pedagogis, kemitraan pembelajaran, lingkungan pembelajaran, dan pemanfaatan digital. Alternatif kerangka pembelajaran

ini diharapkan dapat menciptakan pengalaman belajar yang mendalam, kontekstual, dan bermakna bagi peserta didik dalam memahami konsep turunan fungsi.

Tabel 2.2 Kerangka Pembelajaran pada Materi Turunan Fungsi

Kerangka Pembelajaran	Deskripsi
Praktik Pedagogis	Model pembelajaran: <i>Problem-Based Learning.</i> Strategi pembelajaran: • Induktif dan eksplorasi, dimulai dari masalah kontekstual limit fungsi dalam Pacu Jawi untuk membangun pemahaman tentang turunan sebagai laju perubahan sesaat yang dipahami sebagai kecepatan suatu kuantitas yang berubah pada titik atau waktu tertentu. • Diskusi kelompok kecil untuk melakukan analisis dan membuat simpulan. • Refleksi individu. Asesmen: • Formatif: latihan soal dalam kegiatan Ayo Mencoba dan latihan soal pada akhir setiap subbab. • Sumatif: Uji Kompetensi Bab 2.
Kemitraan Pembelajaran	Kolaborasi: • <i>Peer teaching</i>: peserta didik saling menjelaskan konsep turunan fungsi. • Kontrak belajar: peserta didik menyepakati target pembelajaran. • Kerja kelompok: bekerja sama dalam kelompok kecil untuk menyelesaikan permasalahan matematika. Kegiatan ini bertujuan meningkatkan pemahaman konsep, keterampilan berpikir kritis, serta kemampuan berkomunikasi dan bekerja sama. • Diskusi soal: peserta didik membahas dan menyelesaikan soal-soal matematika. • Interdisipliner: aplikasi konsep turunan dalam menyelesaikan permasalahan di berbagai bidang ilmu. Peran guru: • Fasilitator dan pengarah eksplorasi. • Pemberi umpan balik reflektif.

Kerangka Pembelajaran	Deskripsi
Lingkungan Pembelajaran	Fisik: Visualisasi dan manipulasi konsep abstrak dengan alat bantu, seperti grafik fungsi, model 3D area di bawah kurva, atau animasi laju perubahan. Psikososial: • Kelas yang mendorong rasa ingin tahu. • Kelas yang mendorong kebebasan bertanya dan mencoba. • Kesalahan dihargai sebagai bagian dari proses belajar. • Diskusi terbuka untuk mengeksplorasi ide.
Pemanfaatan Digital	Alat dan platform: • GeoGebra: menampilkan grafik fungsi dalam menentukan tingkah laku kurva secara dinamis. • Photomath: membantu pengecekan jawaban. • YouTube: memberikan kesempatan untuk mempelajari materi turunan secara mandiri.

D. Apersepsi

Pada bagian apersepsi di Buku Siswa, peserta didik dikenalkan dengan fakta bahwa Indonesia termasuk dalam empat besar produsen sepatu dunia pada tahun 2024 dengan produksi mencapai 1,41 miliar pasang sepatu per tahun. Narasi ini menekankan bagaimana perusahaan menggunakan fungsi dalam RAPB untuk memprediksi produksi dan keuntungan, yang kemudian diarahkan melalui pertanyaan pemantik seperti “*Bagaimanakah fungsi tersebut dapat memprediksi elemen-elemen dalam RAPB?*”.

Guru dapat memperluas konteks ini dengan mengaitkan pada pengalaman sehari-hari maupun budaya lokal, misalnya Pacu Jawi, untuk menumbuhkan kesadaran awal peserta didik tentang adanya hubungan antara laju perubahan rata-rata dan laju perubahan sesaat.

Melalui pertanyaan kontekstual, analisis tabel, dan kurva produksi di Buku Siswa, guru menuntun peserta didik dari pemahaman awal (*prastruktural-unistruktural*) menuju pemahaman mendalam (*relasional-extended abstract*) sesuai dengan pendekatan *Deep Learning* dan Taksonomi SOLO. Peserta didik tidak hanya mempelajari turunan sebagai proses komputasi, tetapi juga

memahami maknanya dalam memprediksi keuntungan, merancang strategi produksi, hingga mempertimbangkan pengaruh pajak dan subsidi. Apersepsi ditutup dengan kalimat motivasi, “*Hari ini kita akan belajar bagaimana matematika, khususnya turunan fungsi, membantu memahami dan mengelola fenomena nyata seperti produksi sepatu dan tradisi Pacu Jawi. Apakah kalian siap?*”

E. **Formatif Awal**

Pertanyaan kontekstual yang sangat relevan dengan pengalaman peserta didik dapat digunakan oleh guru untuk melakukan penilaian awal sebelum dimulainya pembelajaran turunan. Contoh pertanyaannya sebagai berikut.

Contoh Tes Formatif Awal

- ▶ Pernahkah kalian melihat proses produksi sepatu di sebuah pabrik?
- ▶ Jika produksi tiap jamnya berubah-ubah, bagaimana kalian tahu berapa produksi yang tepat di waktu tertentu sehingga pabrik memperoleh keuntungan?

Kedua pertanyaan tersebut bertujuan menilai peserta didik pada tingkat *prastruktural* dan *unistruktural*, yaitu apakah mereka memiliki pengalaman atau pemahaman awal terkait hubungan antara tingkat produksi dan keuntungan meskipun belum mengaitkan konsep-konsep tersebut secara matematis.

Untuk mengidentifikasi peserta didik pada tahap *multistruktural*, guru dapat menyajikan grafik laju perubahan produksi sepatu dan peserta didik diminta mencermati grafik dengan teliti, lalu mengajukan pertanyaan berikut.

- ▶ Berdasarkan grafik laju perubahan produksi sepatu tersebut, apa yang dapat kalian temukan?
- ▶ Dapatkah kalian menentukan laju produksi rata-rata dalam 3 jam?

Pada tahap *multistruktural*, peserta didik mungkin dapat menyebutkan informasi, seperti banyaknya produksi pada waktu tertentu, bentuk grafik, atau besarnya laju perubahan meskipun belum mengintegrasikan semuanya.

Pertanyaan kontekstual seperti “*Pernahkah kalian melihat produksi sepatu di sebuah pabrik? Jika produksi tiap jamnya berubah-ubah, bagaimana kalian tahu berapa produksi yang tepat di waktu tertentu sehingga pabrik memperoleh keuntungan?*”, dapat mendorong peserta didik memasuki tingkat relasional. Cirinya ialah saat mereka mulai menghubungkan grafik laju perubahan, waktu, dan konsep turunan sebagai cara untuk menentukan besarnya produksi untuk memperoleh keuntungan maksimal, serta mengenali konsep tersebut merupakan makna dari turunan dalam konteks nyata.

Pertanyaan reflektif seperti “*Mengapa penting memahami konsep turunan dalam kehidupan sehari-hari, terutama dalam perencanaan produksi sepatu agar memperoleh keuntungan maksimal?*”, dapat digunakan oleh guru untuk mengidentifikasi peserta didik yang telah mencapai tingkat berpikir abstrak yang mendalam (*extended abstract*). Pada tingkat ini, peserta didik mulai menggeneralisasi dan menerapkan konsep turunan dalam berbagai situasi praktis dan kompleks, seperti prediksi pertumbuhan populasi, optimasi keuntungan, maupun perancangan algoritma dalam *machine learning*.

Selain mengukur kesiapan peserta didik, penilaian awal juga menjadi dasar untuk Pembelajaran Mendalam (*Deep Learning*) sehingga peserta didik tidak hanya memahami mekanisme perhitungan turunan, tetapi juga mampu mengembangkan pemahaman bermakna, berpikir kritis, dan mengaitkan konsep turunan dengan situasi kehidupan nyata.

F. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Tujuan umum aktivitas belajar mengajar adalah peserta didik mampu menjelaskan konsep turunan dan menerapkannya melalui penyelesaian masalah. Tabel 2.3 berikut menunjukkan pengalaman belajar dan karakteristik pembelajaran dari setiap aktivitas pada Bab 2 Buku Siswa.

Tabel 2.3 Pengalaman Belajar Materi Turunan Fungsi

Judul Aktivitas	Pengalaman Belajar	Karakteristik
 Tahukah Kamu Pengetahuan umum yang relevan dengan materi Turunan Fungsi.	Merefleksi	Menerapkan strategi berpikir.

Judul Aktivitas	Pengalaman Belajar	Karakteristik
 Ayo Bereksplorasi Kegiatan menyelidiki konsep matematika.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.
 Ayo Berdiskusi Kegiatan bertukar pikiran dan menyatakan gagasan.	Mengaplikasi	Berpikir kritis dan mencari solusi inovatif berdasarkan pengetahuan yang ada.
 Ayo Berpikir Kritis Kegiatan memproses informasi dan gagasan.	Mengaplikasi	Berpikir kritis dan mencari solusi inovatif berdasarkan pengetahuan yang ada.
 Ayo Berpikir Kreatif Kegiatan membuat ide atau alternatif solusi baru.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.
 Ayo Mencoba Kegiatan mengerjakan soal.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.
 Ayo Menggunakan Teknologi Kegiatan memanfaatkan kalkulator atau aplikasi lain.	Mengaplikasi	Menerapkan pengetahuan ke dalam situasi nyata atau bidang lain.
 Ayo Mengingat Kembali Kegiatan mengingat kembali materi sebelumnya.	Memahami	Menghubungkan pengetahuan baru dengan pengetahuan sebelumnya.
 Petunjuk Penjelasan mengenai koneksi antarkonsep materi.	Memahami	Menstimulasi proses berpikir peserta didik.

Subbab A: Definisi Turunan Fungsi

Indikator Tujuan Pembelajaran

- menjelaskan definisi turunan dengan pendekatan limit secara geometris (gradien garis singgung) dan fisis (laju perubahan sesaat) turunan.

1. Limit dan Kontinuitas Fungsi

Sebelum membahas tentang materi turunan fungsi, peserta didik perlu memahami limit fungsi. Guru mengawali pembelajaran melalui kegiatan Ayo Bereksplorasi 2.1 pada Buku Siswa untuk menemukan definisi limit fungsi secara intuitif menggunakan konteks budaya Pacu Jawi.



Ayo Bereksplorasi 2.1

Guru membentuk kelompok yang beranggotakan 4 atau 5 peserta didik. Guru memulai pertanyaan reflektif dan familier berikut, *“Tahukah kalian tentang Pacu Jawi? Dapatkah kalian memprediksi pada kekuatan genggam dan kecepatan berapa, sapi dapat bergerak lurus?”*

Pertanyaan tersebut mengaktifkan pengetahuan awal peserta didik secara berkesadaran, yaitu menyadari dan mencermati pengalaman pribadi yang relevan dengan konteks pembelajaran. Ini merupakan bentuk berkesadaran dalam pembelajaran karena peserta didik diajak hadir sepenuhnya dalam momen belajar melalui pengalaman nyata dan emosi yang terhubung dengan kehidupan sehari-hari. Dalam pelaksanaan pembelajaran, peserta didik diajak untuk menyadari pentingnya memahami perubahan kekuatan genggam joki dan perubahan kecepatan sapi terhadap arah sapi yang menunjukkan pentingnya limit fungsi terhadap kehidupan sehari-hari.

Guru kemudian menunjukkan Tabel Kecepatan Sapi dalam Pacu Jawi yang tersaji pada Buku Siswa. Guru dapat memodifikasi besaran kekuatan genggam dan kecepatan sapi sehingga setiap kelompok memiliki hasil berbeda. Guru mengarahkan peserta didik untuk melengkapi Tabel 2.1 pada Buku Siswa sesuai dengan pemahaman mereka. Setelah itu, peserta didik diarahkan untuk melakukan kegiatan Ayo Berdiskusi.



Ayo Berdiskusi

Guru mengarahkan peserta didik untuk mendiskusikan nilai kecepatan sapi saat kekuatan genggamannya mendekati 39 kg.

a. Definisi Limit Fungsi secara Intuitif

Sebagai lanjutan dari kegiatan Ayo Berdiskusi, guru meminta peserta didik untuk berdiskusi merancang definisi limit fungsi dalam konteks matematis. Diskusi ini menantang peserta didik untuk mencari makna mendalam (pembelajaran bermakna) dari definisi limit fungsi secara intuitif, dengan mengarahkan pada kebudayaan Pacu Jawi.

Dalam kegiatan ini, guru berperan sebagai fasilitator yang membangun jembatan antara konsep matematis dan fenomena nyata, bukan hanya memberikan definisi limit fungsi secara langsung. Guru mendorong peserta didik untuk menalar, bertanya, dan mengeksplorasi makna dari simbol matematika dalam konteks kehidupan nyata. Proses ini tidak hanya mengembangkan keterampilan kognitif, tetapi juga menghadirkan makna personal dan sosial terhadap apa yang mereka pelajari sehingga peserta didik dapat memahami laju perubahan dalam kehidupan sehari-hari. Pada akhirnya peserta didik dapat memahami definisi limit fungsi secara matematis dan menggunakannya pada materi berikutnya.

b. Sifat-Sifat Limit Fungsi



Ayo Bereksplorasi 2.2

Guru mengajak peserta didik mengeksplorasi sifat-sifat limit fungsi melalui contoh sederhana. Pertama-tama, guru menampilkan fungsi konstan $f(x) = 4$ dan meminta peserta didik melengkapi Tabel 2.2 pada Buku Siswa dengan nilai $f(x)$ saat x mendekati 1. Guru mengarahkan peserta didik untuk mengamati bahwa nilai $f(x)$ selalu 4 sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$. Aktivitas ini mengarahkan peserta didik untuk menemukan sifat limit fungsi konstan.

Selanjutnya, guru memperkenalkan fungsi identitas $g(x) = x$ dan meminta peserta didik melengkapi Tabel 2.3 dengan $g(x)$ ketika x mendekati 1. Guru membimbing peserta didik untuk melihat bahwa nilai fungsi semakin dekat

dengan 1 sehingga $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$. Melalui diskusi kelas, guru menekankan bahwa hasil ini sejalan dengan definisi limit dan menjadi dasar bagi pemahaman sifat limit berikutnya.



Ayo Berpikir Kritis

Pertanyaan pada Buku Siswa mendorong peserta didik untuk mengobservasi pola, menggunakan sifat-sifat limit, dan menarik kesimpulan sendiri.

Guru membimbing peserta didik untuk mendiskusikan kemungkinan hasil limit dengan menekankan bahwa pada fungsi konstan $f(x) = k$, limitnya tetap k , sedangkan pada fungsi identitas $g(x) = x$, limitnya adalah c . Selanjutnya, guru memberi ruang kolaborasi agar peserta didik dapat menguji jawabannya bersama teman sekaligus menumbuhkan sikap kritis dan percaya diri. Dengan pendekatan ini, peserta didik membangun pemahaman konsep limit melalui pengalaman langsung, bukan sekadar hafalan.



Ayo Berpikir Kreatif

Guru meminta peserta didik berkolaborasi dalam kelompok kecil untuk mengeksplorasi dan membuktikan Sifat Limit 2 hingga Sifat Limit 7 pada Buku Siswa. Setiap kelompok diminta memilih satu sifat limit, kemudian mencoba menyusun alasan atau pembuktian menggunakan definisi limit, contoh fungsi sederhana, atau representasi grafik. Misalnya, untuk Sifat Limit 2, peserta didik dapat membuktikan dengan menggunakan fungsi konstan dan mengamati perilaku nilainya ketika x mendekati suatu bilangan real.

Guru berperan sebagai fasilitator dengan memberikan pertanyaan seperti “*Mengapa limit dari penjumlahan fungsi sama dengan penjumlahan limitnya?*” atau “*Bagaimana sifat pangkat pada limit dapat kalian buktikan melalui contoh fungsi sederhana?*”.

Setelah eksplorasi, setiap kelompok mempresentasikan temuannya, sementara kelompok lain memberikan tanggapan atau alternatif pembuktian. Dengan demikian, peserta didik tidak hanya memahami sifat limit secara konseptual, tetapi juga melatih kemampuan berpikir kreatif, kritis, dan komunikasi matematis dalam suasana kolaboratif.

**Ayo Mencoba 2.1**

$$\begin{aligned}
1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^3 + 8}{x\sqrt{3x}}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 8}{x\sqrt{3x}} \right)} = \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 8)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x\sqrt{3x})}} && \text{(Sifat Limit 7, 5)} \\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 8}{(\lim_{x \rightarrow 1} x)(\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x})}} && \text{(Sifat Limit 3, 4)} \\
&= \sqrt{\frac{(\lim_{x \rightarrow 1} x)^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 8}{(\lim_{x \rightarrow 1} x)(\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} 3x})}} && \text{(Sifat Limit 6, 7)} \\
&= \sqrt{\frac{(\lim_{x \rightarrow 1} x)^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 8}{(\lim_{x \rightarrow 1} x)(\sqrt{3 \lim_{x \rightarrow 1} x})}} = \sqrt{\frac{1^3 + 8}{1\sqrt{3(1)}}} && \text{(Sifat Limit 2, 1)} \\
&= \sqrt{\frac{9}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 8}{x\sqrt{3x}} \right) = \sqrt{3\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 16x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 6x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 16x)} && \text{(Sifat Limit 5)} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} (6x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} (16x)} && \text{(Sifat Limit 3)} \\
&= \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 16 \lim_{x \rightarrow 2} x} && \text{(Sifat Limit 6, 2)} \\
&= \frac{2^2 - 6(2)}{2^2 - 16(2)} = \frac{4 - 12}{4 - 32} = \frac{-8}{-28} = \frac{2}{7} && \text{(Sifat Limit 1).}
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 16x} = \frac{2}{7}.$$

c. Limit Fungsi Trigonometri**Ayo Bereksplorasi 2.3**

Pada kegiatan eksplorasi ini, guru mengarahkan peserta didik untuk memahami limit fungsi trigonometri melalui pendekatan geometri. Guru menampilkan gambar pada Buku Siswa yang memuat lingkaran dengan pusat P dan jari-jari r , serta segitiga-segitiga yang terbentuk dari sudut pusat. Guru

menekankan bahwa titik $P(x, y)$, $Q(a, y)$, dan $T(m, y)$ berhubungan dengan panjang sisi segitiga, luas daerah, dan sudut pusat lingkaran.

Pertama-tama, guru meminta peserta didik mengidentifikasi objek-objek pada gambar segitiga PQR , juring PTR , dan segitiga PTS . Setelah itu, peserta didik diarahkan untuk melengkapi proses perhitungan luas setiap bangun datar. Guru dapat memberikan pertanyaan stimulus, misalnya “*Bagaimana cara menghitung luas segitiga PQR ?*” dan “*Bagaimana cara menghitung luas juring PTR ?*”.

Guru memandu peserta didik menyusun hubungan pertidaksamaan luas antara segitiga PQR , juring PTR , dan segitiga PTS . Peserta didik diarahkan untuk membentuk pertidaksamaan trigonometri berikut:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ dan } \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Guru kemudian mendorong peserta didik untuk melakukan analisis terhadap hasil tersebut dengan membandingkan limit saat $x \rightarrow 0$. Peserta didik diarahkan untuk menyimpulkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



Ayo Berdiskusi

Guru mengarahkan peserta didik untuk mendiskusikan sifat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, dan $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Harapannya, peserta didik dapat menemukan sendiri proses menemukan ketiga sifat tersebut. Apabila peserta didik mengalami kesulitan untuk menunjukkan sifat-sifat tersebut, guru dapat memberikan bimbingan untuk menjelaskan ketiga sifat tersebut.

Pada pembelajaran selanjutnya, guru dapat menjelaskan dan menyampaikan bahwa selain sifat-sifat limit fungsi yang telah ditemukan dan dipelajari pada bagian sebelumnya, peserta didik harus mengetahui dan memahami sifat-sifat limit fungsi trigonometri lain pada Buku Siswa.

Guru dapat memfasilitasi peserta didik melalui diskusi kelompok intensif, analisis contoh soal, dan pertanyaan penuntun yang merangsang pemikiran mendalam. Aktivitas ini bertujuan mendorong peserta didik benar-benar memahami “*mengapa*” dan “*bagaimana*” sifat-sifat limit tersebut bekerja. Peserta didik tidak hanya menghafal, tetapi juga menghubungkan konsep baru

dengan pengetahuan yang sudah ada, serta melihat relevansi dan aplikasi praktis sifat-sifat limit dalam memecahkan masalah kompleks dan kontekstual. Guru dapat menciptakan kolaborasi aktif, interaksi sosial positif, kesempatan untuk mempresentasikan pemahaman mereka, dan memunculkan kepuasan saat berhasil memecahkan tantangan bersama. Hal ini dapat membuat proses belajar menjadi pengalaman yang menyenangkan dan memuaskan. Kolaborasi tersebut dapat diwujudkan melalui pembelajaran berkelompok berbasis proyek maupun pembelajaran berbasis masalah.



Ayo Mencoba 2.2

Dalam kegiatan ini, guru dapat mendampingi peserta didik untuk menyelesaikan soal terkait limit fungsi trigonometri.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x + \tan x}{2x + \sin x} \right) \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \frac{\tan x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}} \right) = 1.$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x}$ adalah 1.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} \right).$$

Dengan mengingat identitas trigonometri bahwa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ atau $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{(1 + \cos x)} \right) = 0.$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ adalah 0.

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 - \pi^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{(x - \pi)(x + \pi)} = \left(\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{(x - \pi)} \right) \left(\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x + \pi} \right).$$

Misalkan $x - \pi = a$, ketika x mendekati π , maka a mendekati 0 sehingga

$$\begin{aligned} \left(\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{(x - \pi)} \right) \left(\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x + \pi} \right) &= \left(\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} \right) \left(\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x + \pi} \right) \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{\pi + \pi} \right) = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 - \pi^2}$ adalah $\frac{1}{2\pi}$.

d. Kontinuitas Fungsi



Ayo Bereksplorasi 2.4

Pada kegiatan ini, guru mengaitkan konsep kontinuitas fungsi dengan pengalaman nyata melalui contoh wahana *roller coaster*. Guru memantik rasa ingin tahu peserta didik dengan pertanyaan, “*Bagaimana roller coaster dapat melaju mulus tanpa entakan tiba-tiba?*”, kemudian menghubungkan dengan pentingnya lintasan yang tidak terputus.

Selanjutnya, guru membimbing peserta didik untuk mengisi Tabel 2.4 pada Buku Siswa dengan mengamati gambar situasinya terlebih dahulu. Guru dapat menyajikan dalam bentuk proyek menggunakan replika rel kereta api atau media yang sesuai. Melalui pembelajaran ini, peserta didik diarahkan untuk menyadari bahwa kelancaran gerak *roller coaster* mencerminkan sifat fungsi kontinu. Dengan demikian, konsep matematika dapat dipahami sekaligus diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari.

2. Konsep Turunan Fungsi

a. Garis Sekan, Garis Tangen, dan Turunan



Ayo Bereksplorasi 2.5

Dalam menjelaskan turunan, guru dapat memulai dengan konsep garis sekan yang memotong kurva di dua titik, berfungsi sebagai representasi visual dan alat hitung untuk laju perubahan rata-rata suatu fungsi dalam interval tertentu, seperti menghitung kecepatan rata-rata perjalanan. Kemudian, dengan membayangkan kedua titik pada garis sekan itu saling mendekat hingga menyatu menjadi satu titik di kurva, guru dapat memperkenalkannya sebagai garis tangen. Garis ini menyentuh kurva tepat di satu titik dan secara intuitif menunjukkan laju perubahan sesaat fungsi pada momen tersebut, layaknya kecepatan sepeda motor pada satu waktu spesifik. Dari pemahaman ini, guru dapat memfasilitasi peserta didik untuk menggeneralisasi ke turunan fungsi, sebuah fungsi baru yang memungkinkan untuk menghitung kemiringan garis tangen (laju perubahan sesaat) di setiap titik sepanjang kurva, menjadikannya sebagai alat fundamental untuk menganalisis perilaku dan dinamika fungsi dalam berbagai aplikasi.

Konsep turunan ini dapat dikenalkan guru sebagai laju perubahan rata-rata yang dapat dikaitkan dengan pengalaman sehari-hari (perubahan produksi sepatu) untuk membangun pemahaman awal yang bermakna dan mudah diakses peserta didik. Kemudian, transisi ke garis tangen sebagai laju perubahan sesaat, yang dieksplorasi melalui visualisasi interaktif pergerakan titik seperti terlihat pada gambar pada Buku Siswa. Selanjutnya, dengan pengetahuan yang telah diperoleh, guru dapat memulai aktivitas berikutnya.



Ayo Mengingat Kembali

Aktivitas ini bertujuan mengaitkan pengetahuan sebelumnya (kemiringan garis lurus) dengan pengetahuan baru yang akan ditemukan peserta didik.

Guru dapat mengarahkan peserta didik untuk melaksanakan aktivitas berikutnya yaitu Ayo Berdiskusi. Pada aktivitas Ayo Berdiskusi, guru dapat membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok dan memberikan kesempatan setiap kelompok untuk memperoleh pengalaman langsung dalam membandingkan penemuan kemiringan garis secara geometris dengan rata-rata laju produksi sepatu. Hasil pada proses diskusi ini diakhiri dengan kegiatan Ayo Berpikir Kritis yang bertujuan menemukan definisi dari garis sekan, garis tangen yang menjadi dasar dalam pendefinisian turunan.



Ayo Berdiskusi

Guru memfasilitasi peserta didik berdiskusi dalam kelompok kecil untuk memahami hubungan antara kemiringan garis dan laju rata-rata. Arahkan perhatian peserta didik pada gambar Buku Siswa, kemudian mintalah mereka untuk menghitung kemiringan garis PR melalui selisih koordinat. Selanjutnya, guru membimbing peserta didik melengkapi perhitungan pada nomor 2, kemudian membandingkan hasilnya dengan kemiringan garis yang diperoleh. Guru dapat memberikan penekanan mengenai pentingnya kerja sama.



Ayo Berpikir Kritis

Guru membimbing peserta didik untuk menarik kesimpulan dari hasil perbandingan antara perhitungan kemiringan garis dengan rata-rata laju produksi. Guru dapat mendorong peserta didik untuk mengemukakan

pendapatnya, lalu diarahkan untuk berdiskusi agar peserta didik memahami bahwa kedua cara perhitungan tersebut menunjukkan makna yang sama, yaitu laju rata-rata. Tekankan bahwa kegiatan ini melatih kemampuan berpikir kritis dalam menghubungkan konsep matematis dengan konteks nyata.

3. Penulisan Turunan Fungsi

Guru dapat memberikan kebebasan kepada peserta didik dalam penggunaan notasi turunan fungsi. Akan tetapi, penggunaannya harus berdasar dan tetap sesuai dengan kaidah notasi turunan fungsi sebagaimana dalam Buku Siswa.

Subbab B: Sifat-Sifat Turunan Fungsi

Indikator Tujuan Pembelajaran

- menentukan turunan fungsi aljabar, fungsi trigonometri, dan fungsi eksponensial.

1. Menemukan Sifat Turunan Fungsi

a. Aturan Pangkat dan Sifat Turunan Fungsi



Ayo Bereksplorasi 2.6

Guru mengarahkan peserta didik untuk mengingat kembali sifat-sifat limit fungsi dan menggunakannya untuk menemukan sifat-sifat turunan fungsi. Dimulai dengan contoh $f(x) = x^2$ hingga memperoleh hasil $f'(x) = 2x$, kemudian menugaskan peserta didik melengkapi tabel agar menemukan pola umum turunan fungsi $f(x) = x^n$ dengan $a, n \in R, n \neq 0$.

Guru mengaitkan hasil akhir pengisian tabel tersebut dengan aturan pangkat. Guru selanjutnya dapat memperkenalkan turunan fungsi konstan melalui pengamatan grafik sehingga peserta didik memahami bahwa garis mendatar memiliki turunan nol. Guru dapat menekankan keterkaitan antara perhitungan aljabar, representasi grafik, dan makna konseptual turunan sebagai laju perubahan sekaligus melatih peserta didik untuk menggeneralisasikan secara kritis.



Ayo Berpikir Kreatif

Guru memfasilitasi peserta didik untuk berpikir kreatif dalam menemukan dan membuktikan sifat-sifat turunan fungsi pada Buku Siswa. Guru mengawali dengan pertanyaan pemantik sederhana, lalu membagi peserta didik ke dalam kelompok kecil untuk merancang langkah pembuktian menggunakan definisi turunan fungsi. Selama proses berlangsung, guru dapat memberi arahan seperlunya agar peserta didik berani mengeksplorasi berbagai pendekatan. Hasil diskusi dipresentasikan, kemudian guru memandu menyimpulkan bahwa sifat turunan fungsi yang telah dipelajari berlaku umum. Kegiatan ini menekankan kolaborasi, kreativitas, dan menghubungkan konsep dasar dengan generalisasi.

b. Aturan Rantai



Ayo Bereksplorasi 2.7

Aturan rantai merupakan konsep krusial dalam kalkulus diferensial. Pada kegiatan ini, guru mengarahkan peserta didik untuk menemukan pola turunan $(1 + x^2)^n$ secara induktif. Penemuan dimulai dari kasus sederhana $(1 + x^2)^2$ (diekspansi lalu diturunkan), kemudian $(1 + x^2)^3$, untuk akhirnya diperoleh $f'(x) = n(1 + x^2)^{n-1}(2x)$. Guru perlu memberikan penekanan penggunaan aturan pangkat, turunan fungsi konstan, dan pengenalan $2x$ sebagai turunan dari $1 + x^2$.

Guru dapat mengarahkan peserta didik untuk bekerja secara berpasangan atau dalam kelompok kecil. Jika peserta didik mengalami kesulitan, guru dapat membimbing mereka untuk (1) menguraikan dengan operasi aljabar, (2) menurunkan setiap sukunya, (3) menyederhanakan dan mengeluarkan faktornya $2x$, kemudian (4) membandingkan hasil antarkasus untuk menemukan pola umumnya.

Guru dapat mengakhiri pembelajaran dengan diskusi kelas, yaitu mengonfirmasi pola dan menjelaskan kekeliruan umum yang terjadi seperti tertukarnya pengertian peserta didik mengenai $1 + x^2$ dengan $(1 + x)^2$.



Ayo Berpikir Kritis

Guru memfasilitasi peserta didik untuk menggeneralisasi pola turunan dari bentuk khusus ke bentuk umum. Dengan mengingat kembali hasil sebelumnya, yaitu $\frac{d}{dx}(1+x^2)^5 = 10x(1+x^2)^4$, guru memberikan tantangan kepada peserta didik dengan bertanya, “Bagaimana jika pangkatnya $k \in R$?”

Peserta didik diarahkan untuk mengecek kembali pola pada tabel hasil turunan $(1+x^2)^n$ dan menyimpulkan bahwa turunan umumnya memiliki bentuk $\frac{d}{dx}(1+x^2)^k = k(1+x^2)^{k-1}(2x)$. Guru berperan sebagai fasilitator dengan memberikan penekanan bahwa munculnya $2x$ berasal dari bagian $(1+x^2)$. Guru juga mendorong terjadinya diskusi kelompok untuk mempresentasikan dan menegaskan pentingnya berpikir kritis dalam menemukan dan menguji generalisasi.



Ayo Mengingat Kembali

Guru mengajak peserta didik untuk mengingat kembali konsep dasar komposisi fungsi, yaitu jika terdapat dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, maka komposisinya ditulis sebagai $(f \circ g)(x)$ dan didefinisikan sebagai $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Guru dapat memberikan contoh sederhana, misalnya

$$f(x) = x^2 \text{ dan } g(x) = x + 1, \text{ maka } (f \circ g)(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Dengan contoh tersebut, peserta didik diarahkan untuk menyadari bahwa dalam komposisi, fungsi $g(x)$ disubstitusikan terlebih dahulu ke dalam fungsi f . Guru memberikan penekanan bahwa pemahaman konsep komposisi fungsi penting dikuasai sebagai bekal untuk mempelajari aturan rantai (*chain rule*) pada turunan.

2. Turunan Fungsi Aljabar



Ayo Mencoba 2.3

1. Turunan pertama fungsi $y = 2\left(\frac{x^2+2}{x}\right)$ dapat ditentukan dengan cara memisalkan $u(x) = x^2 + 2$ dan $v(x) = x$, sehingga

$$y' = 2\left(\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}\right) \quad (\text{Sifat Turunan 4})$$

$$= 2\left(\frac{(2x^{2-1} + 0)x - (x^2 + 2)(1x^{1-1})}{x^2}\right) \quad (\text{Aturan Pangkat})$$

$$= 2 \left(\frac{(2x)x - (x^2 + 2)(x^0)}{x^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= 2 \left(\frac{2x^2 - (x^2 + 2)}{x^2} \right) = 2 \left(\frac{x^2 - 2}{x^2} \right) \quad (\text{Sifat Eksponen})$$

$$= \frac{2x^2 - 4}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 2 - \frac{4}{x^2} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = 2 \left(\frac{x^2 + 2}{x} \right)$ adalah $y' = 2 - \frac{4}{x^2}$.

2. Turunan pertama dari $y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x}$ dapat ditentukan dengan dua cara.

Cara I

Fungsi $y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x}$ diubah menjadi $y = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x} + x^2}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + x^2}{x} \right)$.

Misalkan $u(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^2$ dan $v(x) = x$, maka

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 2x^{2-1} \right)x - (x^{\frac{1}{2}} + x^2)1x^{1-1}}{x^2} \right) \quad (\text{Sifat Turunan 4})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x \right)x - (x^{\frac{1}{2}} + x^2)x^0}{x^2} \right) \quad (\text{Aturan Pangkat})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^2 \right) - (x^{\frac{1}{2}} + x^2)}{x^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^2 - x^{\frac{1}{2}} - x^2}{x^2} \right) \quad (\text{Sifat Eksponen, Aljabar})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{x^2} + 1 \right) \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} \right) \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Cara II

Fungsi $y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x}$ diubah menjadi $y = \left(\frac{1}{2x} \right) (\sqrt{x} + x^2)$.

Misalkan $u(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^2$ dan $v(x) = \frac{1}{2x}$, maka

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (\text{Sifat Turunan 3})$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 2x \right) \left(\frac{1}{2x} \right) + (x^{\frac{1}{2}} + x^2) \left(-\frac{1}{2}x^{-1-1} \right) \quad (\text{Sifat Turunan 3})$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x \right) \left(\frac{1}{2x} \right) + (x^{\frac{1}{2}} + x^2) \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \left(\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} + 1 \right) + \left(-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2x^2} - \frac{x^2}{2x^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \left(\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} + 1 \right) + \left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{Sifat Eksponen})$$

$$= -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \frac{\sqrt{x+x^2}}{2x}$ adalah $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$.

3. Fungsi y dapat diubah menjadi

$$y = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2-x}} = \sqrt{\frac{x(x+1)}{x(x-1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Misalkan $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $u(x) = x+1$, dan $v(x) = x-1$, maka

$$y = (g(x))^{\frac{1}{2}}, u'(x) = 1, \text{ dan } v'(x) = 1$$

sehingga diperoleh

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{(1)(x-1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} \quad (\text{Sifat Turunan 4})$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

$$y' = \frac{1}{2}(g(x))^{\frac{1}{2}-1} g'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right) \quad (\text{Aturan Rantai})$$

$$= -\frac{2}{2} \left(\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{1}{(x-1)^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar dan Sifat Eksponen})$$

$$= - \left(\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x-1)^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar dan Sifat Eksponen})$$

$$= - \left(\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{-\frac{1}{2}+2}} \right) = - \left(\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar dan Sifat Eksponen})$$

$$= \left(\frac{-1}{(x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (\text{Sifat Eksponen})$$

$$= \frac{-1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x+1)}} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2-x}}$ adalah $y' = \frac{-1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x+1)}}$.

3. Turunan Fungsi Trigonometri



Ayo Bereksplorasi 2.8

Guru memfasilitasi peserta didik untuk menemukan turunan fungsi trigonometri dasar melalui definisi turunan fungsi. Guru mengingatkan peserta didik untuk meninjau kembali identitas trigonometri yang sudah dipelajari melalui Ayo Mengingat Kembali. Guru dapat memberikan contoh sederhana identitas trigonometri agar pemahaman peserta didik lebih kuat. Selanjutnya, arahkan peserta didik untuk menyalin dan melengkapi langkah perhitungan turunan $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ pada buku catatan.

Peserta didik diajak untuk menelusuri penggunaan identitas trigonometri dan sifat limit fungsi dalam penyelesaian sehingga akhirnya menemukan hasil bahwa $f'(x) = \cos x$ dan $g'(x) = -\sin x$. Guru berperan sebagai fasilitator dengan memberikan petunjuk seperlunya, misalnya menekankan penggunaan sifat limit fungsi dan identitas trigonometri yang tepat serta mendorong diskusi kelompok untuk saling memeriksa hasil. Pada akhir kegiatan, guru memberikan penegasan bahwa metode definisi turunan dapat digunakan untuk membuktikan turunan fungsi trigonometri secara umum.



Ayo Berpikir Kreatif

Guru memfasilitasi peserta didik untuk berpikir kreatif dalam menemukan sifat-sifat turunan trigonometri (STT 2 hingga STT 5 pada Buku Siswa). Guru dapat memantik dengan mengajukan pertanyaan, “*Bagaimana membuktikan bahwa jika $f(x) = \tan x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$?*”

Peserta didik bekerja dalam kelompoknya untuk menyusun pembuktian menggunakan definisi turunan fungsi, identitas trigonometri, dan sifat limit fungsi, sementara guru bertindak sebagai fasilitator. Pada akhir kegiatan, guru meminta setiap kelompok untuk mempresentasikan hasilnya, kemudian menegaskan bahwa turunan fungsi trigonometri tersebut berlaku umum dan akan menjadi dasar dalam pembahasan berikutnya.



Ayo Mencoba 2.4

Menentukan turunan fungsi $y = \frac{2\sqrt{x} + \sin x}{\cos x}$.

Misalkan $2\sqrt{x} + \sin x = u(x)$ dan $\cos x = v(x)$, maka

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} && \text{(Sifat Turunan 4)} \\
 &= \frac{\left(2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} + \cos x\right)\cos x - (2\sqrt{x} + \sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} && \text{(Aturan Pangkat dan STT 1)} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x\right)\cos x + \sin x(2\sqrt{x} + \sin x)}{\cos^2 x} && \text{(Sifat Aljabar)} \\
 &= \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sqrt{x} \sin x}{\cos^2 x} && \text{(Sifat Aljabar)} \\
 &= \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + 1 + 2\sqrt{x} \sin x}{\cos^2 x} && \text{(Identitas Trigonometri)} \\
 &= \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x} \cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sqrt{x} \sin x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x} && \text{(Sifat Aljabar)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} \cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sqrt{x} \tan x}{\cos x} && \text{(Identitas Trigonometri)} \\
 &= \frac{1}{\cos x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos x} + 2\sqrt{x} \tan x \right) && \text{(Sifat Aljabar)} \\
 &= \sec x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sec x + 2\sqrt{x} \tan x \right) && \text{(Identitas Trigonometri).}
 \end{aligned}$$

Jadi, turunan fungsi $y = \frac{2\sqrt{x} + \sin x}{\cos x}$ adalah $y' = \sec x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sec x + 2\sqrt{x} \tan x \right)$.



Ayo Berdiskusi

Guru memfasilitasi peserta didik dengan membentuk kelompok untuk menyelesaikan permasalahan gerak laba-laba pada bidang Kartesius yang memiliki fungsi parametrik $x(t) = t^2 - 4$ dan $y(t) = t^2 - 2t + 6$. Peserta didik diarahkan untuk menemukan persamaan lintasan dengan mengestimasi t , menentukan posisi laba-laba pada saat $t = 2$, serta menghitung kecepatan melalui turunan pertama $x'(t)$ dan $y'(t)$.

Dalam kegiatan ini, guru berperan memberikan petunjuk seperlunya dan menekankan kerja sama sehingga peserta didik dapat mengaitkan konsep turunan dengan masalah nyata.

4. Turunan Fungsi Eksponensial

Guru mengaitkan materi dengan fenomena nyata, misalnya pertumbuhan jumlah penduduk Indonesia yang terus meningkat setiap tahun. Guru mengajak peserta didik berdiskusi mengenai pentingnya memprediksi laju pertumbuhan penduduk dengan model matematika, salah satunya menggunakan fungsi eksponensial.



Ayo Mengingat Kembali

Guru mengarahkan peserta didik untuk mengingat kembali definisi fungsi eksponensial dan sifat fungsi eksponensial $f(x) = a^x$. Kegiatan ini untuk mempermudah peserta didik dalam mengikuti proses pembelajaran selanjutnya.



Ayo Bereksplorasi 2.9

Guru memandu peserta didik untuk menurunkan fungsi eksponensial dengan definisi turunan fungsi hingga diperoleh bentuk $f'(x) = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$. Guru kemudian mengarahkan peserta didik untuk melengkapi tabel dengan menggunakan kalkulator untuk mengamati nilai perubahan pada $\frac{a^h - 1}{h}$ saat h mendekati nol, kemudian mendiskusikan hasilnya bersama-sama. Guru dapat memberikan penekanan bahwa dari proses eksplorasi ini akan muncul bilangan e yang menjadi dasar penting dalam turunan fungsi eksponensial dan banyak digunakan untuk memodelkan suatu fenomena dalam kehidupan sehari-hari.



Ayo Mengingat Kembali

Guru mengajak peserta didik untuk meninjau kembali definisi logaritma

$${}^a\log x = y \text{ berarti } a^y = x \text{ dengan } a > 0 \text{ dan } a \neq 1,$$

serta logaritma natural

$$\ln x = {}^e\log x.$$

Guru mengarahkan peserta didik untuk mengingat kembali sifat-sifat dasar logaritma. Guru dapat memberikan contoh sederhana penerapan sifat-sifat logaritma agar pemahaman peserta didik lebih kuat sebelum diterapkan pada turunan fungsi eksponensial dan logaritma.



Ayo Mencoba 2.5

1. Dengan menggunakan Sifat Turunan a^x pada $y = 8^x$, diperoleh

$$y' = (\ln 8)8^x.$$

2. Dengan menggunakan Sifat Turunan $e^{f(x)}$ pada $y = e^{8x}$, diperoleh

$$y' = e^{f(x)}f'(x) = e^{8x}(8) = 8e^{8x}.$$

3. Dengan menggunakan Aturan Rantai dan Sifat Turunan a^x pada $y = 4^{x^2+5}$, diperoleh

$$y' = (\ln 4)(4^{x^2+5})(2x) = 2x(\ln 4)4^{x^2+5}.$$

4. Dengan menggunakan Sifat Turunan $e^{f(x)}$ pada $y = e^{x^2}$, diperoleh

$$y' = e^{f(x)}f'(x) = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2}.$$

Subbab C: Aplikasi Turunan Fungsi

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ menentukan gradien dan persamaan garis singgung kurva;
- ▶ menentukan keadaan suatu fungsi naik, fungsi turun, dan fungsi diam;
- ▶ menemukan titik ekstrem, nilai balik maksimum, dan nilai balik minimum fungsi beserta intervalnya; serta
- ▶ menyelesaikan masalah menggunakan aturan turunan maupun uji turunan pertama dan kedua.

1. Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Guru membimbing peserta didik untuk menyelami konsep garis tangen (garis singgung) melalui pendekatan aktif dan interaktif. Alih-alih sekadar menerima penjelasan, peserta didik diajak menemukan karakteristik dan sifat-sifat garis tangen secara mandiri melalui serangkaian eksperimen dan observasi yang mengasyikkan. Tujuan utamanya adalah membantu peserta didik memahami

konsep dasar garis tangen, mengidentifikasi sifat-sifatnya, serta membangun intuisi visual dan konseptual tentang bagaimana garis tangen menyinggung kurva hanya pada satu titik. Tujuan lainnya adalah meningkatkan keterampilan pemecahan masalah melalui kemampuan mengamati, menganalisis, dan menyimpulkan.

Guru mengawali dengan pengantar singkat yang memancing rasa ingin tahu peserta didik, seperti pertanyaan tentang bagaimana mobil balap menikung atau cara mengetahui kemiringan bukit. Setelah itu, guru mengarahkan peserta didik memasuki fase eksplorasi individu atau kelompok kecil selama 25–35 menit. Mereka akan bekerja dengan berbagai media, seperti kertas grafik, perangkat lunak geometri dinamis (GeoGebra/Desmos), benang, atau penggaris, untuk memvisualisasikan dan menggambar garis tangen pada berbagai kurva sebagaimana terdapat di gambar pada Buku Siswa. Dalam fase ini, guru meminta peserta didik mencatat karakteristik garis yang mereka gambar, termasuk jumlah titik sentuh dan kemiringannya di titik singgung. Mereka juga akan mengamati perubahan yang terjadi jika garis tersebut sedikit digeser.

Setelah eksplorasi, guru memberikan pengarahan untuk melakukan sesi diskusi kelas dan memfasilitasi kegiatan berbagi temuan selama 10–15 menit. Guru akan membimbing diskusi dengan pertanyaan-pertanyaan kunci seperti *“Apa persamaan dari semua garis yang kalian sebut sebagai garis singgung?”* atau *“Bagaimana kalian bisa yakin bahwa garis yang kalian gambar hanya menyentuh kurva pada satu titik?”*.

Guru menutup kegiatan dengan konfirmasi dan perumusan konsep. Caranya adalah membantu peserta didik merumuskan definisi dan sifat-sifat kunci garis tangen secara formal, bahkan dapat memperkenalkan notasi matematika terkait. Dengan demikian, peserta didik tidak hanya menghafal definisi garis tangen, tetapi juga memahami konsepnya secara mendalam dan intuitif melalui pengalaman belajar yang bermakna dan menyenangkan.



Ayo Mencoba 2.6

1. **Langkah I:** menentukan koordinat titik A .

Titik singgung $A(1, y_1)$ dapat ditentukan dengan menyubstitusikan $x = 1$ pada kurva $y = x^2 - x + 2$, diperoleh

$$y_1 = f(1) = 1^2 - 1 + 2 = 2,$$

sehingga titik singgungnya adalah $A(1, 2)$.

Langkah II: menentukan turunan fungsi y .

$$y = f(x) = x^2 - x + 2, \text{ maka } y' = f'(x) = 2x - 1.$$

Langkah III: menentukan kemiringan garis singgung.

Kemiringan garis singgung pada titik $(1, 2)$ adalah

$$f'(1) = 2(1) - 1 = 1.$$

Langkah IV: menentukan persamaan garis singgung.

Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - x + 2$ di titik $A(1, 2)$ adalah

$$(y - y_A) = m(x - x_A)$$

$$(y - 2) = 1(x - 1)$$

$$y = x + 1.$$

2. **Langkah I:** menentukan titik potong.

Titik potong garis $y = x + 1$ dengan kurva $y = x^2 + 2x + 1$ adalah

$$y_{\text{garis}} = y_{\text{kurva}}$$

$$x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$-x^2 - 2x + x = 1 - 1 \quad (\text{kedua ruas ditambah } (-x^2 - 2x - 1))$$

$$x^2 + x = 0 \quad (\text{kedua ruas dikali } -1)$$

$$x(x + 1) = 0 \quad (\text{pemfaktoran})$$

diperoleh

$$x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = -1.$$

Karena terdapat dua nilai x , artinya terdapat dua titik singgung.

Untuk $x_1 = 0$, maka $y = 1$, diperoleh titik singgung $(0, 1)$.

Untuk $x_2 = -1$, maka $y = 0$, diperoleh titik singgung $(-1, 0)$.

Langkah II: menentukan turunan fungsi $y = x^2 + 2x + 1$.

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 1, \text{ maka}$$

$$y' = f'(x) = 2x + 2.$$

Langkah III: menentukan kemiringan garis singgung.

Kemiringan garis singgung pada titik $(0, 1)$ adalah $f'(0) = 2$.

Kemiringan garis singgung pada titik $(-1, 0)$ adalah $f'(-1) = 0$.

Langkah IV: menentukan persamaan garis singgung.

Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 2x + 1$ di titik $(0, 1)$ adalah

$$(y - 1) = 2(x - 0)$$

$$(y - 1) = 2x$$

$$y = 2x + 1.$$

Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 2x + 1$ di titik $(-1, 0)$ adalah garis $y = 0$ atau sumbu- x . Hal ini karena nilai y di titik singgung adalah 0 dan gradien garis singgung tersebut adalah 0.

2. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Fungsi Diam

Guru mengajak peserta didik memahami konsep fungsi naik, fungsi turun, dan fungsi diam (konstan) secara intuitif melalui pengamatan langsung pada grafik fungsi. Dimulai dengan pengantar yang memantik rasa ingin tahu tentang bagaimana grafik dapat menceritakan sebuah perubahan, peserta didik kemudian dibagi dalam kelompok untuk melakukan eksplorasi mandiri. Guru meminta peserta didik mengamati contoh grafik fungsi pada Buku Siswa, atau pada lembar kerja atau aplikasi grafik yang disiapkan guru, lalu secara cermat menganalisis perubahan nilai y seiring dengan pergerakan nilai x dari kiri ke kanan. Tujuan utamanya adalah agar peserta didik dapat mengidentifikasi interval di mana fungsi tersebut menunjukkan sifat naik, turun, atau diam, serta mencatat ciri-ciri umum dari setiap perilaku grafik tersebut.

Kegiatan dilanjutkan dengan diskusi kelas. Guru mengarahkan setiap kelompok mempresentasikan hasil pengamatan dan penemuan mereka. Guru memfasilitasi diskusi ini untuk mengonsolidasikan pemahaman peserta didik, menekankan definisi formal dari fungsi naik, fungsi turun, dan fungsi diam, serta menghubungkan konsep ini dengan visualisasi grafik. Melalui pendekatan yang interaktif dan berpusat pada peserta didik ini, mereka diharapkan tidak hanya menghafal definisi, tetapi juga mampu memahami esensi perilaku fungsi yang direfleksikan pada grafiknya, menjadikan pembelajaran lebih bermakna.



Ayo Berpikir Kreatif

Guru memfasilitasi peserta didik untuk berpikir kreatif dengan mengajukan pertanyaan pemantik, “*Bagaimana bentuk grafik $f(x)$ pada titik $x = a$ atau $x = b$? Apakah ada hal khusus yang dapat kalian amati?*”

Peserta didik diarahkan untuk menganalisis dan mendiskusikan kondisi grafik pada titik tersebut, baik melalui perhitungan maupun pengamatan visual menggunakan grafik. Selanjutnya, guru mendorong peserta didik berkolaborasi dalam kelompok untuk menuliskan temuan mereka mengenai syarat atau kondisi khusus grafik pada $x = a$ atau $x = b$. Guru memandu diskusi yang difokuskan untuk menegaskan bahwa hasil temuan merupakan dasar konsep fungsi diam (*stationary function*) yang sangat penting dalam memahami titik-titik khusus pada grafik fungsi.



Ayo Mencoba 2.7

1. Diketahui kurva $g(x) = x(6 - x)^2$. Dengan mengingat sifat fungsi $f(x) = u(x)v(x)$, turunan fungsi tersebut adalah $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ sehingga

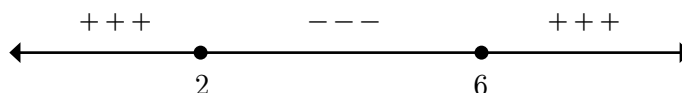
$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (6 - x)^2 + x(-2(6 - x)) \\ &= 36 - 24x + 3x^2 \\ &= 3x^2 - 24x + 36. \end{aligned}$$

Kita dapat menentukan batas interval menggunakan $g'(x) = 0$ sehingga

$$\begin{aligned} 3x^2 - 24x + 36 &= 0 \\ x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ (x - 6)(x - 2) &= 0, \end{aligned}$$

diperoleh $x = 2$ atau $x = 6$.

Grafik fungsi $g(x)$ tidak akan pernah turun jika $g'(x) \geq 0$. Dengan menggunakan bantuan garis bilangan, diperoleh



Jadi, batasan kurva $g(x)$ agar nilai fungsi tidak pernah turun adalah $x \leq 2$ atau $x \geq 6$.

2. Untuk menentukan turunan pertama, perlu diingat bahwa jika $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ maka $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$. Berdasarkan persamaan fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$, misalkan $u(x) = x$ dan $v(x) = x^2 - x + 1$, maka
- $$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

Kita dapat menentukan batas interval menggunakan $f'(x) = 0$ sehingga

$$\begin{aligned}\frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2} &= 0 \\ -x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1,\end{aligned}$$

diperoleh $x = 1$ atau $x = -1$.

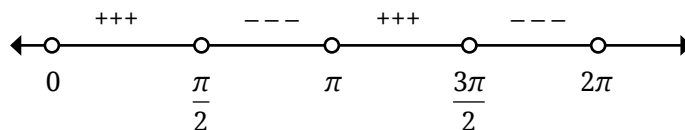
Grafik fungsi $f(x)$ naik jika $f'(x) > 0$, sehingga dengan menggunakan garis bilangan, interval saat $f(x)$ naik adalah $-1 < x < 1$.

Grafik fungsi $f(x)$ turun jika $f'(x) < 0$ sehingga dengan menggunakan garis bilangan, interval saat $f(x)$ turun adalah $x < -1$ dan $x > 1$.

3. Diketahui bahwa $f(x) = \sin^2 x$, maka

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Syarat bahwa fungsi f naik adalah ketika $f'(x) > 0$, yaitu $\sin 2x > 0$. Pembuat nol fungsi $\sin 2x$ adalah $(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Dengan bantuan garis bilangan, diperoleh



Turunan fungsi $f'(x)$ bernilai positif pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dan $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Jadi, interval saat fungsi $f(x)$ naik adalah $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dan $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

3. Titik Ekstrem, Nilai Balik Minimum, dan Nilai Balik Maksimum

a. Titik Ekstrem

Pada kegiatan ini, guru cukup memberikan beberapa pertanyaan materi sebelumnya berkaitan dengan kondisi fungsi diam. Guru dapat memancing peserta didik untuk menyampaikan secara tegas karakteristik fungsi diam. Selanjutnya, peserta didik diminta untuk mendiskusikan secara luas terkait karakteristik tersebut, termasuk mengarahkan jawaban peserta didik menuju materi titik ekstrem. Guru memberikan kesempatan kepada peserta didik untuk mengamati dan menganalisis grafik pada Buku Siswa, baik melalui sketsa manual maupun dengan bantuan aplikasi interaktif seperti GeoGebra atau Desmos.

Fokus utama eksplorasi ini adalah mengidentifikasi puncak tertinggi (maksimum) dan lembah terendah (minimum) pada kurva, kemudian mencatat perubahan kemiringan grafik di sekitar titik-titik tersebut. Mereka akan didorong untuk bertanya dan mencari tahu apa yang terjadi pada turunan pertama (kemiringan) dan turunan kedua (cekungan) di titik-titik ekstrem. Kegiatan ini bertujuan membangun fondasi kuat yang memungkinkan peserta didik mengembangkan intuisi matematis mereka sebelum diperkenalkan dengan definisi dan teorema formal.



Ayo Berdiskusi

Guru menyediakan ruang diskusi bagi peserta didik dalam kelompoknya untuk berbagi observasi dan memaparkan temuan mereka dari kegiatan sebelumnya. Guru dapat memberikan pertanyaan pemandu yang mendorong mereka untuk menyampaikan kondisi suatu titik disebut titik ekstrem minimum atau titik ekstrem maksimum. Diskusi juga akan mencakup pentingnya titik ekstrem dalam konteks dunia nyata, seperti dalam masalah optimasi. Melalui pertukaran ide ini, peserta didik diharapkan dapat mencapai pemahaman kolektif yang lebih mendalam, mengidentifikasi dan mengoreksi miskonsepsi, serta memperkuat keterampilan komunikasi matematis mereka sehingga pemahaman tentang titik ekstrem menjadi lebih holistik dan bermakna.

**Ayo Mencoba 2.8**

Diketahui fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$.

Langkah I: menentukan $f'(x)$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

Langkah II: menentukan nilai x yang mungkin agar $f(x)$ diam, yaitu saat $f'(x) = 0$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0,$$

diperoleh

$$x_1 = -2 \text{ atau } x_2 = 1,$$

sehingga

$$f(x_1) = f(-2) = 2((-2)^3) + 3((-2)^2) - 12(-2) - 1 = 19.$$

$$f(x_2) = f(1) = 2(1^3) + 3(1^2) - 12(1) - 1 = -8.$$

Jadi, terdapat dua titik ekstrem, yaitu $(-2, 19)$ dan $(1, -8)$.

Langkah III: menentukan jenis titik ekstrem

Untuk $x < x_1$ atau $x < -2$, maka $f(-3) = 8 > 0$.

Untuk $x_1 < x < x_2$ atau $-2 < x < 1$, maka $f(0) = -1 < 0$.

Untuk $x > x_2$ atau $x > 1$, maka $f(2) = 3 > 0$.

Jadi, titik $(1, -8)$ merupakan titik ekstrem minimum dan titik $(-2, 19)$ merupakan titik ekstrem maksimum.

b. Uji Turunan Pertama

Kegiatan pembelajaran ini berfokus pada uji turunan pertama, sebuah konsep penting untuk menentukan titik minimum lokal (titik balik minimum), titik maksimum lokal (titik balik maksimum), dan titik belok. Guru dapat mengajak peserta didik untuk mengeksplorasi secara visual menggunakan gambar pada Buku Siswa. Pada akhir sesi, peserta didik menerapkan pemahaman mereka untuk menyelesaikan masalah kontekstual pada Ayo Mencoba 2.9.



Ayo Mencoba 2.9

Turunan pertama dari $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ adalah

$$f'(x) = x^3 - 4x.$$

Fungsi $f(x)$ diam saat $f'(x) = 0$ sehingga

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x-2)(x+2) = 0.$$

diperoleh $x = 0$, $x = -2$, atau $x = 2$.

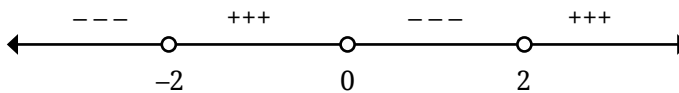
Untuk $x = -2$, maka $f(-2) = -4$.

Untuk $x = 0$, maka $f(0) = 0$.

Untuk $x = 2$, maka $f(2) = -4$.

Jadi, terdapat tiga titik ekstrem, yaitu $(-2, -4)$, $(0, 0)$, dan $(2, -4)$.

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan, diperoleh nilai turunan pertama fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ di sekitar absis -2 , 0 , dan 2 .



Berdasarkan garis bilangan tersebut, dapat disimpulkan bahwa

- ▶ titik $(-2, -4)$ adalah titik balik minimum karena nilai $f'(x)$ berganti tanda dari negatif menjadi positif setelah melalui titik $(-2, -4)$;
- ▶ titik $(0, 0)$ adalah titik balik maksimum karena nilai $f'(x)$ berganti tanda dari positif menjadi negatif setelah melalui titik $(0, 0)$;
- ▶ titik $(2, -4)$ adalah titik balik minimum karena nilai $f'(x)$ berganti tanda dari negatif menjadi positif setelah melalui titik $(2, -4)$.

c. Uji Turunan Kedua

Kegiatan pembelajaran ini berfokus pada uji turunan kedua, sebuah konsep penting dalam kalkulus untuk menganalisis sifat-sifat fungsi, khususnya dalam menentukan titik balik minimum, titik balik maksimum, dan titik belok.

Pembelajaran akan diawali dengan mengingat kembali konsep dasar turunan pertama dan fungsinya, kemudian beralih ke pengenalan turunan kedua sebagai ukuran kecekungan suatu fungsi.

Guru dapat mengajak peserta didik untuk mengeksplorasi secara visual menggunakan gambar pada Buku Siswa yang menunjukkan hubungan antara tanda turunan kedua dan bentuk grafik fungsi, serta memahami konsep titik belok sebagai titik perubahan kecekungan. Setelah itu, fokus utama adalah aplikasi uji turunan kedua untuk mengidentifikasi jenis-jenis titik ekstrem. Pada akhir sesi, peserta didik menerapkan pemahaman mereka untuk menyelesaikan masalah kontekstual, seperti soal optimasi yang membutuhkan analisis menggunakan uji turunan kedua, kemudian guru membuka ruang diskusi untuk memadatkan pemahaman konsep dan mengidentifikasi area yang masih perlu diperdalam.

Subbab D: Aplikasi Turunan Fungsi di Berbagai Bidang Ilmu

Indikator Tujuan Pembelajaran

- menyelesaikan masalah di berbagai bidang ilmu menggunakan aturan turunan maupun uji turunan pertama dan kedua.

Pembelajaran aplikasi turunan fungsi adalah jembatan vital yang menghubungkan konsep abstrak kalkulus dengan realitas dunia di berbagai disiplin ilmu. Guru dapat memulai kegiatan pada subbab ini dengan reviu mendalam konsep dasar turunan dan memastikan setiap peserta didik memahami interpretasi geometris (gradien garis singgung) dan fisis (laju perubahan sesaat), serta menguasai berbagai aturan turunan. Selanjutnya, peserta didik dapat diajak terlibat dalam diskusi kelompok dan analisis studi kasus. Mereka akan menganalisis permasalahan nyata yang memerlukan aplikasi turunan, seperti mengoptimalkan keuntungan dalam ekonomi, menghitung laju pertumbuhan populasi dalam biologi, atau menentukan kecepatan sesaat dalam fisika. Untuk memperkaya pemahaman, guru dapat merancang proyek mini yang bertujuan mengidentifikasi masalah dari bidang minat peserta didik, kemudian memformulasikannya secara matematis menggunakan turunan dan menyajikan solusinya.

**Ayo Mencoba 2.10**

- Untuk menentukan panjang lintasan s atau nilai ketinggian, substitusikan t pada persamaan $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ sehingga

untuk $t = 0$, maka $s = f(0) = 0$ m,

untuk $t = 1$, maka $s = f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ m,

untuk $t = 2$, maka $s = f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$ m.

- Untuk menentukan kecepatan (v), dapat menggunakan konsep turunan pertama suatu fungsi, sehingga

$$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

maka

$$\begin{aligned} v &= \frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 6t^2 + 9t) \\ &= 3t^2 - 12t + 9. \end{aligned}$$

Kecepatan dapat dihitung dengan menyubstitusi nilai t ke $v = 3t^2 - 12t + 9$.

Kecepatan saat $t = 0$ detik adalah $v = 9$ m/s.

Kecepatan saat $t = 1$ detik adalah $v = 3 - 12 + 9 = 0$ m/s.

Kecepatan saat $t = 2$ detik adalah $v = 12 - 24 + 9 = -3$ m/s.

Kecepatan bernilai negatif menunjukkan partikel bergerak berlawanan arah, misalnya semula partikel bergerak ke arah Utara, kemudian beralih ke arah Selatan.

- Untuk menentukan percepatan (a), dapat menggunakan konsep turunan kedua suatu fungsi, sehingga

$$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

maka

$$a = \frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(t^3 - 6t^2 + 9t) = 6t - 12.$$

Percepatan dapat dihitung dengan menyubstitusi nilai t ke $a = 6t - 12$.

Percepatan saat $t = 0$ detik adalah $a = 6(0) - 12 = -12$ m/s².

Percepatan saat $t = 1$ detik adalah $a = 6(1) - 12 = -6$ m/s².

Percepatan saat $t = 2$ detik adalah $a = 6(2) - 12 = 0$ m/s².



Ayo Berpikir Kritis

Guru mengajak peserta didik untuk mengamati grafik jumlah kasus baru positif harian Covid-19 di Jakarta dari tanggal 16 Maret 2020 hingga 20 Agustus 2020. Peserta didik diajak mengamati bahwa grafik menunjukkan fluktuasi, namun secara umum cenderung naik (meningkat). Guru kemudian menjelaskan bahwa meskipun data sering kali teratur, peneliti dapat menggunakan pemodelan matematika untuk memahami pola umum. Salah satu hasil estimasi ditunjukkan melalui fungsi $f(x) = 48,26x^3 + 44,37x^2 - 22,18x + 17,57$, dengan x adalah estimasi bulan.

Guru mengarahkan peserta didik untuk berpikir kritis dengan mengajukan beberapa pertanyaan berikut.

- ▶ Apa arti fungsi estimasi ini dalam konteks kasus Covid-19?
- ▶ Mengapa model diperlukan meskipun data nyata naik-turun?
- ▶ Bagaimana fungsi ini membantu memprediksi tren ke depan?

Guru menekankan bahwa berpikir kritis berarti mampu membandingkan data nyata dengan model, memahami manfaat pemodelan untuk membaca tren, serta menyadari keterbatasan dalam menggambarkan kondisi sebenarnya.

Selanjutnya, guru membuka ruang diskusi dengan mengajukan pertanyaan pemandu yang akan mendorong mereka untuk mengestimasi laju penambahan orang terkonfirmasi Covid-19. Diskusi juga akan mencakup pentingnya titik ekstrem dalam konteks dunia nyata, yaitu dalam masalah optimasi kasus Covid-19 mencapai puncak. Melalui pertukaran ide ini, peserta didik diharapkan dapat mencapai pemahaman kolektif yang lebih mendalam, mengidentifikasi dan mengoreksi miskonsepsi, serta memperkuat keterampilan komunikasi matematis mereka. Dengan demikian, pemahaman tentang aplikasi konsep turunan fungsi dalam berbagai bidang ilmu menjadi lebih holistik dan bermakna.

G. Sumatif

1. Guru menugaskan peserta didik untuk menyelesaikan Uji Kompetensi Bab 2.
2. Uji kompetensi ini dapat digunakan sebagai salah satu alternatif untuk melakukan evaluasi sumatif pada akhir pembelajaran.

2. Peserta didik didorong untuk berpikir kritis, kreatif, dan inovatif melalui asesmen ini (*berkesadaran*), yang mencakup pemahaman tentang bagaimana mereka menerapkan konsep turunan fungsi. Peserta didik juga didorong untuk membuat hubungan yang signifikan antara konten matematis dan skenario dunia nyata (*bermakna*), seperti mengaitkan konsep turunan fungsi pada kehidupan sehari-hari. Untuk menumbuhkan lingkungan belajar yang ceria dan menyenangkan (*menggembirakan*), asesmen ini disusun sebagai proyek kreatif yang memberi peserta didik kesempatan untuk bekerja secara mandiri, kolaboratif, dan berkomunikasi berdasarkan temuan mereka secara interaktif di depan kelas.
3. Asesmen ini mengevaluasi kemampuan kognitif peserta didik dalam memahami materi turunan fungsi sekaligus mendorong kreativitas, keingintahuan, dan komunikasi. Berdasarkan pendekatan ini, peserta didik diharapkan dengan penuh kesadaran dapat mempelajari matematika secara mendalam (*berkesadaran*), relevan (*bermakna*), dan menyenangkan (*menggembirakan*).

Contoh kisi-kisi untuk asesmen sumatif pada materi turunan fungsi dapat dilihat pada Tabel 2.4, sedangkan rubrik penskoran asesmen sumatif dapat dilihat pada Tabel 2.5.

Tabel 2.4 Contoh Kisi-Kisi Penilaian Uji Kompetensi (Asesmen Sumatif)

No.	Tujuan Pembelajaran	Materi	Indikator	Teknik Penilaian	No. Soal	Level SOLO	Jumlah
1.	Peserta didik mampu menerapkan konsep turunan fungsi.	Definisi Turunan Fungsi	Menggunakan konsep turunan fungsi untuk menentukan turunan fungsi sederhana.	Uraian singkat Menjodohkan	A1 B1	Unistruktural Unistruktural	2
2.	Peserta didik mampu menerapkan sifat-sifat turunan untuk menentukan turunan fungsi.	Sifat-Sifat Turunan Fungsi	Menggunakan aturan turunan untuk menentukan turunan fungsi aljabar.	Uraian singkat Menjodohkan Uraian	A2 A3 A4 A7 A8 B3 B4 B5 C1a	Multistruktural Unistruktural Multistruktural Multistruktural Multistruktural Unistruktural Unistruktural Unistruktural Unistruktural	9
			Menggunakan aturan turunan untuk menentukan turunan fungsi trigonometri.	Uraian singkat Menjodohkan Uraian	A5 A6 B2 C1b	Multistruktural Multistruktural Unistruktural Unistruktural	4

No.	Tujuan Pembelajaran	Materi	Indikator	Teknik Penilaian	No. Soal	Level SOLO	Jumlah
3.	Peserta didik mampu mengidentifikasi konsep kemonotonan fungsi, titik dan nilai stasioner, serta jenis ekstremnya.	Aplikasi Turunan Fungsi	Menjelaskan definisi kemonotonan fungsi (naik dan turun) dan menentukan intervalnya.	Uraian singkat	A14	Relasional	1
			Mengidentifikasi titik stasioner dan nilai stasioner, serta menghitungnya.	Uraian singkat	A9 A15	Relasional Relasional	2
			Mengenali jenis-jenis titik ekstrem fungsi dan menggunakan uji turunan (pertama dan kedua) untuk menentukan jenis ekstrem fungsi.	Uraian singkat	A10 A11 A12 A13	Relasional Multistruktural Multistruktural Relasional	4
4.	Peserta didik mampu menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menerapkan konsep kemonotonan fungsi, titik dan nilai stasioner, serta jenis ekstremnya.		Menerapkan turunan fungsi untuk menyelesaikan permasalahan percepatan dan kecepatan.	Uraian	C4	Relasional	1
			Menerapkan turunan fungsi untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan titik optimum (nilai maksimum dan nilai minimum).	Uraian singkat	A16 A17 A18 A19 A20	Relasional Relasional Relasional Relasional	5
		Uraian		C2 C3	Relasional Relasional	2	

Tabel 2.5 Contoh Rubrik Penskoran untuk Soal Berbentuk Uraian

Langkah	Skor	Indikator Penskoran
Memahami masalah	3	Peserta didik mampu menuliskan (mengungkapkan) apa yang diketahui dan ditanyakan dari masalah yang diajukan dengan jelas.
	2	Peserta didik hanya menuliskan (mengungkapkan) apa yang diketahui atau apa yang ditanyakan.
	1	Peserta didik menuliskan (mengungkapkan) data/konsep/ pengetahuan yang tidak berhubungan dengan masalah yang diajukan.
	0	Peserta didik tidak menuliskan apa pun sehingga tidak memahami makna dari masalah yang diajukan.

Langkah	Skor	Indikator Penskoran
Merencanakan penyelesaian	2	Peserta didik menuliskan/menceritakan syarat cukup dan syarat perlu (rumus) dari masalah yang diajukan serta menggunakan semua informasi yang telah dikumpulkan.
	1	Peserta didik menceritakan/menuliskan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah, tetapi tidak runtut.
	0	Peserta didik tidak menceritakan/menuliskan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah.
Melaksanakan rencana	4	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, menggunakan langkah-langkah menyelesaikan masalah dengan benar, tidak terjadi kesalahan prosedur, dan tidak terjadi kesalahan algoritma/perhitungan.
	3	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, menggunakan langkah-langkah menyelesaikan masalah dengan benar, dan tidak terjadi kesalahan prosedur, tetapi terjadi kesalahan algoritma/perhitungan.
	2	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, tetapi terjadi kesalahan prosedur.
	1	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, tetapi terjadi kesalahan prosedur dan kesalahan algoritma/perhitungan.
	0	Peserta didik tidak mampu melaksanakan rencana yang telah dibuat.
Memeriksa kembali	1	Peserta didik melakukan pemeriksaan kembali jawaban.
	0	Peserta didik tidak melakukan pemeriksaan kembali jawaban.

Catatan:

1. Guru dapat menetapkan bobot yang berbeda-beda antara aspek satu dan lainnya (sebagaimana contoh rubrik penskoran pada Tabel 2.5) dengan memperhatikan karakteristik tujuan pembelajaran atau keterampilan yang dinilai.
2. Alternatif perhitungan pemberian nilai:

$$\text{Nilai} = (\text{skor bagian A}) + (\text{skor bagian B}) + (\text{skor bagian C})$$

H. Kunci Jawaban

Latihan Soal Definisi Turunan Fungsi

$$\begin{aligned}
 1. \quad a. \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2) &= \lim_{x \rightarrow 3} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 3} 2 && (\text{Sifat Limit 3}) \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow 3} x \right)^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 2 = 3^2 + 2 = 11 && (\text{Sifat Limit 6, 1}).
 \end{aligned}$$

b. Dengan menggunakan sifat-sifat limit, diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 1} ((\sqrt{5x+4} - \sqrt{16-7x})) = 0.$$

c. Dengan menggunakan sifat-sifat limit, diperoleh

$$\lim_{y \rightarrow 2} \left(\sqrt{\frac{y^2}{2y^2 + 7y + 3}} \right) = \frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{(\sin x - \cos x) \cos x}{\cos x - \sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (-\cos x) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

e. Misalkan $y = x - \frac{\pi}{2}$ atau $x = \frac{\pi}{2} + y$. Perhatikan bahwa jika x mendekati $\frac{\pi}{2}$ maka y mendekati 0, sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x - \pi}{\cos x} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - \pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2y}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)} \right) \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)} \right). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri yaitu $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, diperoleh

$$\begin{aligned} 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)} \right) &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{\cos \frac{\pi}{2} \cos y - \sin \frac{\pi}{2} \sin y} \right) \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{0 \cos y - 1 \sin y} \right) \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{-\sin y} \right) = -2. \end{aligned}$$

2. Karena $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(g(x) \frac{-3}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \right) &= \left(\lim_{x \rightarrow 3} g(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-3}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \right) \right) && \text{(Sifat Limit 4)} \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-3}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \right) \right) = 2 \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (-3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x} + \sqrt{3})} \right) && \text{(Sifat Limit 5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (-3)}{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3}} \right) && \text{(Sifat Limit 3)} \\
&= 2 \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (-3)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x} + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} 3}} \right) && \text{(Sifat Limit 7)} \\
&= 2 \left(\frac{-3}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \right) = 2 \left(-\frac{3}{2\sqrt{3}} \right) && \text{(Sifat Limit 1)} \\
&= 2 \left(-\frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

3. Untuk mengetahui apakah $g(x)$ kontinu di R , kita perlu membuktikan bahwa $g(x)$ kontinu di semua titik dalam R dengan langkah-langkah berikut: (a) menentukan fungsi $g(x)$ kontinu untuk $x < 2$; (b) menentukan fungsi $g(x)$ kontinu untuk $x > 2$; dan (c) menentukan fungsi $g(x)$ kontinu di $x = 2$.

- (a) Untuk $x < 2$, fungsi $g(x) = -x + 3$. Misalkan ambil sebarang $c \in R$, dengan $c < 2$.

- ▶ $g(c) = -c + 3 \in R$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} (-x + 3) = -c + 3 \in R$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$.

Berdasarkan definisi, disimpulkan $g(x)$ kontinu di $x < 2$.

- (b) Untuk $x > 2$, fungsi $g(x) = x^2 - 3$. Misalkan ambil sebarang $c \in R$, dengan $c > 2$.

- ▶ $g(c) = c^2 - 3 \in R$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} (x^2 - 3) = c^2 - 3 \in R$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$.

Berdasarkan definisi, disimpulkan $g(x)$ kontinu di $x > 2$.

- (c) Untuk $x = 2$, maka

- ▶ $g(2) = -2 + 3 = 1$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ didekati dari kiri, diperoleh $\lim_{x \rightarrow 2} (-x + 3) = -2 + 3 = 1$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ didekati dari kanan, diperoleh $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$.

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2).$$

Berdasarkan definisi, disimpulkan $g(x)$ kontinu di $x = 2$.

Karena nilai $g(x)$ kontinu di $x > 2$, $x < 2$, dan $x = 2$, maka $g(x)$ kontinu di R .

4. Turunan fungsi $f(x)$ adalah $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

a. $f(x) = -2x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x+h)^2 - (-2x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x^2 + 2hx + h^2) - (-2x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4hx - 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4x - 2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-4x - 2h) = -4x - 0 = -4x. \end{aligned}$$

Jadi, $f'(-2) = 8$ dan $f'(0) = 0$.

b. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2hx + h^2) - \left(\frac{1}{2}x^2\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h(2x + h)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = \frac{1}{2}(2x) + 0 = x. \end{aligned}$$

Jadi, $f'(-2) = -2$ dan $f'(0) = 0$.

c. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2}(x+h) - 3\right) - \left(\frac{1}{2}x - 3\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2}(x+h) - 3\right) - \left(\frac{1}{2}x - 3\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, $f'(-2) = f'(0) = \frac{1}{2}$.

Latihan Soal Sifat-Sifat Turunan Fungsi

1. a. Diketahui fungsi $y = (3x^2 - 5)\cos x$.

Misal: $u(x) = 3x^2 - 5$ maka $u'(x) = 6x$,

$v(x) = \cos x$ maka $v'(x) = -\sin x$.

$y = u(x) \cdot v(x) = (3x^2 - 5) \cdot \cos x$, maka

$$\begin{aligned} y' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (6x)(\cos x) + (3x^2 - 5)(-\sin x) \\ &= 6x \cos x - (3x^2 - 5)\sin x. \end{aligned}$$

- b. Diketahui fungsi $y = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{-4}$.

Misal: $u(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$, maka $u'(x) = 3x^2 + \frac{-2x}{(x^2)^2} = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$,

$$n = -4.$$

$$\begin{aligned} y' &= [u(x)^n]' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x) \quad (\text{Aturan Rantai}) \\ &= -4 \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{-5} \left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right). \end{aligned}$$

- c. Diketahui fungsi $y = \sqrt{\frac{1}{(2x+3)^3}} = (2x+3)^{-\frac{3}{2}}$.

Misal: $u(x) = 2x+3$ maka $u'(x) = 2$,

$$n = -\frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} y' &= [u(x)^n]' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x) \quad (\text{Aturan Rantai}) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)(2x+3)^{-\frac{3}{2}-1} (2) = -\frac{3}{(2x+3)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

- d. Diketahui fungsi $y = (2 + \cos x)^4$.

Misal: $u(x) = 2 + \cos x$ maka $u'(x) = -\sin x$,

$$n = 4.$$

$$\begin{aligned} y' &= [u(x)^n]' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x) \\ &= 4 \cdot (2 + \cos x)^{4-1} \cdot (-\sin x) \\ &= -4 \sin x (2 + \cos x)^3. \end{aligned}$$

- e. Diketahui fungsi $y = e^{\sqrt{x-7}} = e^{(x-7)^{\frac{1}{2}}}$. Dengan menggunakan Sifat Turunan $e^{f(x)}$ diperoleh $y' = e^{(x-7)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2}(x-7)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{e^{\sqrt{x-7}}}{2\sqrt{x-7}}$.
- f. Diketahui fungsi $y = 12^{7x-4}$. Dengan menggunakan Aturan Rantai dan Sifat Turunan a^x , diperoleh $y' = (\ln 12)(12^{7x-4})(7) = 7(\ln 12)12^{7x-4}$.

2. ► Luas bola (L) = $4\pi r^2$ sehingga $\frac{dL}{dr} = 8\pi r$ dan $r = 30$ cm.

Laju pertambahan panjang jari-jari 2 cm per detik, maka laju bertambahnya luas permukaan bola adalah

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi r t = 8\pi(30)(2) = 480\pi \text{ cm}^2/\text{detik}.$$

- Volume bola (V) = $\frac{4}{3}\pi r^3$ sehingga $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$.

Laju pertambahan panjang jari-jari 2 cm per detik, maka laju bertambahnya volume bola adalah

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 t = 4\pi(30)^2(2) = 7.200\pi \text{ cm}^3/\text{detik}.$$

3. Diketahui fungsi $f(x) = 2 - 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$.

a. $f'(x) = -2\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -\pi\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\right)$.

b. $f'(x) = 0$, maka $-\pi\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\right) = 0$.

$f'(x)$ akan bernilai 0 jika dan hanya jika $\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = 0$ pada daerah asal $D_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \in R\}$ sehingga nilai x yang memenuhi adalah $x = 1$ dan $x = 3$. Jadi, $x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 3^2 = 10$.

4. Diketahui fungsi $A(t) = 2,43e^{0,18t}$.

Jumlah pengeluaran perusahaan dicari menggunakan turunan pertama dari $A(t)$, yaitu

$$A'(t) = (2,43)e^{0,18t}(0,18) = (0,4374)e^{0,18t}.$$

Untuk memprediksi jumlah pengeluaran perusahaan pada tahun 2025, tentukan nilai t yang menunjukkan tahun.

$$t = 2025 - 2010 = 15,$$

sehingga

$$A'(15) = (0,4374)e^{0,18(15)} = (0,4374)e^{2,7}.$$

Jadi, perkiraan jumlah pengeluaran perusahaan tersebut untuk membelanjakan buah dan sayur organik pada tahun 2025 adalah $(0,4374)e^{2,7}$ miliar rupiah.

5. Diketahui fungsi $V(t) = 52.000.000(0,80)^t$.

Nilai penyusutan aset mesin fotokopi dicari menggunakan turunan pertama dari $V(t)$, yaitu

$$V'(t) = (52.000.000) \ln 0,80 (0,80)^t,$$

sehingga

$$\begin{aligned} V'(10) &= (52.000.000) \ln 0,80 (0,80)^{10} \\ &= (52.000.000 \times 0,1073) \ln 0,80 \\ &= (5.579.600) \ln 0,80. \end{aligned}$$

Jadi, nilai penyusutan aset mesin fotokopi setelah 10 tahun pembelian adalah $(5.579.600) \ln 0,80$ rupiah.

Latihan Soal Aplikasi Turunan Fungsi

1. a. Diketahui kurva $y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2}$ dan garis $x + 2y + 3 = 0$.

Kemiringan garis $x + 2y + 3 = 0$ adalah $m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$.

Garis singgung kurva $y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2}$ sejajar dengan garis $x + 2y + 3 = 0$ sehingga kemiringannya adalah $m_2 = m_1 = -\frac{1}{2}$.

$$y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2} = x^2 - \frac{31}{5}x + \frac{29}{2}.$$

$$y' = 2x - \frac{31}{5}.$$

Dari hubungan y' dan m_2 , maka

$$\begin{aligned} m_2 &= y' \\ -\frac{1}{2} &= 2x - \frac{31}{5} \\ -\frac{1}{2} + \frac{31}{5} &= 2x \\ \frac{57}{10} &= 2x \\ x &= \frac{57}{20}. \end{aligned}$$

Substitusikan $x = \frac{57}{20}$ pada $y = x^2 - \frac{31}{5}x + \frac{29}{2}$ sehingga

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{57}{20}\right)^2 - \frac{31}{5}\left(\frac{57}{20}\right) + \frac{29}{2} = \frac{3.249}{400} - \frac{1.767}{100} + \frac{29}{2} \\ &= \frac{3.249 - 7.068 + 5.800}{400} = \frac{1.981}{400}. \end{aligned}$$

Persamaan garis singgung di titik $\left(\frac{57}{20}, \frac{1.981}{400}\right)$ dengan $m = -\frac{1}{2}$ adalah

$$y - \frac{1.981}{400} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{57}{20}\right)$$

$$2y - \frac{3.962}{400} = -x + \frac{57}{20}$$

$$x + 2y - \frac{3.962}{400} + \frac{57}{20} = 0$$

$$x + 2y - \frac{2.822}{100} = 0.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $x + 2y - \frac{2.822}{100} = 0$.

- b. Substitusikan $y = 4$ ke persamaan kurva $y = 2x^2 - 3x + 5$, diperoleh

$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Dengan memfaktorkan persamaan $2x^2 - 3x + 1 = 0$, diperoleh

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ atau } x_2 = 1.$$

Turunan pertama kurva $y = 2x^2 - 3x + 5$ adalah $y' = 4x - 3$.

Untuk $x_1 = \frac{1}{2}$ maka $m_1 = y'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$. Persamaan garis singgung melalui titik $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ dengan $m_1 = -1$ adalah

$$y - 4 = -1\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y - 4 = -x + \frac{1}{2}$$

$$2y - 8 = -2x + 1$$

$$2x + 2y - 9 = 0.$$

Untuk $x_2 = 1$ maka $m_2 = y'(1) = 1$. Persamaan garis singgung melalui titik $(1, 4)$ dengan $m_2 = 1$ adalah

$$y - 4 = 1(x - 1)$$

$$y = x - 1 + 4$$

$$y = x + 3.$$

Jadi, persamaan garis singgung dari kurva $y = 2x^2 - 3x + 5$ pada titik berordinat 4 adalah $2x + 2y - 9 = 0$ dan $y = x + 3$.

- c. Diketahui kurva $y = \sqrt{8x - 4}$ dan garis $2x + 4y + 1 = 0$.

Kemiringan garis $2x + 4y + 1 = 0$ adalah $m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Kurva $y = \sqrt{8x - 4}$ tegak lurus dengan garis $2x + 4y + 1 = 0$ sehingga kemiringannya adalah $m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$.

$$y = \sqrt{8x-4} = (8x-4)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(8x-4)^{-\frac{1}{2}}(8) = \frac{4}{\sqrt{8x-4}}.$$

Dari hubungan y' dan m_2 , maka

$$m_2 = y'$$

$$2 = \frac{4}{\sqrt{8x-4}}$$

$$2\sqrt{8x-4} = 4$$

$$\sqrt{8x-4} = 2$$

$$8x-4 = 4$$

$$8x = 8$$

$$x = 1.$$

Substitusikan $x = 1$ pada $y = \sqrt{8x-4}$, diperoleh

$$y = \sqrt{8(1)-4} = \sqrt{4} = 2.$$

Persamaan garis singgung di titik $(1, 2)$ dengan $m = 2$ adalah

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y - 2 = 2x - 2$$

$$y = 2x.$$

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = \sqrt{8x-4}$ yang tegak lurus dengan garis $2x + 4y + 1 = 0$ adalah $y = 2x$.

2. Titik potong fungsi $y = 2x^2 - 3x + 7$ dengan garis $y = 4x + 1$ dapat dicari dengan menyamakan kedua fungsi tersebut sehingga

$$2x^2 - 3x + 7 = 4x + 1$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(2x - 3)(x - 2) = 0,$$

diperoleh $x = \frac{3}{2}$ atau $x = 2$.

Dengan menyubstitusikan nilai x ke $y = 4x + 1$, diperoleh titik potong $(\frac{3}{2}, 7)$ dan $(2, 9)$.

Turunan pertama fungsi $y = 2x^2 - 3x + 7$ adalah $y' = 4x - 3$.

Gradien garis singgung kurva di titik $(\frac{3}{2}, 7)$ adalah

$$m = y'(\frac{3}{2}) = 4(\frac{3}{2}) - 3 = 3,$$

sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 7 = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y - 7 = 3x - \frac{9}{2}$$

$$y = 3x + \frac{5}{2}.$$

Gradien garis singgung kurva di titik $(2, 9)$ adalah

$$m = y'(2) = 4(2) - 3 = 5,$$

sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 9 = 5(x - 2)$$

$$y - 9 = 5x - 10$$

$$y = 5x - 1.$$

Jadi, persamaan garis singgung di titik potong fungsi $y = 2x^2 - 3x + 7$ dengan garis $y = 4x + 1$ adalah $y = 3x + \frac{5}{2}$ dan $y = 5x - 1$.

3. Diketahui kurva $y = 3x - \frac{3}{x^2}$.

Titik P merupakan titik potong kurva di sumbu- x , artinya $y = 0$, sehingga

$$3x - \frac{3}{x^2} = 0$$

$$3x^3 - 3 = 0$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x = 1.$$

Jadi, koordinat titik P adalah $(1, 0)$.

Selanjutnya, tentukan kemiringan yang melalui titik P .

$$y = 3x - \frac{3}{x^2} \text{ maka } y' = 3 + \frac{6}{x^3}.$$

Karena $x_P = 1$, maka $m = 3 + \frac{6}{1^3} = 9$.

Persamaan garis singgung melalui titik $(1, 0)$ dengan $m = 9$, yaitu

$$y - 0 = 9(x - 1) \text{ atau } y = 9x - 9.$$

Jadi, persamaan garis singgung kurva y di titik P adalah $y = 9x - 9$.

4. Diketahui kurva $y = (x^2 + 2)^2$. Titik A merupakan titik potong kurva di sumbu- y , artinya $x = 0$, sehingga ordinat titik A adalah

$$y_A = (0^2 + 2)^2 = 4.$$

Jadi, koordinat titik A adalah $(0, 4)$.

$$y = (x^2 + 2)^2 \text{ maka } y' = 2(x^2 + 2)(2x) = 4x(x^2 + 2).$$

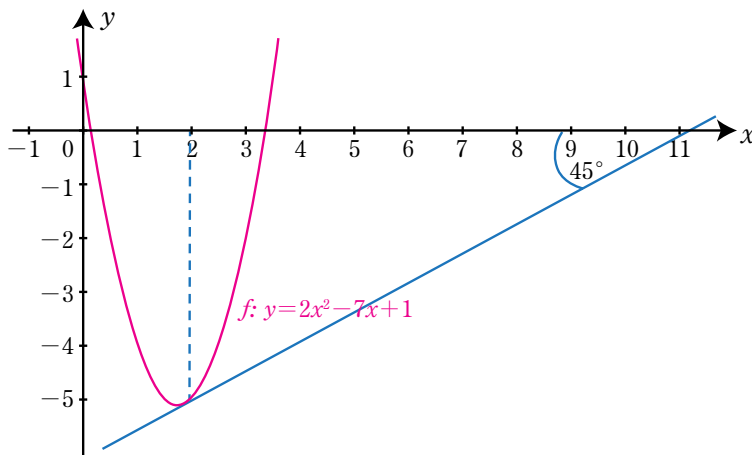
Misalkan titik $A(0, 4)$ merupakan titik singgung kurva $y = (x^2 + 2)^2$. Kemiringan garis singgung kurva tersebut adalah

$$m = y'(0) = 4(0)(0^2 + 2) = 0.$$

Akibatnya, garis singgung tersebut sejajar sumbu- x sehingga persamaan garis singgungnya adalah $y = 4$.

Jadi, terbukti bahwa garis singgung kurva $y = (x^2 + 2)^2$ melalui titik A , sejajar sumbu- x , dan berjarak 4 satuan terhadap titik pusat koordinat.

5. Gambar berikut merepresentasikan situasi pada soal.



Gambar 2.2 Grafik Fungsi $y = 2x^2 - 7x + 1$

Pertama-tama, tentukan kemiringan garis singgung.

$$m = \tan \alpha = \tan 45^\circ = 1.$$

Selanjutnya, tentukan titik singgung kurva $y = 2x^2 - 7x + 1$.

Kemiringan garis singgung merupakan nilai turunan pertama untuk x absis titik singgung sehingga

$$m = y'$$

$$1 = 4x - 7$$

$$x = 2,$$

maka

$$y = 2(2^2) - 7(2) + 1 = -5.$$

Diperoleh koordinat titik singgung $(2, -5)$.

Persamaan garis singgung melalui titik $(2, -5)$ dengan $m = 1$ adalah

$$y + 5 = 1(x - 2)$$

$$y + 5 = x - 2$$

$$x - y - 7 = 0.$$

Jadi, persamaan garis singgung kurvanya adalah $x - y - 7 = 0$.

6. a. Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$ maka $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Fungsi naik apabila $f'(x) > 0$, sehingga

$$3x^2 - 6x > 0$$

$$x^2 - 2x > 0,$$

maka $x < 0$ atau $x > 2$.

Fungsi turun apabila $f'(x) < 0$, sehingga

$$3x^2 - 6x < 0$$

$$x^2 - 2x < 0,$$

maka $0 < x < 2$.

Jadi, interval fungsi naik pada $x < 0$ atau $x > 2$ dan interval fungsi turun pada $0 < x < 2$.

- b. Fungsi $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 24$ maka $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$.

Titik puncak tercapai atau fungsi diam saat $f'(x) = 0$, sehingga

$$4x^3 - 24x^2 + 36x = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x(x^2 - 6x + 9) = 0,$$

diperoleh $x = 0$ dan $x = 3$.

Untuk $x < 0$, maka

$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 24(-1)^2 + 36(-1) = -64 < 0.$$

Untuk $0 < x < 3$, maka

$$f'(1) = 4(1^3) - 24(1^2) + 36(1) = 16 > 0.$$

Untuk $x > 3$, maka

$$f'(4) = 4(4^3) - 24(4^2) + 36(4) = 16 > 0.$$

Jadi, fungsi naik pada interval $0 < x < 3$ dan $x > 3$. Adapun fungsi turun pada interval $x < 0$.

c. Fungsi $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ maka $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

Fungsi naik apabila $f'(x) > 0$, sehingga

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} > 0.$$

Penyebut bernilai positif untuk $x \neq 1$, sehingga

$$x^2-2x-3 > 0,$$

maka $x < -1$ atau $x > 3$.

Fungsi turun apabila $f'(x) < 0$, sehingga

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} < 0.$$

Penyebut bernilai positif untuk $x \neq 1$, sehingga

$$x^2-2x-3 < 0,$$

maka $-1 < x < 3$. Karena $x \neq 1$, interval yang tepat adalah

$$-1 < x < 1 \text{ atau } 1 < x < 3.$$

Jadi, fungsi naik pada interval $x < -1$ atau $x > 3$ dan fungsi turun pada interval $-1 < x < 1$ atau $1 < x < 3$.

7. Fungsi $f(x) = ax^3 + x^2 + 5$ selalu naik dalam interval $0 < x < 2$ sehingga

$$(x-0)(x-2) < 0$$

$$x^2-2x < 0.$$

Persamaan ini dikalikan dengan (-1) , diperoleh

$$-x^2+2x > 0. \quad (1)$$

Karena $f(x) = ax^3 + x^2 + 5$, maka $f'(x) = 3ax^2 + 2x$.

Karena selalu naik, maka

$$f'(x) > 0$$

$$3ax^2 + 2x > 0. \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$3ax^2 + 2x = -x^2 + 2x$$

$$3ax^2 = -x^2$$

$$a = -\frac{x^2}{3x^2}$$

$$a = -\frac{1}{3}.$$

Jadi, nilai koefisien a adalah $-\frac{1}{3}$.

8. Fungsi $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ maka $f'(x) = 2 \cos 4x$.

Periode fungsi $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ adalah $\frac{\pi}{2}$.

Titik stasioner fungsi adalah $f'(x) = 0$, maka $2 \cos 4x = 0$, sehingga

$$\cos 4x = \cos \frac{\pi}{2} \quad \text{atau} \quad \cos 4x = \cos \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{8} \qquad \qquad x = \frac{3\pi}{8}$$

Titik kritis atau ekstrem pada setiap periode terjadi saat

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n \quad \text{dan} \quad x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, \text{ dengan } n \text{ bilangan cacah.}$$

Mengingat domain $f(x)$ adalah $0 < x < 2\pi$, nilai n yang mungkin adalah 0, 1, 2, atau 3.

Untuk $n = 0$, maka

untuk $0 < x < \frac{\pi}{8}$, nilai $f'\left(\frac{\pi}{16}\right) > 0 \rightarrow$ naik;

untuk $\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$, nilai $f'\left(\frac{3\pi}{16}\right) < 0 \rightarrow$ turun;

untuk $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{\pi}{2}$, nilai $f'\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0 \rightarrow$ naik.

Dengan memperhatikan temuan ini, diperoleh kesimpulan berikut.

- Fungsi $f(x)$ naik pada interval $\frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$ dan $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n$.
- Fungsi $f(x)$ turun pada interval $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$.

9. Fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, maka

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b. \quad (1)$$

Fungsi $f(x)$ hanya turun pada interval $-1 < x < 5$ sehingga -1 dan 5 adalah akar-akar dari persamaan $f'(x) = 0$. Supaya ekuivalen dengan $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3(x+1)(x-5) &= 0 \\ 3(x^2 - 4x - 5) &= 0 \\ 3x^2 - 12x - 15 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$2a = -12 \text{ maka } a = -6,$$

dan

$$b = -15,$$

Jadi, nilai $a + b = -6 + (-15) = -21$.

10. Partikel bergerak sepanjang kurva $s(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 18t - 1$, untuk $t \neq 0$.

a. Kecepatan ditentukan dengan $v(t) = \frac{ds}{dt}$ sehingga

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t) = 3t^2 - 15t + 18.$$

Adapun percepatan diperoleh dari $a(t) = s''(t) = 6t - 15$.

b. Ketika kecepatan partikel sama dengan nol, maka

$$v(t) = 0$$

$$3t^2 - 15t + 18 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Dengan memfaktorkan persamaan di atas, diperoleh $t_1 = 3$ atau $t_2 = 2$.

Jadi, nilai t ketika kecepatan nol adalah $t_1 = 3$ atau $t_2 = 2$.

c. $v(t) < 0$ (bernilai negatif).

Kecepatan partikel negatif pada interval $2 < t < 3$.

$v(t) > 0$ (bernilai positif).

Kecepatan partikel positif pada interval $t < 2$ atau $t > 3$.

d. Ketika percepatan partikel sama dengan 0, maka

$$a(t) = 0$$

$$6t - 15 = 0$$

$$t = \frac{15}{6} = 2,5.$$

Jadi, nilai t ketika percepatan 0 adalah $t = 2,5$.

11. a. Diketahui $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ maka

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \text{ dan } f''(x) = 6x - 12.$$

Dengan memfaktorkan $3x^2 - 12x + 9 = 0$, diperoleh bahwa $x_1 = 1$ atau $x_2 = 3$.

- Untuk $x_1 = 1$.

Dengan menyubstitusikan $x_1 = 1$ ke persamaan $f''(x) = 6x - 12$, diperoleh

$$f''(1) = 6(1) - 12 = -6 < 0,$$

maka $x_1 = 1$ merupakan absis dari titik balik maksimum. Ordinat dapat diperoleh dari menyubstitusikan $x_1 = 1$ ke $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

$$f(1) = 1^3 - 6(1^2) + 9(1) + 4 = 8.$$

Jadi, titik balik maksimumnya adalah $(1, 8)$.

- Untuk $x_2 = 3$.

Dengan menyubstitusikan $x_2 = 3$ ke persamaan $f''(x) = 6x - 12$, diperoleh

$$f''(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0,$$

maka $x_2 = 3$ merupakan absis dari titik balik minimum. Ordinat dapat diperoleh dari menyubstitusikan $x_2 = 3$ ke $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

$$f(3) = 3^3 - 6(3^2) + 9(3) + 4 = 27 - 54 + 27 + 4 = 4.$$

Jadi, titik balik minimumnya adalah $(3, 4)$.

- b. Diketahui $f(x) = 2x^2 + x + 3$ maka $f'(x) = 4x + 1$.

Absis titik balik ditentukan dari $f'(x) = 0$, yaitu

$$4x + 1 = 0 \text{ maka } x = -\frac{1}{4}.$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 = \frac{23}{8}.$$

Diperoleh titik ekstrem $\left(-\frac{1}{4}, \frac{23}{8}\right)$.

Untuk $x < -\frac{1}{4}$, fungsi $f'(x) < 0$ dan untuk $x > -\frac{1}{4}$, fungsi $f'(x) > 0$.

Jadi, titik $\left(-\frac{1}{4}, \frac{23}{8}\right)$ merupakan titik balik minimum.

- c. Diketahui $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ maka

$$f'(x) = \frac{1}{2}x \text{ dan } f''(x) = \frac{1}{2}.$$

Absis titik balik ditentukan dari $f'(x) = 0$, yaitu

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ maka } x = 0.$$

$$f(0) = \frac{1}{4}(0^2) - 2 = -2.$$

Diperoleh titik ekstrem $(0, -2)$.

Turunan fungsi $f''(x) > 0$ sehingga titik $(0, -2)$ merupakan titik balik minimum.

- d. Diketahui $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2}$ maka

$$f'(x) = \frac{-2x - 6}{x^3} \text{ dan } f''(x) = \frac{4x + 18}{x^4}.$$

Pada $\frac{-2x - 6}{x^3} = 0$, diperoleh bahwa $x = -3$. Karena $f''(-3) > 0$, maka $x = -3$ merupakan absis dari titik balik minimum. Ordinat dapat diperoleh dari menyubstitusikan $x = -3$ ke persamaan $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2}$ sehingga

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 + 6(-3) + 9}{3(-3)^2} = 0.$$

Jadi, titik balik minimumnya adalah $(-3, 0)$.

12. a. Fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ maka

$$f'(x) = \frac{1}{2}x \text{ dan } f''(x) = \frac{1}{2}.$$

Perhatikan bahwa titik belok $f(x)$ diperoleh saat $f''(x) = 0$. Karena $f''(x) \neq 0$, maka $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ tidak memiliki titik belok.

- b. Fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$ maka

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 \text{ dan } f''(x) = 6x - 12.$$

Syarat untuk menentukan titik belok adalah $f''(x) = 0$, sehingga

$$6x - 12 = 0 \text{ atau } x = 2.$$

Dengan menyubstitusikan $x = 2$ ke $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$, diperoleh

$$f(2) = 2^3 - 6(2^2) + 12(2) + 5 = 13.$$

Jadi, titik beloknya adalah $(2, 13)$.

13. a. Fungsi $f(x) = x^2 - 5x + 6$ maka $f'(x) = 2x - 5$ dan $f''(x) = 2$.

Pada $2x - 5 = 0$, diperoleh $x = \frac{5}{2}$.

Dengan menyubstitusikan $x = \frac{5}{2}$ ke $f(x)$ dan $f''(x)$, diperoleh

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4}.$$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2.$$

Karena $f''(x) > 0$ maka titik ekstrem $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ merupakan titik balik minimum dan $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ merupakan nilai balik minimum.

b. Fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ maka

$$f'(x) = x^2 + x - 2 \text{ dan } f''(x) = 2x + 1.$$

Dengan memfaktorkan $x^2 + x - 2 = 0$, diperoleh

$$x_1 = 1 \text{ atau } x_2 = -2.$$

Untuk $x_1 = 1$ maka

$$f(1) = \frac{23}{6} \text{ dan } f''(1) = 2(1) + 1 = 3 > 0.$$

Untuk $x_2 = -2$ maka

$$f(-2) = \frac{25}{3} \text{ dan } f''(-2) = 2(-2) + 1 = -3 < 0.$$

Dengan demikian,

- ▶ $f(x)$ memiliki titik balik minimum $\left(1, \frac{23}{6}\right)$ dan nilai balik minimum $f(1) = \frac{23}{6}$;
- ▶ $f(x)$ memiliki titik balik maksimum $\left(-2, \frac{25}{3}\right)$ dan nilai balik maksimum $f(-2) = \frac{25}{3}$.

14. Diketahui a dan b adalah akar-akar dari persamaan $x^2 + 5px + p^3 - 4p + 1 = 0$.

Dari $x^2 + 5px + p^3 - 4p + 1 = 0$, diperoleh jumlah akar dan hasil kali akar berikut:

$$a + b = -5p,$$

$$ab = p^3 - 4p + 1,$$

sehingga

$$a + ab + b = -5p + (p^3 - 4p + 1) = p^3 - 9p + 1.$$

Misalkan $f(p) = p^3 - 9p + 1$ bernilai maksimum pada $-3 < p < 3$, maka

$$f'(p) = 3p^2 - 9 = 3(p^2 - 3) = 3(p - \sqrt{3})(p + \sqrt{3}).$$

Diperoleh $p = -\sqrt{3}$ dan $p = \sqrt{3}$ dengan batas $-3 < p < 3$.

Dari garis bilangan diperoleh bahwa $f(p)$ berpotensi bernilai maksimum pada $p = -\sqrt{3}$ atau $p = 3$.

Kita dapat mengujinya dengan menyubstitusi nilai p ke $f(p)$.

$$p = -\sqrt{3}, \text{ maka } f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9(-\sqrt{3}) + 1 = 6\sqrt{3} + 1.$$

$$p = 3, \text{ maka } f(3) = 3^3 - 9(3) + 1 = 1.$$

Jadi, agar $a + ab + b$ bernilai maksimum pada $-3 < p < 3$, maka nilai p adalah $-\sqrt{3}$.

15. Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ maka $f'(x) = 2ax + b$.

Untuk menentukan titik ekstrem, terlebih dahulu cari $f'(x) = 0$, maka

$$2ax + b = 0 \text{ sehingga } x = -\frac{b}{2a}.$$

Dengan menyubstitusikan $x = -\frac{b}{2a}$ pada $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Jadi, terbukti bahwa setiap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$ mempunyai tepat satu titik ekstrem, yaitu $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Latihan Soal Aplikasi Turunan Fungsi di Berbagai Bidang Ilmu

1. Diketahui biaya pembangunan jembatan dalam x hari adalah $y = \left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)x$. Turunan pertama dapat digunakan untuk menentukan waktu pembangunan agar biaya minimum.

$$y = \left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)x = 3x^2 - 900x + 120.$$

$$y' = 6x - 900$$

$$0 = 6x - 900$$

$$x = \frac{900}{6} = 150.$$

Jadi, lama pembangunan jembatan agar biaya minimum adalah 150 hari.

2. Misalkan kedua bilangan pada soal adalah x dan y , maka

$$x \cdot y = 80 \text{ atau } y = \frac{80}{x}.$$

Misal $A = x + y$ maka $A = x + \frac{80}{x}$.

Syarat A minimum yaitu $A' = 0$, maka

$$A' = 0$$

$$1 - 80x^{-2} = 0$$

$$x = 4\sqrt{5}.$$

Substitusikan $x = 4\sqrt{5}$ ke persamaan $y = \frac{80}{x}$.

$$y = \frac{80}{x} = 4\sqrt{5}.$$

Jadi, kedua bilangan real positif tersebut bernilai sama, yaitu $4\sqrt{5}$.

3. Diketahui lebar pelat seng adalah 30 cm.

Misalkan panjang sisi yang dilipat adalah x , maka

$$p = 30 - 2x \text{ dan } l = x.$$

Agar talang dapat dialiri air sebanyak-banyaknya, maka luas maksimal talang adalah $L'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} L(x) &= p \cdot l \\ &= (30 - 2x)(x) \\ &= 30x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 30x \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} L'(x) &= 0 \\ -4x + 30 &= 0 \\ -4x &= -30 \\ x &= \frac{-30}{-4} = 7,5. \end{aligned}$$

Ukuran panjang dan lebarnya adalah

$$p = 30 - 2x = 30 - 2(7,5) = 15 \text{ cm.}$$

$$l = x = 7,5 \text{ cm.}$$

Jadi, agar talang dapat dialiri air sebanyak-banyaknya, ukuran penampang tegak talang air tersebut adalah panjang 15 cm dan lebar 7,5 cm.

4. Luas maksimum persegi panjang $ABCD$ apabila $L'(x) = 0$.

$$L(x) = p \cdot l = 2x \cdot y = 2x \cdot (12 - x^2) = 24x - 2x^3,$$

maka

$$L'(x) = 24 - 6x^2$$

$$0 = 24 - 6x^2$$

$$6x^2 = 24$$

$$x^2 = \frac{24}{6}$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Untuk $x = -2$, maka

$$L(-2) = 24(-2) - 2(-2)^3 = -48 + 16 = -32.$$

Untuk $x = 2$, maka

$$L(2) = 24(2) - 2(2^3) = 48 - 16 = 32.$$

Jadi, luas maksimum persegi panjang $ABCD$ adalah 32 satuan luas.

5. Diketahui fungsi $f(x) = (225x - x^2)$ menyatakan keuntungan produksi sebuah barang. Keuntungan produksi sejumlah barang dapat ditentukan dengan

$$g(x) = f(x) \cdot x = (225x - x^2) \cdot x = 225x^2 - x^3.$$

Jumlah barang (x) agar keuntungan mencapai maksimum apabila $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = -3x^2 + 450x$$

$$0 = -3x^2 + 450x$$

$$0 = -3x(x - 150).$$

Diperoleh $x_1 = 0$ atau $x_2 = 150$.

Jadi, banyak barang yang diproduksi agar keuntungan maksimum adalah 150 buah.

Uji Kompetensi Bab 2

A. Isian Singkat

1. $y' = 6x - 5$.
2. $y' = 4(2x + 1)^3(2) = 8(2x + 1)^3$.

$$3. \quad g'(t) = \frac{2t(t+1) - (t^2-1)(1)}{(t+1)^2} = \frac{t^2+2t+1}{t^2+2t+1} = 1.$$

$$4. \quad h'(x) = 4 \text{ maka } h'(3) = 4.$$

$$5. \quad f'(x) = 2 \cos 2x \text{ maka } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$6. \quad f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

$$7. \quad \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} y' &= 1(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-1\frac{1}{2}}(2x) \\ &= (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2+1)^{-1\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1(x^2+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

$$8. \quad -\frac{3}{4}.$$

Penyelesaian:

$$y = \sqrt{25-x^2}.$$

$$y' = \frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$\text{Nilai } y' \text{ pada titik } (3, 4) \text{ adalah } -\frac{3}{\sqrt{25-9}} = -\frac{3}{4}.$$

$$9. \quad (1, 6) \text{ dan } (3, 2).$$

Penyelesaian:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ maka}$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0,$$

diperoleh $x_1 = 1$ atau $x_2 = 3$.

Untuk $x_1 = 1$, nilai $f(1) = 6$.

Untuk $x_2 = 3$, nilai $f(3) = 2$.

Jadi, titik stasioner adalah $(1, 6)$ dan $(3, 2)$.

10. 7.

Penyelesaian:

$$g(x) = -x^2 + 4x + 3 \text{ maka } g'(x) = -2x + 4.$$

$$g'(x) = 0$$

$$-2x + 4 = 0$$

$$x = 2.$$

Nilai balik maksimum adalah $g(2) = 7$.

11. Tidak.

Penyelesaian:

Fungsi $h(x) = x^3$ maka $h'(x) = 3x^2$ dan $h''(x) = 6x$.

$$h'(x) = 0, \text{ maka } 3x^2 = 0 \text{ atau } x = 0.$$

$$h(0) = 0.$$

Diperoleh titik stasioner $(0, 0)$.

Untuk $x < 0$, nilai $h'(-1) = 3 > 0$.

Untuk $x > 0$, nilai $h'(1) = 3 > 0$.

Jadi, fungsi $h(x)$ tidak memiliki titik balik maksimum maupun titik balik minimum.

12. $(2, 3)$.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 7$ maka $f'(x) = 2x - 4$.

$$f'(x) = 0, \text{ maka } 2x - 4 = 0 \text{ atau } x = 2.$$

$$f(2) = 2^2 - 4(2) + 7 = 3.$$

Jadi, koordinat titik balik minimum adalah $(2, 3)$.

13. Fungsi ini memiliki 1 titik balik minimum yaitu $(3, -27)$.

Penyelesaian:

Fungsi $k(x) = x^4 - 4x^3$ maka

$$k'(x) = 4x^3 - 12x^2 \text{ dan } k''(x) = 12x^2 - 24x.$$

$$\begin{aligned}
 k'(x) &= 0 \\
 4x^3 - 12x^2 &= 0 \\
 x^3 - 3x^2 &= 0 \\
 x(x(x-3)) &= 0,
 \end{aligned}$$

diperoleh $x_1 = 0$ atau $x_2 = 3$.

Untuk $x < 0$, nilai $k'(x) < 0 \rightarrow$ fungsi turun.

Untuk $0 < x < 3$, nilai $k'(x) < 0 \rightarrow$ fungsi turun.

Untuk $x > 3$, nilai $k'(x) > 0 \rightarrow$ fungsi naik.

Nilai $k''(3) = 36 > 0$. Artinya saat $x = 3$ terjadi minimum lokal dan $k'(x)$ berubah tanda. Sehingga titik balik minimumnya $(3, -27)$.

14. $0 < x < 2$.

Penyelesaian:

Perhatikan Gambar 2.3 untuk memahami posisi grafik.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 3x^2. \\
 f'(x) &= 3x^2 - 6x. \\
 f''(x) &= 6x - 6. \\
 f'(x) &= 0, \text{ maka} \\
 3x^2 - 6x &= 0 \\
 x^2 - 2x &= 0 \\
 x(x-2) &= 0,
 \end{aligned}$$

diperoleh $x_1 = 0$ dan $x_2 = 2$.

$f''(0) = -6 < 0$ (nilai balik maksimum).

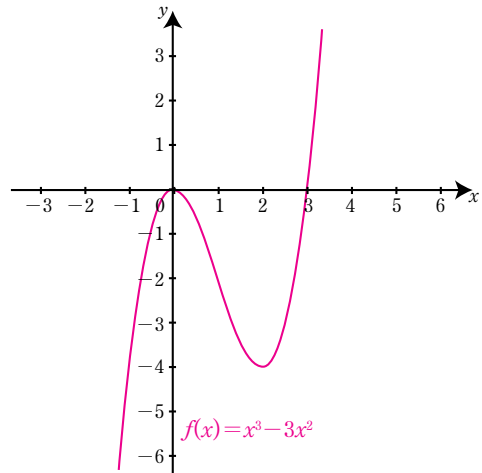
$f''(2) = 6 > 0$ (nilai balik minimum).

15. $x_1 = \frac{\pi}{4}$ dan $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \cos x - \sin x. \\
 f'(x) &= 0, \text{ maka } \cos x = \sin x.
 \end{aligned}$$

Nilai yang mungkin $x_1 = \frac{\pi}{4}$ dan $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.



Gambar 2.3 Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2$

16. 70 ribu rupiah.

Penyelesaian:

$$C'(x) = 0,2x + 50.$$

$$C'(100) = 0,2(100) + 50 = 70 \text{ ribu rupiah.}$$

17. 10 m/detik.

Penyelesaian:

$$h(t) = 30t - 5t^2, \text{ maka } h'(t) = 30 - 10t.$$

$$h'(2) = 30 - 10(2) = 10 \text{ m/detik.}$$

18. 0 mg/l.

Penyelesaian:

$$C(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned} C'(t) &= \frac{5(t^2 + 1) - 5t(2t)}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{5t^2 + 5 - 10t^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{5 - 5t^2}{(t^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

$C'(1) = 0$, artinya laju perubahan konsentrasi obat 0 mg/l setelah 1 jam.

19. panjang 25 meter dan lebar 25 meter.

Penyelesaian:

$$\text{Keliling persegi panjang} = 2(p + l) = 2p + 2l.$$

Keliling pagar 100 meter sehingga

$$2p + 2l = 100$$

$$p = 50 - l.$$

$$\text{Luas } (L) = p \times l = (50 - l) \times l = 50l - l^2.$$

$$L' = 0, \text{ maka}$$

$$50 - 2l = 0$$

$$l = 25.$$

$$p = 50 - l = 50 - 25 = 25.$$

20. Rp500.000,00.

Penyelesaian:

Biaya total produksi x unit barang adalah $C(x) = x^2 + 10x + 400$ (dalam ribuan rupiah).

Fungsi penerimaan $(R) = 70x$ (dalam ribuan rupiah).

$$\begin{aligned}\text{Keuntungan} &= R - C = 70x - (x^2 + 10x + 400) \\ &= 70x - x^2 - 10x - 400 = -x^2 + 60x - 400.\end{aligned}$$

Keuntungan maksimal tercapai saat turunan pertama sama dengan 0, diperoleh

$$-2x + 60 = 0 \text{ sehingga } x = 30.$$

Keuntungan untuk 30 unit $= -(30^2) + 60(30) - 400 = 500$ (dalam ribuan rupiah).

B. Menjodohkan

Fungsi	Turunan Fungsi
$f(x) = 4x^3 - 2x + 5$	A. $-3 \sin 3x$
$g(x) = \cos 3x$	B. $2(x+1)$
$h(x) = e^{2x}$	C. $12x^2 - 2$
$k(x) = \frac{1}{x^2}$	D. $-\frac{2}{x^3}$
$l(x) = (x+1)^2$	E. $2e^{2x}$
	F. $-2x^{-1}$
	G. $4x^2 - 2$
	H. $-2 \cos 3x \sin 3x$

C. Uraian

1. a. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{4+x}}$.

Misalkan $u = 4 + \sqrt{4+x}$ maka $f(x)$ dapat dinyatakan dengan

$$f(x) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}, \text{ sehingga } \frac{d}{du} u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} [\sqrt{4 + \sqrt{4 + x}}] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{4 + \sqrt{4 + x}}} \left[\frac{d}{dx} (4 + \sqrt{4 + x}) \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{4 + \sqrt{4 + x}}} \left[0 + \left(\frac{d}{dx} \sqrt{4 + x} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{4 + \sqrt{4 + x}}} \left[0 + \frac{1}{2\sqrt{4 + x}} \left(\frac{d}{dx} (4 + x) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{4 + \sqrt{4 + x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 + x}} = \frac{1}{4\sqrt{4 + \sqrt{4 + x}} \cdot \sqrt{4 + x}} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{4 + x} \sqrt{4 + \sqrt{4 + x}}}.
 \end{aligned}$$

Jadi, turunan pertamanya adalah $\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{4 + x} \sqrt{4 + \sqrt{4 + x}}}$.

b. Diketahui fungsi $h(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{\sin 2t}{2}$.

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3}t^3 \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin 2t}{2} \right) \\
 &= 2t^2 - \frac{1}{2}(2 \cos 2t) \\
 &= 2t^2 - \cos 2t.
 \end{aligned}$$

Jadi, turunan pertamanya adalah $2t^2 - \cos 2t$.

2. Diketahui bahwa kadar nutrisi bakteri mendekati fungsi $y = \csc\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 50$ mg dengan x adalah waktu dalam jam. Laju perubahan kadar nutrisi pada saat $x = \frac{\pi}{6}$ dapat dihitung dengan rumus

$$y = \csc\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 50, \text{ sehingga}$$

$$y' = -\frac{\pi}{10} \left(\csc \frac{\pi x}{10} \cot \frac{\pi x}{10} \right).$$

Kelajuan saat $x = \frac{\pi}{6}$ adalah

$$v = y' = -\frac{\pi}{10} \left(\csc \frac{\pi^2}{60} \cot \frac{\pi^2}{60} \right) \approx -11,56.$$

Jadi, laju perubahan kadar nutrisi pada saat $x = \frac{\pi}{6}$ adalah $-11,56$ mg/jam.

3. Keuntungan atau kerugian pabrik:

$$\begin{aligned}
 K(Q) &= R(Q) - C(Q) \\
 &= -2Q^2 + 1.000Q - (Q^3 - 59Q^2 + 1.315Q + 2.000) \\
 &= -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2.000.
 \end{aligned}$$

$$K'(Q) = -3Q^2 + 114Q - 315.$$

Titik ekstrem terjadi saat $K'(Q) = 0$, sehingga

$$-3Q^2 + 114Q - 315 = 0$$

$$Q^2 - 38Q + 105 = 0$$

$$(Q - 3)(Q - 35) = 0,$$

diperoleh $Q_1 = 3$ atau $Q_2 = 35$.

$$K''(Q) = -6Q + 114.$$

Pada saat $Q_1 = 3$, maka

$$K''(3) = -6(3) + 114 = 96 > 0 \text{ (kerugian maksimal).}$$

Pada saat $Q_2 = 35$, maka

$$K''(35) = -6(35) + 114 = -96 < 0 \text{ (keuntungan maksimal).}$$

- a. Pabrik sepatu akan mengalami keuntungan apabila barang yang terjual (Q) lebih dari 35 unit. Sementara itu, pabrik sepatu akan mengalami kerugian apabila barang yang terjual (Q) kurang dari 3 unit.
- b. Besar keuntungan maksimum ketika $Q = 35$ unit.

$$K(Q) = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2.000.$$

$$K(35) = -(35^3) + 57(35^2) - 315(35) - 2.000 = 13.925.$$

Jadi, keuntungan maksimum yang diperoleh adalah 13.925 juta rupiah.

Besar kerugian maksimum ketika $Q = 3$ unit.

$$K(Q) = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2.000.$$

$$K(3) = -(3^3) + 57(3^2) - 315(3) - 2.000 = -2.459.$$

Jadi, kerugian maksimal yang diperoleh adalah 2.459 juta rupiah.

4. Fungsi ketika anak panah ditembakkan secara vertikal ke udara dan jaraknya setelah t detik dalam keadaan melayang adalah $s(t) = -16t^2 + 80t$.

- a. Kecepatan setelah 2 detik.

$$v = \frac{ds}{dt} = s'(t) = -32t + 80.$$

$$v(t) = -32t + 80.$$

$$v(2) = -32(2) + 80 = -64 + 80 = 16 \text{ m/s.}$$

Jadi, kecepatan anak panah setelah 2 detik adalah 16 m/s.

- b. Tinggi maksimum anak panah $s'(t) = -32t + 80$.

$$s'(t) = 0$$

$$-32t + 80 = 0$$

$$t = \frac{-80}{-32} = 2,5.$$

Dengan menyubstitusikan $t = 2,5$ pada $s(t) = -16t^2 + 80t$, diperoleh

$$s(2,5) = -16(2,5)^2 + 80(2,5) = -100 + 200 = 100.$$

Jadi, tinggi anak panah itu ketika mulai jatuh menuju bumi adalah 100 m.

- c. Anak panah akan tiba di tanah saat $s(t) = 0$.

$$-16t^2 + 80t = 0$$

$$t^2 - 5t = 0$$

$$t(t - 5) = 0,$$

diperoleh $t_1 = 0$ atau $t_2 = 5$.

Jadi, waktu yang dibutuhkan anak panah untuk menyentuh tanah adalah 5 detik setelah anak panah ditembakkan.

- d. Percepatan anak panah:

$$v = -32t + 80$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32, \text{ sehingga } a(t) = \frac{dv}{dt} = -32.$$

Jadi, percepatannya adalah -32 m/s^2 .

5. $N(t) = 500e^{0,2t}$.

$$N'(t) = (500)e^{0,2t}(0,2) = 100e^{0,2t}.$$

$$N''(t) = (100)e^{0,2t}(0,2) = 20e^{0,2t}.$$

- a. Jumlah awal bakteri pada $t = 0$ adalah $N'(0) = 100e^0 = 100$ bakteri.

- b. Laju pertumbuhan bakteri setelah 3 jam adalah $N''(3) = 20e^{0,2(3)} = 20(1,8) \approx 36$ bakteri.

I. Tindak Lanjut

Tindak lanjut pembelajaran dilakukan untuk memastikan seluruh peserta didik mencapai tujuan pembelajaran secara optimal. Terdapat dua bentuk tindak lanjut yang diberikan, yaitu pengayaan bagi peserta didik yang telah mencapai tujuan pembelajaran dan remedial/pendampingan bagi peserta didik yang belum mencapai tujuan pembelajaran.

1. Peserta didik yang telah menunjukkan penguasaan kompetensi diberikan pengayaan untuk memperluas wawasan dan menantang kemampuan berpikir tingkat tinggi. Pengayaan dapat berupa:
 - a. mengaitkan materi pembelajaran dengan konteks nyata atau lintas mata pelajaran, seperti penerapannya dalam bidang ekonomi, fisika, atau ilmu kesehatan;
 - b. mengerjakan proyek mini atau studi kasus sederhana yang melibatkan konsep turunan dalam kehidupan sehari-hari;
 - c. menggunakan berbagai situs atau media yang membantu dalam pembelajaran turunan fungsi yang bersifat terbatas dan dipilih secara selektif. Situs atau media tersebut tidak berfungsi untuk mengulang materi, tetapi mengarahkan peserta didik pada eksplorasi tambahan, seperti simulasi interaktif atau visualisasi grafik fungsi turunan.

Pada Buku Siswa tersedia alternatif pengayaan berupa permasalahan yang berkaitan dengan *drone*. Guru dapat mengembangkan permasalahan ini menjadi sebuah proyek atau studi kasus.

2. Peserta didik yang mengalami kesulitan selama pembelajaran akan difasilitasi agar dapat mencapai kompetensi yang diharapkan. Berikut ini langkah-langkah yang dapat diambil.
 - a. Tutor sebaya, yaitu peserta didik yang sudah memahami materi membantu temannya melalui diskusi kelompok kecil.
 - b. Pendampingan guru saat peserta didik mengerjakan soal latihan yang tersedia dalam Buku Siswa, dengan penekanan pada pemahaman langkah demi langkah konsep turunan.
 - c. Pemberian umpan balik secara langsung dan bertahap agar peserta didik dapat memperbaiki kesalahan konseptual.

Pada Buku Siswa tersedia alternatif pengayaan yang berkaitan dengan permasalahan penjualan bola boling. Guru dapat mengembangkan permasalahan ini menjadi sebuah proyek atau studi kasus.

3. Penggunaan situs atau media digital sebagai sumber belajar tambahan dibatasi dan diarahkan secara bijak. Situs atau media digital hanya digunakan untuk memperluas wawasan peserta didik, seperti mengenal penggunaan turunan fungsi dalam dunia nyata atau mengembangkan

wawasan mengenai penggunaan turunan fungsi di berbagai bidang ilmu, bukan untuk mengulang materi pokok yang telah dijelaskan dalam pembelajaran inti.

J. Refleksi

Dalam proses pembelajaran pada materi turunan fungsi, refleksi bukan sekadar kegiatan akhir, melainkan juga sebagai bagian penting dari Pembelajaran Mendalam (*Deep Learning*) yang mendorong peserta didik untuk belajar secara sadar (*berkesadaran*), *bermakna*, dan *menggembirakan*.

1. Refleksi untuk Peserta Didik

Tabel berikut merupakan alternatif refleksi selain yang terdapat pada Buku Siswa.

Tabel 2.6 Refleksi untuk Peserta Didik

Tujuan Refleksi	Contoh Pertanyaan untuk Peserta Didik	Fungsi bagi Peserta Didik	Tindak Lanjut Guru
Berkesadaran Menyadari proses dan strategi pembelajaran	• Bagian mana dari materi turunan yang paling menantang bagiku? • Strategi apa yang berhasil dan yang gagal?	• Melatih metakognisi. • Mengenali gaya belajar sendiri.	• Menyediakan variasi strategi (peta konsep, kartu rumus, atau simulasi). • Menugaskan teman tutor untuk berbagi teknik yang efektif.
Bermakna Mengaitkan materi dengan konteks nyata	Di mana aku pernah melihat konsep laju perubahan sesaat dalam kehidupan sehari-hari?	• Menumbuhkan relevansi. • Memperkuat transfer pengetahuan.	Mendesain tugas proyek kontekstual (mampu menghitung produksi sepatu pabrik).
Menggembirakan Mengungkap emosi dan motivasi belajar	• Momen apa yang paling menyenangkan saat belajar turunan fungsi? • Apa yang membuatku kurang bersemangat?	• Menyuarakan kebutuhan afektif. • Meningkatkan rasa kepemilikan.	Menambahkan elemen gamifikasi, kuis berhadiah, atau permainan konsep.

2. Refleksi untuk Guru

Refleksi guru merupakan kunci Pembelajaran Mendalam karena guru akan menilai praktiknya secara berkesadaran (pengajaran berkesadaran), kemudian memastikan pembelajaran bermakna (pengajaran bermakna) dan menyenangkan bagi peserta didik (pengajaran menggembirakan).

Tabel 2.7 Refleksi Untuk Guru

Ranah	Pertanyaan Reflektif	Tindak Lanjut Konkret
Perencanaan	Apakah tujuan, aktivitas, dan asesmen turunan fungsi sudah selaras membangun <i>deep learning</i> ?	Melakukan revisi RPP atau modul ajar agar HOTS dan konteks nyata lebih ditekankan.
Pelaksanaan	• Bagaimana saya mempraktikkan pembelajaran berkesadaran di bab ini? • Tahapan mana yang sulit untuk membuat suasana menggembirakan?	• Menetapkan <i>mindful pause</i> 2 menit sebelum latihan sulit. • Menambah kegiatan <i>ice breaking</i> (visual) sebelum diskusi.
Respons peserta didik	30% peserta didik masih tidak berminat; apa yang harus diperbaiki?	Survei minat peserta didik, kemudian kontekstualisasikan soal ke hobi peserta didik (musik atau olahraga).
Profesionalisme	Bagian mana yang perlu saya perdalam agar penjelasan lebih sederhana?	Bergabung dengan PLC (komunitas kolaboratif antarpendidik yang terdiri atas guru, kepala sekolah, fasilitator, dll.) dan menyimak webinar <i>visual calculus</i> .

3. Alur Menindaklanjuti Hasil Refleksi

Langkah awal dalam menindaklanjuti hasil refleksi adalah dengan mengumpulkan data refleksi, misalnya melalui jurnal belajar peserta didik. Selanjutnya, guru perlu mengidentifikasi pola atau tantangan yang muncul, seperti kesulitan dalam memahami konsep, penggunaan strategi belajar yang kurang tepat, atau rendahnya motivasi belajar. Berdasarkan identifikasi tersebut, guru dapat merancang intervensi yang sesuai, seperti memberikan *mini lesson*, pendampingan melalui tutor sebaya, atau merancang proyek kontekstual. Intervensi ini kemudian diimplementasikan pada pertemuan berikutnya sesuai dengan kebutuhan peserta didik. Setelah itu, guru

melakukan evaluasi efektivitas intervensi dengan membandingkan hasil belajar sebelum dan sesudah perlakuan. Terakhir, guru melakukan refleksi ulang untuk meninjau apakah strategi yang diterapkan sudah tepat atau masih perlu diperbaiki dan disesuaikan agar pembelajaran semakin optimal.

K. Sumber Belajar

Berikut ini daftar buku atau sumber belajar lainnya yang dapat dijadikan sebagai alternatif referensi dalam kegiatan pembelajaran Bab 2.

1. Adam, L.J dan P.A. White. *Analytic Geometry and Calculus*. New York: Oxford University Press, 1968.
2. Bittinger, M.L. D.J. Ellenbogen, dan Scott J. Surgent. *Calculus and its Applications Tenth Edition*. Boston: Pearson Education, 2012.
3. Dumairy. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta, 2012.
4. Huberman, M., Bitter, C., Anthony, J., & O'Day, J. The Shape of Deeper Learning: Strategies, Structures, and Cultures in Deeper Learning Network High Schools. Findings from the Study of Deeper Learning Opportunities and Outcomes: Report 1. *American Institutes for Research*, 2014.
5. Purcell, E.J. dan Dale Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2003.
6. Quinn, J., McEachen, J., Fullan, M., Gardner, M., & Drummy, M. *Dive into deep learning: Tools for engagement*. California: Corwin Press, 2019.
7. Simangunsong, W. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlanga, 2005.
8. Stewart, J. *Single Variable Calculus: Concepts and Contexts, Enhanced Edition*. California: Brook ColeCengage, 2018.
9. Varberg, D., E.J. Purcell, dan S.E. Rigdon. *Kakulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2010.
10. Yahya, Yusuf, D. Suryadi H.S., dan Agus S. *Matematika Dasar Perguruan Tinggi*. Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia, 2001.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
REPUBLIK INDONESIA 2025

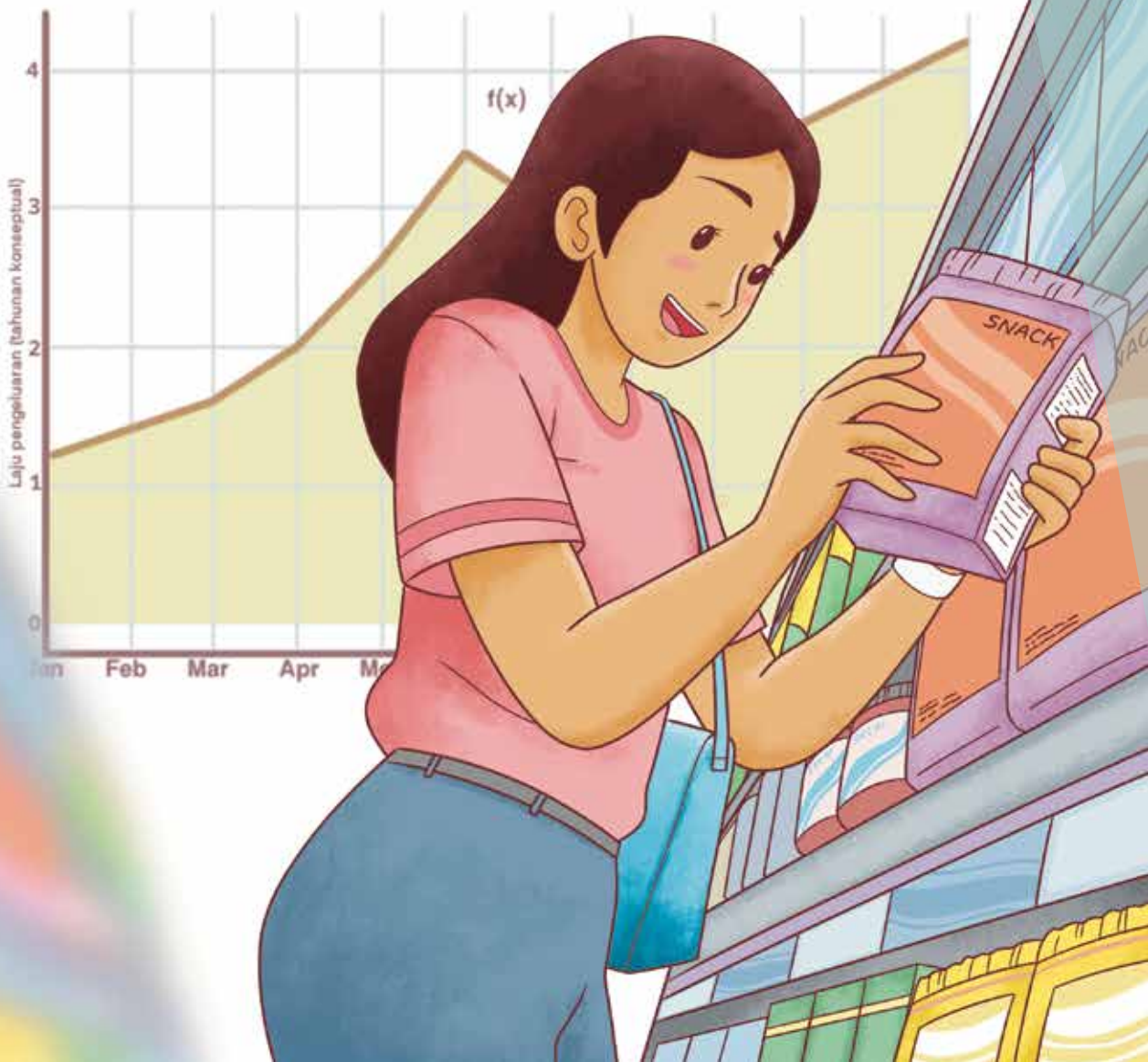
Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA/MA Kelas XII

Penulis: Sri Adi Widodo, Wikan Budi Utami, Fitria Sulistyowati, dan Atiek Sandrawati
ISBN: 978-634-00-3303-8 (jil.2 PDF)

Panduan Khusus

Bab 3

Integral



A. Pendahuluan

1. Tujuan Pembelajaran dan Indikator

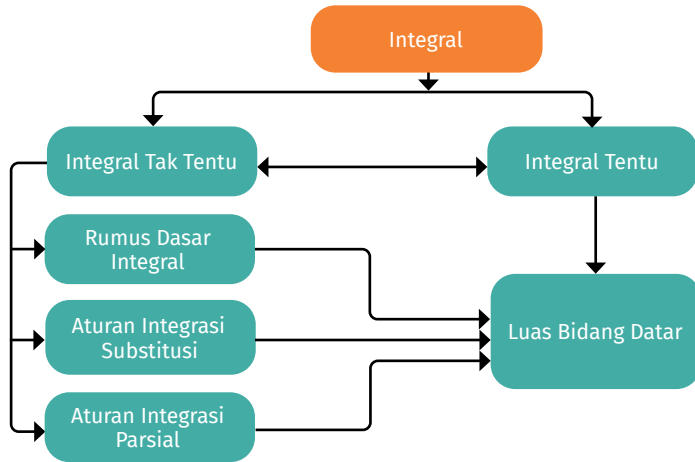
Guru dapat mempelajari tujuan pembelajaran dan indikator Bab 3 Buku Siswa pada Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3.1 Tujuan Pembelajaran dan Indikator Bab 3

Tujuan Pembelajaran	Indikator
Peserta didik mampu: 1. menemukan konsep integral tak tentu dan sifat-sifatnya; 2. menerapkan konsep integral tak tentu dan sifat-sifatnya melalui penyelesaian masalah; 3. menemukan konsep integral tentu; dan 4. menerapkan konsep integral tentu melalui penyelesaian masalah.	Peserta didik mampu: 1. menjelaskan makna integral tak tentu sebagai antiturunan; 2. mengidentifikasi bentuk fungsi yang dapat diintegrasikan; 3. menggunakan aturan integral tak tentu untuk menyelesaikan soal; 4. menjelaskan pengertian integral tentu sebagai luas daerah di bawah kurva; 5. menghubungkan konsep integral tentu dengan teorema dasar kalkulus; 6. menghitung nilai integral tentu dari fungsi sederhana; 7. menerapkan integral tentu dalam perhitungan luas daerah di bawah kurva; 8. menyelesaikan masalah kontekstual dengan integral tentu; dan 9. menilai kesesuaian model matematis dalam konteks masalah integral tentu.

2. Peta Konsep

Gambar 3.1 merupakan peta konsep materi Integral pada Bab 3 Buku Siswa.



Gambar 3.1 Peta Konsep Bab 3 Buku Siswa

Materi integral memiliki keterkaitan dengan materi turunan fungsi pada Bab 2. Oleh karena itu, guru dapat memastikan peserta didik sudah memahami materi turunan fungsi sebelum melanjutkan belajar tentang integral. Materi ini juga memiliki keterkaitan dengan kehidupan nyata di beberapa bidang, seperti Ekonomi, Fisika, dan Kesehatan. Dengan demikian, peserta didik nantinya memahami bahwa integral dapat digunakan untuk menyelesaikan sebagian permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

3. Saran Periode/Waktu Pembelajaran

Alokasi waktu yang disarankan untuk mempelajari materi Bab 3 ini adalah 30 JP. Agar proses pembelajaran berjalan lancar, guru perlu mengamati Peta Konsep pada Gambar 3.1 untuk memahami alur keterkaitan antara konsep-konsep dasar integral hingga penerapannya.

B. Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Salah satu konsep kunci dalam kalkulus yang harus dipahami oleh peserta didik adalah integral, baik sebagai kebalikan dari turunan maupun sebagai cara matematis untuk menghitung luas di bawah kurva. Konsep ini tidak hanya penting secara teoretis, tetapi juga menjadi dasar dalam menyelesaikan masalah nyata dalam bidang sains, ekonomi, dan teknik. Untuk mempelajari

materi integral secara utuh dan bermakna, terdapat beberapa kemampuan prasyarat yang perlu dikuasai terlebih dahulu oleh peserta didik. Penguasaan kemampuan ini sangat penting agar peserta didik tidak hanya memahami prosedur integrasi secara mekanik, tetapi juga mampu menalar konsep integral secara logis, kritis, dan reflektif. Berikut ini beberapa kemampuan prasyarat tersebut.

1. Pemahaman tentang Turunan

Pada dasarnya integral merupakan proses kebalikan dari turunan. Oleh karena itu, peserta didik diharapkan sudah memahami konsep turunan fungsi termasuk aturan rantai, turunan fungsi aljabar dan trigonometri, serta makna geometris turunan sebagai laju perubahan dan gradien garis singgung yang terdapat pada Bab 2 Buku Siswa. Kemampuan ini penting untuk memahami hubungan antara turunan dan integral, khususnya pada materi Teorema Dasar Kalkulus.

2. Pemahaman tentang Fungsi dan Grafiknya

Peserta didik diharapkan mampu mengenali berbagai bentuk fungsi (linear, kuadrat, rasional, dan trigonometri) serta memahami grafiknya. Pengetahuan ini diperlukan agar peserta didik dapat memvisualisasikan daerah di bawah kurva saat menghitung integral tentu dan memahami konsep luas sebagai area di antara kurva dan sumbu- x .

3. Keterampilan Aljabar Dasar

Manipulasi bentuk aljabar, seperti pemfaktoran, substitusi variabel, operasi pecahan aljabar, dan penyederhanaan bentuk matematika diperlukan dalam proses integrasi, baik pada integral tak tentu maupun integral tentu. Manipulasi tersebut pernah dipelajari pada materi persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat pada kelas X.

4. Pemahaman Kontekstual Matematika dalam Dunia Nyata

Pada bagian penerapan integral, peserta didik perlu memiliki keterampilan awal menganalisis persoalan kontekstual dan menerjemahkannya ke dalam model matematika. Kemampuan ini akan mempermudah mereka memahami penggunaan integral di bidang ekonomi, fisika, dan kesehatan.

C. Kerangka Pembelajaran

Untuk mendukung tercapainya tujuan pembelajaran integral secara optimal, pembelajaran perlu dirancang berdasarkan prinsip-prinsip pedagogis yang holistik. Kerangka pembelajaran yang memadukan empat dimensi utama, yaitu praktik pedagogis, kemitraan pembelajaran, lingkungan pembelajaran, dan pemanfaatan teknologi digital disajikan secara rinci pada Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2 Kerangka Pembelajaran pada Materi Integral

Kerangka Pembelajaran	Deskripsi
Praktik Pedagogis	Model pembelajaran: <i>Problem-Based Learning</i> dan <i>Project-Based Learning</i>. Strategi pembelajaran: ▶ Induktif dan eksplorasi, dimulai dari masalah kontekstual menghitung luas (misalnya luas daerah di bawah kurva pada kasus besar pengeluaran bulanan) untuk membangun pemahaman tentang integral sebagai proses kebalikan dari turunan dan perhitungan luas. ▶ Diskusi kelompok kecil untuk melakukan analisis dan membuat simpulan. ▶ Refleksi individu. Asesmen: ▶ Formatif: latihan soal dalam kegiatan Ayo Mencoba dan latihan soal pada akhir setiap subbab. ▶ Sumatif: Uji Kompetensi Bab 3 dan proyek simulasi integral dalam kehidupan nyata.
Kemitraan Pembelajaran	Kolaborasi: ▶ <i>Peer teaching</i>: peserta didik saling menjelaskan konsep integral. ▶ Kontrak belajar: peserta didik menyepakati target pembelajaran.

Kerangka Pembelajaran	Deskripsi
	▶ Kerja kelompok: bekerja sama dalam kelompok kecil untuk menyelesaikan permasalahan matematika. Kegiatan ini bertujuan meningkatkan pemahaman konsep, keterampilan berpikir kritis, serta kemampuan berkomunikasi dan bekerja sama. ▶ Diskusi soal: peserta didik membahas dan menyelesaikan soal-soal matematika. ▶ Interdisipliner: integrasi peluang dengan mata pelajaran lain, seperti ekonomi, IPA, atau informatika. Peran guru: ▶ Fasilitator dan pengarah eksplorasi. ▶ Pemberi umpan balik reflektif.
Lingkungan Pembelajaran	Fisik: Visualisasi dan manipulasi konsep abstrak dengan alat bantu, seperti grafik fungsi, model 3D area di bawah kurva, atau animasi laju perubahan. Psikososial: ▶ Kelas yang mendorong rasa ingin tahu. ▶ Kelas yang mendorong kebebasan bertanya dan mencoba. ▶ Kesalahan dihargai sebagai bagian dari proses belajar. ▶ Diskusi terbuka untuk mengeksplorasi ide.
Pemanfaatan Digital	Alat dan platform: GeoGebra: menampilkan grafik fungsi dan area integral secara dinamis.

Kerangka pembelajaran ini diharapkan dapat menciptakan pengalaman belajar yang mendalam, kontekstual, dan bermakna bagi peserta didik dalam memahami konsep integral.

D. Apersepsi

Guru memulai pembelajaran dengan mengaitkan pengalaman nyata peserta didik melalui isu ekonomi yang dekat dengan kehidupan, misalnya inflasi. Guru dapat bertanya, *“Apakah kalian pernah mendengar istilah inflasi? Apa dampaknya bagi keluarga kita jika harga-harga terus naik?”* Kedua pertanyaan ini bertujuan menumbuhkan kesadaran awal bahwa fenomena ekonomi dapat dianalisis secara matematis.

Selanjutnya, guru menampilkan gambar pada Buku Siswa yang menunjukkan kurva pengeluaran rumah tangga per bulan. Guru mengarahkan peserta didik untuk mengamati bahwa luas di bawah kurva mewakili total pengeluaran dalam periode tertentu, lalu mengajukan pertanyaan pemantik, *“Bagaimana kita bisa mengetahui jumlah pengeluaran dalam 1 tahun hanya dengan melihat grafik ini?”*

Rangkaian pertanyaan dalam apersepsi ini disusun selaras dengan tahapan Taksonomi SOLO, dari prastruktural hingga *extended abstract*, sehingga peserta didik tidak hanya memahami prosedur integral, tetapi juga mengaitkannya dengan makna nyata dalam kehidupan sehari-hari.

Berbekal diskusi ini, peserta didik diarahkan untuk memahami bahwa integral bukan hanya kebalikan dari turunan, melainkan juga alat menghitung akumulasi nilai, seperti total biaya atau strategi efisiensi dalam pengeluaran. Guru menekankan bahwa melalui pembelajaran materi integral, peserta didik dapat menghubungkan konsep matematika dengan persoalan yang mereka temui dalam kehidupan sehari-hari.

E. Formatif Awal

Guru menggunakan apersepsi untuk menghubungkan pengetahuan turunan dan fungsi yang telah dipelajari sebelumnya dengan konsep integral secara kontekstual melalui Taksonomi SOLO dan pendekatan Pembelajaran Mendalam (*Deep Learning*). Pertanyaan seperti *“Apakah kalian pernah mendengar istilah inflasi? Apa dampaknya bagi keluarga kita jika harga-harga terus naik?”* untuk membangkitkan kesadaran awal peserta didik (tingkat *prastruktural* ke *unistruktural*) bahwa fenomena ekonomi dapat dianalisis secara matematis. Selanjutnya, guru memperkenalkan grafik pengeluaran

bulanan (kurva kontinu) dan menanyakan, “*Bagaimana kita bisa mengetahui jumlah pengeluaran dalam 1 tahun hanya dengan melihat grafik ini?*” Pertanyaan tersebut menggerakkan pemahaman awal peserta didik ke tingkat *multistruktural*.

Untuk membangun pemahaman *relasional*, pertanyaan lanjutan seperti “*Jika pengeluaran meningkat, bagaimana dampaknya terhadap luas area di bawah kurva?*” serta “*Bagaimana strategi penghematan dapat ditunjukkan pada perubahan kurva?*” membantu peserta didik melihat hubungan antara turunan, luas, dan integral. Peserta didik akhirnya dipandu menyadari bahwa luas daerah di bawah kurva yang dihitung menggunakan integral bukan sekadar kebalikan dari turunan, melainkan alat untuk menghitung akumulasi yang bermakna dalam kehidupan nyata, menuju level *extended abstract*. Pendekatan ini diperkuat dengan menampilkan gambar “Inflasi, Efisiensi, dan Integral” pada Buku Siswa untuk dianalisis bersama.

Sebelum menuju materi inti Integral Tak Tentu, guru dapat memberi pertanyaan, “*Apakah kalian siap belajar bagaimana integral membantu kita memahami dan mengelola inflasi secara nyata?*” Pertanyaan tersebut untuk memotivasi peserta didik agar siap secara mental dan kognitif menghadapi pembelajaran inti.

F. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Tujuan umum dalam aktivitas belajar mengajar pada materi integral adalah agar peserta didik mampu menjelaskan konsep integral serta menerapkannya dalam penyelesaian masalah. Untuk mendukung pencapaian tujuan tersebut, kegiatan pembelajaran disusun berdasarkan berbagai pengalaman belajar yang dirinci pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Pengalaman Belajar Materi Integral

Judul Aktivitas	Pengalaman Belajar	Karakteristik
 Ayo Mengomunikasikan Kegiatan mengomunikasikan pendapat atau hasil diskusi di dalam kelompok.	Merefleksi	Menerapkan strategi berpikir.

Judul Aktivitas	Pengalaman Belajar	Karakteristik
 Ayo Bereksplorasi Kegiatan menyelidiki konsep matematika.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.
 Ayo Mencoba Kegiatan mengerjakan soal.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.
 Ayo Berdiskusi Kegiatan bertukar pikiran dan menyatakan gagasan.	Mengaplikasi	Berpikir kritis dan mencari solusi inovatif berdasarkan pengetahuan yang ada.
 Ayo Berpikir Kreatif Kegiatan membuat ide atau alternatif solusi baru.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.
 Ayo Berpikir Kritis Kegiatan memproses informasi dan gagasan.	Mengaplikasi	Berpikir kritis dan mencari solusi inovatif berdasarkan pengetahuan yang ada.
 Ayo Menggunakan Teknologi Kegiatan memanfaatkan kalkulator atau aplikasi lain.	Mengaplikasi	Menerapkan pengetahuan ke dalam situasi nyata atau bidang lain.
 Petunjuk Penjelasan mengenai koneksi antarkonsep materi.	Memahami	Menstimulasi proses berpikir peserta didik.
 Ayo Mengingat Kembali Kegiatan mengingat kembali materi sebelumnya.	Memahami	Menghubungkan pengetahuan baru dengan pengetahuan sebelumnya.

Subbab A: Integral Tak Tentu

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ menjelaskan makna integral tak tentu sebagai antiturunan;
- ▶ mengidentifikasi bentuk fungsi yang dapat diintegrasikan; dan
- ▶ menggunakan aturan integral tak tentu untuk menyelesaikan soal.

1. Integral Tak Tentu

Sebelum memulai materi integral tak tentu, guru mengarahkan peserta didik untuk mengingat kembali materi Turunan pada Bab 2 melalui kegiatan Ayo Mengingat Kembali.



Ayo Mengingat Kembali

Guru dapat menuliskan di papan tulis atau menampilkan kembali dua sifat utama, yaitu turunan fungsi konstan adalah nol, dan turunan fungsi $f(x) = x^n$ adalah $f'(x) = nx^{n-1}$. Guru dapat memandu peserta didik dengan memberikan contoh sederhana, misalnya turunan dari $f(x) = 5$ dan $f(x) = x^3$, sehingga peserta didik dapat mengingat dan menghubungkan konsep dasar ini dengan materi baru yang akan dipelajari. Untuk lebih mengenal integral tak tentu, guru mengarahkan peserta didik untuk melakukan kegiatan Ayo Bereksplorasi 3.1.



Ayo Bereksplorasi 3.1

Guru memandu peserta didik untuk mengaitkan pengalaman nyata tentang kenaikan harga barang dengan konsep matematika integral. Guru dapat memulai dengan mengajukan pertanyaan pemantik, misalnya tentang pengalaman peserta didik belanja di pasar atau supermarket, dan bagaimana kenaikan harga berdampak pada pengeluaran rumah tangga. Pertanyaan ini bertujuan membangun kesadaran kontekstual peserta didik bahwa fenomena sehari-hari dapat dianalisis menggunakan matematika, khususnya integral.

Setelah itu, guru menjelaskan bahwa laju kenaikan pengeluaran rumah tangga setiap bulan direpresentasikan dengan fungsi turunan $f'(x) = 2x + 1$, dengan x adalah bulan ke- x dan $f'(x)$ dalam juta/bulan. Guru perlu memberikan penekanan bahwa informasi tentang laju perubahan (turunan)

dapat “disatukan kembali” melalui konsep integral untuk mendapatkan total pengeluaran (fungsi daerah asal). Guru dapat mengajukan pertanyaan pemantik, “*Bagaimana cara kalian mengetahui total pengeluaran dalam 1 tahun?*” Pertanyaan ini menantang peserta didik untuk mencari makna mendalam dari fungsi turunan, dengan mengarahkannya pada penggunaan integral sebagai alat untuk mengintegrasikan laju perubahan menjadi total besaran.

Selanjutnya, peserta didik diarahkan untuk bereksplorasi secara kelompok, mencoba menghitung atau merumuskan bagaimana integral dari fungsi laju perubahan tersebut menghasilkan akumulasi pengeluaran. Guru memiliki peran sebagai fasilitator yang menekankan gagasan bahwa integral merupakan kebalikan dari turunan sekaligus dapat digunakan sebagai pendekatan untuk menghitung akumulasi suatu besaran dalam kehidupan sehari-hari. Agar peserta didik dapat memahami konsep ini secara lebih mendalam, guru dapat mengajak mereka untuk melakukan kegiatan Ayo Mencoba 3.1.



Ayo Mencoba 3.1

Guru memandu peserta didik untuk berlatih menggunakan konsep integral dalam konteks pengeluaran rumah tangga. *Langkah pertama* adalah mengisi Tabel Pengeluaran Rumah Tangga yang disalin dari Buku Siswa. Guru memberikan contoh perhitungan bulan Januari dengan menyubstitusikan $x = 1$ ke fungsi $f'(x) = 2x + 1$, kemudian mengarahkan peserta didik melanjutkan perhitungan untuk bulan-bulan berikutnya.

Pada *langkah kedua*, peserta didik diminta menggambar grafik berdasarkan nilai yang diperoleh. Pada tahap ini guru menekankan bagaimana grafik $f'(x)$ menunjukkan laju kenaikan pengeluaran dari bulan ke bulan, serta memancing dengan pertanyaan sederhana, “*Seiring berjalannya waktu, apakah kenaikan selalu sama atau berubah?*”

Pada *langkah ketiga*, peserta didik diminta untuk menghitung luas dengan pendekatan luas trapesium, kemudian mengisi Tabel Luas Kurva dengan Pendekatan Luas Trapesium yang disalin dari Buku Siswa. Guru dapat membahas terlebih dahulu isi dari kotak Petunjuk untuk memudahkan peserta didik dalam menghitung luas.



Petunjuk

Guru memperkenalkan peserta didik pada konsep pendekatan luas daerah di bawah kurva melalui aturan trapesium, yang dinyatakan dengan rumus:

$$\text{Luas trapesium} = \frac{1}{2} \times (f(a) + f(b)) \times (b - a).$$

Melalui ilustrasi gambar pada Buku Siswa, guru mengajak peserta didik untuk tidak sekadar menghafal rumus, tetapi memahami mengapa dan bagaimana pendekatan ini bekerja. Kegiatan ini membantu peserta didik membangun koneksi antara konsep geometri (luas trapesium) dan konsep kalkulus (integral sebagai luas di bawah kurva) sehingga memperdalam pemahaman mereka terhadap makna integral.

Setelah memberikan penguatan dengan memberikan penjelasan sesuai dengan petunjuk yang diberikan, guru dapat mengarahkan peserta didik untuk melakukan kegiatan Ayo Berdiskusi.



Ayo Berdiskusi

Guru mengarahkan peserta didik untuk merefleksikan hasil perhitungan pada kegiatan sebelumnya. Peserta didik berdiskusi dalam kelompok kecil untuk bertukar gagasan dan menghubungkan hasil perhitungan dengan makna kontekstual dalam kehidupan sehari-hari. Guru dapat membimbing dengan beberapa pertanyaan pada Buku Siswa atau pertanyaan pemantik berikut ini.

- ▶ Apa arti luas di bawah kurva dalam kaitannya dengan pengeluaran rumah tangga?
- ▶ Mengapa integral digunakan untuk menjumlahkan laju perubahan menjadi total pengeluaran?

Pertanyaan-pertanyaan tersebut membantu peserta didik memahami bahwa luas tersebut mewakili akumulasi total pengeluaran, bukan sekadar angka matematis.

Selanjutnya, guru memfasilitasi diskusi kelas dengan meminta perwakilan kelompok menyampaikan hasilnya agar terjadi pertukaran perspektif. Dari sini, peserta didik dapat menyimpulkan bahwa integral berperan penting dalam mengubah informasi tentang laju perubahan menjadi total besaran. Melalui kegiatan ini, peserta didik menemukan konsep integral secara

kontekstual, yaitu integral bukan hanya kebalikan dari turunan, melainkan juga sebagai alat untuk menghitung akumulasi dalam situasi nyata, seperti pengeluaran rumah tangga.

a. Definisi Integral Tak Tentu

Guru memberikan penguatan dari kegiatan sebelumnya untuk masuk pada materi Definisi Integral Tak Tentu dan memberikan penegasan materi Antiturunan. Setelah memberikan penjelasan mengenai Contoh Soal 3.1, guru mengajak peserta didik untuk melakukan kegiatan berikut.



Ayo Berpikir Kritis

Guru mengarahkan peserta didik untuk menganalisis hubungan antara turunan dan integral melalui pertanyaan reflektif berbasis konsep berikut:

“Apakah integral dari $f(x) = 2x + 1$ adalah $F(x) = x^2 + x$? Jelaskan jawaban kalian.”

Pertanyaan ini memberikan pengalaman berpikir tingkat tinggi yang menuntut peserta didik untuk mengevaluasi dan merefleksikan kembali pemahaman mereka terhadap konsep integral sebagai proses kebalikan dari turunan.

Peran guru dalam kegiatan ini adalah memfasilitasi proses berpikir kritis dengan memberikan pertanyaan pemantik, memberikan ruang bagi peserta didik untuk berdiskusi, dan merespons berbagai jawaban peserta didik dengan reflektif. Guru juga dapat membantu dengan menggambarkan grafik fungsi atau menggunakan analogi visual untuk memperjelas hubungan antara fungsi dan turunannya. Selain itu, guru mendorong peserta didik untuk mengambil keputusan yang logis berdasarkan hasil analisis mereka sendiri, sekaligus menumbuhkan karakter bernalar kritis, mandiri, dan kolaboratif.

b. Sifat-Sifat Integral Tak Tentu

Pada materi ini, guru mengarahkan peserta didik untuk menunjukkan kebenaran sifat-sifat integral tak tentu melalui kegiatan-kegiatan berikut ini.



Ayo Bereksplorasi 3.2

Guru mengarahkan peserta didik untuk menurunkan bentuk $x + C$ menggunakan aturan pangkat dan sifat turunan. Melalui proses ini, peserta didik diingatkan bahwa $\frac{d}{dx}(x + C) = 1$. Selanjutnya, guru mengaitkan hasil turunan tersebut dengan konsep integral sehingga peserta didik menyadari bahwa jika turunan dari $(x + C)$ adalah 1, maka berlaku sebaliknya, yaitu $\int dx = x + C$.

Guru dapat menekankan bahwa langkah ini menunjukkan hubungan erat antara turunan dan integral sebagai operasi kebalikan. Penting untuk tidak mengabaikan konstanta integral karena berbagai fungsi yang hanya berbeda konstantanya akan menghasilkan turunan yang sama. Dengan membimbing peserta didik melengkapi titik-titik dan berdiskusi, guru membantu peserta didik memahami makna integral tak tentu sebagai kebalikan turunan dengan cara yang logis dan sederhana. Kegiatan dilanjutkan dengan eksplorasi sifat-sifat integral tak tentu lainnya.



Ayo Bereksplorasi 3.3

Pembuktian Sifat 3.2

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1} + C) = (n+1)x^n.$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{n+1}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{d}{dx}[x^{n+1} + C] &= \left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1)x^n \\ \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{n+1}\right)(x^{n+1} + C)\right] &= x^n \\ \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{C}{n+1}\right)\right] &= x^n \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] &= x^n. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$.

**Pembuktian Sifat 3.6**

Misalkan $u = g(x)$, maka $du = g'(x) dx$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int [g(x)]^n g'(x) dx &= \int u^n du \\ &= \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \\ &= \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + C.\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + C$.

**Pembuktian Sifat 3.7**

Pada proses pembuktian Sifat 3.7, guru dapat membimbing peserta didik untuk meninjau kembali sifat turunan hasil kali dua fungsi yang telah dipelajari pada Bab 2. Guru mengarahkan agar peserta didik melengkapi titik-titik yang tersedia dengan menuliskan hasil turunan sesuai dengan sifat bahwa

$$\int \frac{d}{dx} [u(x) \cdot v(x)] dx = \int u'(x)v(x) dx + u(x)v'(x) dx.$$

Langkah berikutnya, guru mengarahkan peserta didik untuk menyusun ulang hasil tersebut hingga memperoleh bentuk

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Guru dapat menekankan bahwa ini adalah rumus integral parsial yang penting untuk menyelesaikan integral pada fungsi-fungsi tertentu. Agar lebih bermakna, guru dapat memberikan pertanyaan, seperti “*Masih ingat sifat turunan hasil kali dua fungsi?*”, “*Jika kita integralkan ruas kiri dan kanan, apa yang terjadi?*”, atau “*Mengapa integral parsial disebut kebalikan dari aturan turunan hasil kali?*”. Dari pertanyaan tersebut, peserta didik diharapkan dapat mengetahui hubungan konsep turunan dengan integral. Berikut ini hasil yang diharapkan dari peserta didik.

Misalkan fungsi $u(x)$ dan $v(x)$ kontinu di R , maka

$$\frac{d}{dx} [u(x) \cdot v(x)] = (u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)) dx,$$

sehingga

$$\int \frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = \int (u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)) dx$$

$$\int \frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = \int u(x) \cdot v'(x) dx + \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int u(x) \cdot v'(x) dx + \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx.$$

Dengan menyubstitusikan $v'(x) dx = dv$ dan $u'(x) dx = du$, diperoleh

$$\int u \cdot dv = uv - \int v du.$$

Jadi, terbukti bahwa $\int u dv = uv - \int v du$.



Ayo Berpikir Kreatif

Pada kegiatan ini, guru memfasilitasi peserta didik untuk menunjukkan kembali Sifat 3.3, Sifat 3.4, Sifat 3.5, dan Sifat 3.8 dengan menurunkannya dari konsep turunan dan integral secara sistematis. Peserta didik diarahkan bekerja dalam kelompok kecil untuk menyusun pembuktian, kemudian mempresentasikan hasilnya di depan kelas. Pembuktian sifat-sifat tersebut sebagai berikut.

Pembuktian Sifat 3.3

$$\frac{d}{dx} \left[\int af(x) dx \right] = a \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = af(x).$$

Jadi, $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$, dengan a adalah konstanta.

Pembuktian Sifat 3.4

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \right] &= \frac{d}{dx} \left[\int f_1(x) dx \right] + \frac{d}{dx} \left[\int f_2(x) dx \right] \\ &= f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

Pembuktian Sifat 3.5

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx \right] &= \frac{d}{dx} \left[\int f_1(x) dx \right] - \frac{d}{dx} \left[\int f_2(x) dx \right] \\ &= f_1(x) - f_2(x). \end{aligned}$$

Diperoleh $\int (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx$.

Pembuktian Sifat 3.8

$$\frac{d}{dx}(-\cos x + C) = -(-\sin x) = \sin x.$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x.$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x + C) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + C\right) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Melalui kegiatan ini, guru menekankan pentingnya kreativitas dalam menyusun argumen matematis dan melatih kemampuan komunikasi, sementara guru berperan memberikan klarifikasi dan penguatan agar pemahaman peserta didik semakin mendalam.



Ayo Mencoba 3.2

1. Misalkan $f_1(x) = x^4$ dan $f_2(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}\int (x^4 - e^x) dx &= \int x^4 dx - \int e^x dx \quad (\text{Sifat 3.5}) \\ &= \frac{1}{5}x^5 - e^x + C \quad (\text{Sifat 3.2 dan Sifat 3.9a}).\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int (x^4 - e^x) dx = \frac{1}{5}x^5 - e^x + C.$$

2. Misalkan $f_1(x) = e^{2x}$ dan $f_2(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int (e^{2x} + \sqrt{x}) dx &= \int e^{2x} dx + \int \sqrt{x} dx \quad (\text{Sifat 3.4}) \\ &= \int e^{2x} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right) + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2\right) \quad (\text{Sifat 3.9b dan Sifat 3.2}) \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int (e^{2x} + \sqrt{x}) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$



Ayo Mencoba 3.3

$$\begin{aligned}\int (3x + 4)^{\frac{1}{2}} dx &= \int (3x + 4)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{1}{3}\right)3 dx\right) \\ &= \frac{1}{3} \int (3x + 4)^{\frac{1}{2}} (3) dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} (3x + 4)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9} (3x + 4)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{9}(3x+4)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\text{Jadi, } \int (3x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{9}(3x+4)^{\frac{3}{2}} + C.$$



Ayo Mencoba 3.4

Diketahui kecepatan partikel $v = \cos 2\pi t$, maka dapat ditulis

$$v = \frac{ds}{dt} = \cos 2\pi t$$

$$ds = \cos 2\pi t \, dt$$

$$\int ds = \int \cos 2\pi t \, dt$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \int \cos 2\pi t (2\pi \, dt)$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t + C.$$

Untuk $t = 0$ maka $s = 5$, sehingga

$$5 = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi(0) + C$$

$$C = 5.$$

Persamaannya menjadi

$$s = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t + 5.$$

Posisi partikel $\frac{1}{3}$ detik kemudian adalah

$$s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\left(\frac{1}{3}\right) + 5 = 5,14.$$

Jadi, posisi partikel $\frac{1}{3}$ detik kemudian adalah 5,14 cm di sebelah kanan.



Ayo Mencoba 3.5

1. Misalkan $u = x$, maka $du = 1dx = dx$.

Jika $dv = \sin x \, dx$, maka $v = -\cos x \, dx$.

Dengan menggunakan Sifat 3.7, diperoleh

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

2. Misalkan $u = x$, maka $du = 1dx = dx$.

Jika $dv = \sqrt{1+x} \, dx$, maka $v = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$.

Dengan menggunakan Sifat 3.7, diperoleh

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x} \, dx &= x\left(\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right) - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C.\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int x\sqrt{1+x} \, dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C.$$

Subbab B: Integral Tentu

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ menjelaskan pengertian integral tentu sebagai luas daerah di bawah kurva;
- ▶ menghubungkan konsep integral tentu dengan teorema dasar kalkulus; dan
- ▶ menghitung nilai integral tentu dari fungsi sederhana.

1. Jumlahan Riemann

Guru mengajak peserta didik untuk mengingat kembali luas persegi panjang dan bagaimana menentukan luas persegi panjang yang dipartisi menjadi lima bagian melalui kegiatan Ayo Mengingat Kembali.



Ayo Mengingat Kembali

Guru mengingatkan kembali konsep dasar dari luas persegi panjang, yaitu

$$\text{Luas} = \text{panjang} \times \text{lebar},$$

sebagai pengantar untuk memahami konsep luas di bawah kurva melalui pendekatan Jumlahan Riemann. Peserta didik diajak menuliskan jumlah luas beberapa persegi panjang sebagai

$$\sum_{i=1}^5 A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5.$$

Peran guru pada pengalaman belajar Ayo Mengingat Kembali adalah sebagai berikut.

1. Guru mengaitkan ulang pemahaman sebelumnya dengan bertanya, *“Masih ingat bagaimana cara menghitung luas persegi panjang?”* atau *“Apa yang terjadi kalau kita menjumlahkan banyak persegi panjang kecil untuk menutupi kurva?”*
2. Guru menyajikan gambar kurva yang dibagi menjadi beberapa persegi panjang di bawahnya, lalu menunjukkan bagaimana jumlah area mendekati luasan sebenarnya.
3. Guru memancing dengan pertanyaan, misalnya *“Apa yang terjadi jika kita membagi lebih banyak persegi panjang? Apakah hasil luasnya semakin mendekati luas di bawah kurva?”*, kemudian memberikan ruang diskusi agar peserta didik bisa menyampaikan pendapat atau pemahamannya dengan teman sekelas.

Setelah kegiatan ini selesai, guru dapat mengarahkan peserta didik untuk melakukan kegiatan Ayo Bereksplorasi 3.6.



Ayo Bereksplorasi 3.6

Guru memandu peserta didik untuk memahami konsep integral melalui konteks luas setengah lingkaran. Guru dapat memulai dengan meminta peserta didik membuat setengah lingkaran berjari-jari 12 cm pada koordinat Kartesius pada kertas berpetak, lalu mengaitkannya dengan cara menghitung luas lingkaran menggunakan rumus yang sudah mereka kenal. Selanjutnya, guru membimbing peserta didik membuat partisi daerah lingkaran tersebut menjadi beberapa bagian sama panjang. Untuk memperdalam pengetahuan peserta didik, guru mengarahkan untuk melakukan kegiatan Ayo Berdiskusi.



Ayo Berdiskusi

Peran guru dalam kegiatan ini adalah sebagai berikut.

1. Guru memfasilitasi pertemuan antarkelompok, kemudian meminta mereka saling membandingkan hasil dan menjelaskan metode yang digunakan.
2. Guru mendorong rasa ingin tahu dan toleransi perbedaan, misalnya dengan bertanya, *“Mengapa kelompok kalian mendapatkan hasil lebih besar atau lebih kecil?”* atau *“Bagaimana jika kalian menambahkan jumlah partisinya?”*

3. Guru menekankan pentingnya proses, bukan hanya hasil akhir, kemudian menghubungkan perbedaan hasil dengan konsep limit (semakin banyak partisi, semakin mendekati nilai eksak).
4. Guru memberikan penguatan positif atas kemampuan peserta didik dalam menganalisis hasilnya dan hasil kelompok lain.
5. Guru mengajak peserta didik melakukan refleksi bersama, misalnya dengan bertanya, “*Apa yang bisa kalian simpulkan dari hasil diskusi ini tentang cara menghitung luas kurva?*”



Ayo Mencoba 3.6

1. Untuk menentukan Jumlahan Riemann fungsi $f(x) = x^2$ dengan 6 subinterval pada interval $[0, 3]$, maka dibuat grafik fungsi $f(x) = x^2$ pada interval tersebut seperti pada Gambar 3.2.

Dengan demikian, untuk

$$\bar{x}_1 = 0,5 \text{ maka } f(\bar{x}_1) = 0,25;$$

$$\bar{x}_2 = 1 \text{ maka } f(\bar{x}_2) = 1;$$

$$\bar{x}_3 = 1,5 \text{ maka } f(\bar{x}_3) = 2,25;$$

$$\bar{x}_4 = 2 \text{ maka } f(\bar{x}_4) = 4;$$

$$\bar{x}_5 = 2,5 \text{ maka } f(\bar{x}_5) = 6,25;$$

$$\bar{x}_6 = 3 \text{ maka } f(\bar{x}_6) = 9.$$

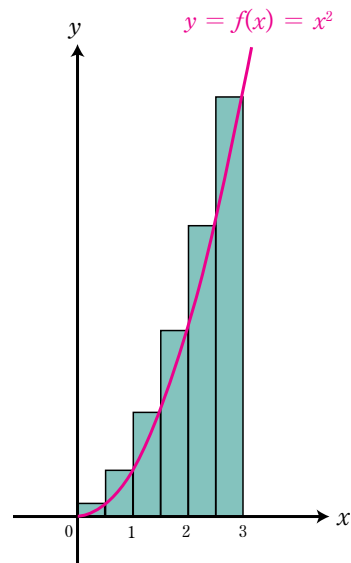
Karena lebar subinterval sama, berarti

$$\Delta x = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2} \text{ untuk setiap } i = 1, 2, \dots, 6$$

. Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 3]$ dengan 6 subinterval adalah

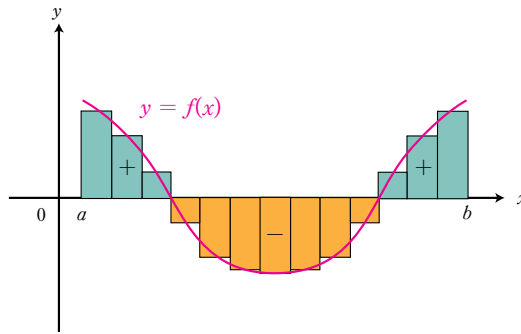
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 f(\bar{x}_i) \Delta x_i &= (f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + f(\bar{x}_4) + f(\bar{x}_5) + f(\bar{x}_6)) \Delta x \\ &= (0,25 + 1 + 2,25 + 4 + 6,25 + 9) \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= 11,375. \end{aligned}$$

Sebelum meminta peserta didik mengerjakan soal nomor 2, guru dapat menunjukkan ilustrasi seperti pada Gambar 3.3 berikut.



Gambar 3.2 Grafik Fungsi $f(x) = x^2$

Jika terdapat luasan di atas sumbu- x (berwarna biru) dan di bawah sumbu- x (berwarna cokelat muda), maka Jumlahan Riemann dapat ditentukan dengan luas persegi panjang biru dikurangi luas persegi panjang cokelat muda.



Gambar 3.3 Grafik Fungsi $y = f(x)$

2. Pada Gambar 3.4, interval $[0, 4]$ yang terdapat pada fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ dibagi menjadi 4 subinterval.

Pada grafik sudah ditentukan untuk nilai $\bar{x}_i$. Dengan demikian, diperoleh

$$\bar{x}_1 = 0,5 \text{ maka } f(\bar{x}_1) = 1,25;$$

$$\bar{x}_2 = 1,5 \text{ maka } f(\bar{x}_2) = -0,75;$$

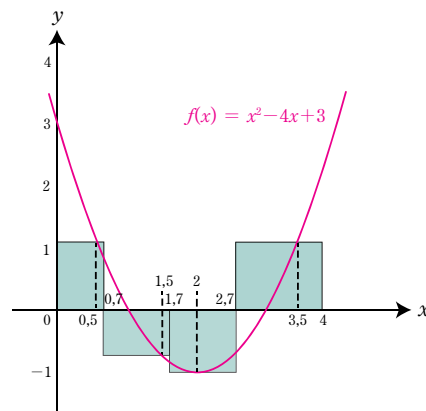
$$\bar{x}_3 = 2 \text{ maka } f(\bar{x}_3) = -1;$$

$$\bar{x}_4 = 3,5 \text{ maka } f(\bar{x}_4) = 1,25.$$

Karena lebar subinterval tidak sama, berarti Δx pada setiap partisi adalah

$$\Delta x_1 = 0,7; \quad \Delta x_3 = 1;$$

$$\Delta x_2 = 1; \quad \Delta x_4 = 1,3.$$



Gambar 3.4 Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0, 4]$ adalah 4,25. Perhitungannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 f(\bar{x}_i) \Delta x_i &= f(\bar{x}_1) \Delta x_1 - f(\bar{x}_2) \Delta x_2 - f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + f(\bar{x}_4) \Delta x_4 \\ &= (1,25)(0,7) - (-0,75)(1) - (-1)(1) + (1,25)(1,3) \\ &= 0,875 + 0,75 + 1 + 1,625 = 4,25. \end{aligned}$$

2. Integral Tentu

Sebelum masuk pada materi Integral Tentu, guru memberikan penjelasan mengenai penambahan partisi pada gambar pada Buku Siswa yang

mengakibatkan perubahan Δx . Selanjutnya, guru memberikan kesimpulan bahwa penyelesaian integral tentu dapat didekati melalui jumlahan persegi dengan melakukan perubahan Δx menuju 0.



Petunjuk

Peran guru dalam pengalaman belajar ini adalah sebagai berikut.

1. Guru mengarahkan pengingatan kembali konsep lama secara dialogis, misalnya dengan pertanyaan, “Siapa yang masih ingat jumlah deret dari 1 sampai n ?”, “Kenapa kita pakai notasi sigma?”, dan “Apa gunanya nanti untuk integral tentu?”.
2. Guru menampilkan contoh nyata atau visual sederhana, seperti menyusun blok kecil untuk menunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ dapat digambarkan sebagai segitiga bilangan.
3. Guru membimbing peserta didik dalam menyusun koneksi antara deret dan pendekatan integral tentu. Guru dapat berkata, “Kalau kita ingin menghitung luas kurva dengan membaginya jadi n bagian, kita perlu jumlah nilai-nilai fungsi. Nah, notasi sigma inilah alatnya.”
4. Guru mendorong eksplorasi mandiri dengan pertanyaan terbuka, misalnya “Coba bandingkan hasil pendekatan dengan $n = 5$ dan $n = 50$. Apa yang berubah? Semakin akurat tidak?”
5. Guru memberi tantangan ringan agar peserta didik bisa mencoba membuat sendiri rumus untuk pola tertentu. Aktivitas tersebut dapat memperkuat rasa pencapaian dan keasyikan belajar.



Ayo Mencoba 3.7

1. Peserta didik dapat menentukan beberapa hal berikut.

- Panjang setiap subinterval.

Interval yang diketahui adalah $[0, 3]$ dan dipartisi menjadi bagian yang sama, maka $\frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

- Titik wakil pada setiap subinterval $(\bar{x}_i)$.

Perhatikan batas interval. Batas paling kiri pada interval ini adalah 0 dan batas paling kanan adalah 3, maka

$$\bar{x}_1 = 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{3}{n} = \frac{3}{n}.$$

$$\bar{x}_2 = 0 + 2\Delta x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{3}{n} = 2 \cdot \frac{3}{n}.$$

$$\bar{x}_3 = 0 + 3\Delta x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{3}{n}.$$

$\vdots$

$$\bar{x}_n = 0 + n\Delta x_n = 0 + n \cdot \frac{3}{n} = n \cdot \frac{3}{n}.$$

Setiap fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 3]$ dapat diwakilkan oleh

$$f(\bar{x}_i) = \left(i \cdot \frac{3}{n}\right)^2 = \frac{9i^2}{n^2}.$$

Dengan demikian, Jumlahan Riemann-nya adalah

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n.$$

Karena Δx sama, maka

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval $[0, 3]$ dan ditulis

$\int_0^3 x^2 dx$, maka

$$\begin{aligned} \int_0^3 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{9i^2}{n^2} \left(\frac{3}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{27i^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = 9. \end{aligned}$$

Jadi, integral tentu dari $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 3]$ atau $\int_0^3 x^2 dx$ adalah

$$\int_0^3 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = 9.$$

2. Peserta didik dapat menentukan beberapa hal berikut.

- Panjang setiap subinterval.

Interval yang diketahui adalah $[0, 4]$ dan dipartisi menjadi bagian yang sama, maka $\frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

- Titik wakil pada setiap subinterval $(\bar{x}_i)$.

Batas paling kiri adalah 0 dan batas paling kanan adalah 4, maka

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{4}{n} = \frac{4}{n}. \\ \bar{x}_2 &= 0 + 2\Delta x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{4}{n} = 2 \cdot \frac{4}{n}. \\ \bar{x}_3 &= 0 + 2\Delta x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{4}{n} = 3 \cdot \frac{4}{n}. \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= 0 + 2\Delta x_n = 0 + n \cdot \frac{4}{n} = n \cdot \frac{4}{n}.\end{aligned}$$

Setiap fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0, 4]$ dapat diwakilkan oleh

$$f(\bar{x}_i) = f\left(i \cdot \frac{4}{n}\right) = \left(i \cdot \frac{4}{n}\right)^2 - 4\left(i \cdot \frac{4}{n}\right) + 3 = \frac{16i^2}{n^2} - \frac{16i}{n} + 3.$$

Dengan demikian, Jumlahan Riemann-nya adalah

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n.$$

Karena Δx sama, maka

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval $[0, 4]$ dan ditulis

$$\begin{aligned}\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx, \text{ maka} \\ \int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{16i^2}{n^2} - \frac{16i}{n} + 3 \right) \left(\frac{4}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{64i^2}{n^3} - \frac{64i}{n^2} + \frac{12}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^2} \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n} (n) = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Jadi, integral tentu dari $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0, 4]$ adalah

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \frac{4}{3}.$$



Ayo Berpikir Kreatif

Peran guru dalam kegiatan ini adalah sebagai berikut.

1. Guru memicu pemikiran kritis melalui pertanyaan terbuka, seperti “*Kalau panjang tiap interval berbeda, apakah rumus Δx masih bisa digunakan?*”,

“Bagaimana cara kita menghitung luasnya kalau begitu?”, dan “Apakah jumlah luas persegi panjang tetap bisa dihitung? Apa yang berubah?”.

2. Guru memberikan visualisasi dan konteks konkret dengan menyediakan dua gambar grafik. Grafik pertama dengan partisi sama besar. Grafik kedua dengan partisi berbeda-beda. Selanjutnya, guru mengajak peserta didik untuk membandingkan hasil perhitungan dari kedua grafik.
3. Guru memfasilitasi diskusi kolaboratif dengan mendorong setiap kelompok untuk menyusun Δx pendekatan alternatif jika tidak seragam dan menyediakan lembar diskusi atau skenario nyata, seperti data pengamatan suhu harian yang tidak diambil pada selang waktu tetap.
4. Guru memberi penguatan materi dan mengarahkan pada generalisasi konsep dengan cara menyampaikan bahwa dalam kalkulus lanjut, pendekatan *non-uniform* ini tetap sah dan dikenal sebagai bentuk umum dari integral Riemann, kemudian menghubungkan pemahaman ini dengan penerapan dalam bidang ekonomi atau sains.

3. Sifat-Sifat Integral Tentu



Ayo Bereksplorasi 3.7

Peran guru dalam kegiatan ini adalah sebagai berikut.

1. Guru menyiapkan konteks eksploratif seperti menyajikan tabel integral Riemann atau visualisasi grafik $f(x)$ dari fungsi pada interval yang menyempit dari a ke $f(x)$, untuk membantu peserta didik membayangkan bahwa tidak ada area yang terbentuk.
2. Guru mendorong eksplorasi aktif dengan memberikan petunjuk bertahap tanpa langsung memberi jawaban dan mengarahkan peserta didik untuk mengganti nilai Δx dengan $\frac{a-a}{n}$, kemudian menyederhanakannya menjadi 0.
3. Guru memberi tantangan berpikir dengan mengajukan pertanyaan seperti *“Kalau tidak ada lebar interval, tapi fungsi bernilai konstan besar, tetap ada area atau tidak?”* atau *“Bisakah kalian membuktikan sifat ini dengan konsep sigma dan limit seperti definisi integral tentu?”*.
4. Guru memfasilitasi kolaborasi dengan cara mendorong diskusi kecil untuk saling membandingkan hasil eksplorasi, kemudian mengajak peserta didik

menyimpulkan bersama-sama bahwa luas dengan panjang nol adalah nol, berapa pun tinggi fungsi.

5. Guru memberikan penguatan dan koneksi ke depan dengan cara menekankan bahwa sifat ini sangat berguna dalam perhitungan integral nanti karena dapat digunakan untuk menyederhanakan perhitungan tanpa proses panjang.

Berikut ini hasil yang diharapkan dari peserta didik untuk mengeksplorasi Sifat 3.10.

Dari definisi integral, diperoleh

$$\int_a^a f(x) dx = \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Jika $\Delta x_i = \frac{a-a}{n} = 0$, maka

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)(0) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Jadi, $\int_a^a f(x) dx = 0$.



Ayo Bereksplorasi 3.8

Berikut ini hasil yang diharapkan dari peserta didik untuk mengeksplorasi Sifat 3.11.

Dari definisi integral, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i \text{ dengan } \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \\ \text{sehingga } \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \left(\frac{b-a}{n} \right). \end{aligned}$$

Dari definisi integral, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i \text{ dengan } \Delta x_i = \frac{a-b}{n} \\ \text{sehingga } \int_b^a f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \left(\frac{a-b}{n} \right). \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \left(\frac{-(a-b)}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \left(\frac{a-b}{n} \right) \\
 &= -\int_b^a f(x) dx.
 \end{aligned}$$

Jadi, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, $a > b$.



Ayo Berpikir Kreatif

Guru meminta peserta didik untuk menunjukkan pembuktian dan penalaran dari Sifat 3.12 hingga Sifat 3.15 secara kreatif. Beberapa pendekatan yang dapat digunakan, antara lain grafik sederhana, contoh konkret, aljabar simbolik, dan model konteks nyata. Tujuan dari kegiatan ini adalah peserta didik memahami sifat-sifat integral tentu secara konseptual dan aplikatif; meningkatkan kemampuan berpikir kritis, kreatif, dan komunikatif; serta mengembangkan kecintaan belajar matematika lewat penemuan dan presentasi mandiri.

Sifat 3.12

Karena f dapat diintegrasikan pada $[a, b]$ dan $\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ ada, maka menurut Sifat 3.3, diperoleh

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(x_i) \Delta x_i = k \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i.$$

Jadi, $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

Sifat 3.13

$$\begin{aligned}
 \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)] \Delta x_i \\
 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \Delta x_i \right] \\
 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \Delta x_i \\
 &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.
 \end{aligned}$$

Jadi, $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

Sifat 3.14

$$\begin{aligned}
 \int_a^b [f(x) - g(x)] dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x_i \\
 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) + (-1)g(\bar{x}_i)] \Delta x_i
 \end{aligned}$$

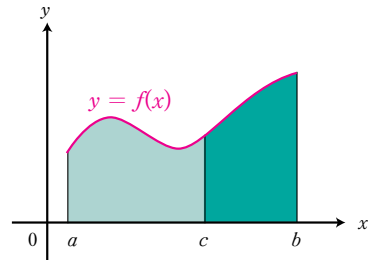
$$\begin{aligned}
&= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n (-1) g(\bar{x}_i) \Delta x_i \right] \\
&= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + (-1) \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \Delta x_i \\
&= \int_a^b f(x) dx + (-1) \int_a^b g(x) dx \\
&= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.
\end{aligned}$$

Jadi, $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.

Sifat 3.15

Pada grafik $y = f(x)$ di Gambar 3.5, terdapat daerah di bawah $f(x)$ dengan luas dari a ke c ditambah luas dari c ke b yang sama dengan luas total dari a ke b . Dengan demikian, dapat disimpulkan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Gambar 3.5 Grafik Fungsi $y = f(x)$

4. Teorema Dasar Kalkulus



Ayo Mengingat Kembali

Pada kegiatan ini guru mengarahkan peserta didik untuk mengingat kembali pengertian dan sifat fungsi kontinu, terutama hubungannya dengan konsep limit dan turunan dengan mengajukan pertanyaan pemantik seperti “Masih ingatkah kalian, apa yang dimaksud dengan fungsi kontinu?” atau “Mengapa kekontinuan penting dalam proses menurunkan fungsi?”.

Guru dapat membantu dengan menampilkan grafik fungsi kontinu dan tidak kontinu, kemudian meminta peserta didik menelaah perbedaannya. Tujuan kegiatan ini adalah agar peserta didik dapat (1) menghubungkan pengetahuan sebelumnya mengenai fungsi kontinu dengan pengetahuan baru yaitu Teorema Dasar Kalkulus, (2) menyadari bahwa integral sebagai proses “kebalikan” turunan yang tetap membutuhkan kekontinuan fungsi, dan (3) mengawali pembelajaran dengan kesadaran konsep, bukan sekadar rumus.



Petunjuk

Guru dapat menjelaskan dengan sederhana makna simbol $\frac{df(x)}{dx}$, misalnya dengan analogi “*Seberapa cepat sesuatu berubah?*” atau “*Kecepatan perubahan posisi suatu benda.*” Selanjutnya, guru menampilkan contoh nyata dari turunan seperti $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$, lalu bertanya kembali kepada peserta didik, “*Apa yang berubah di sini?*” Terakhir, guru dapat mengaitkan simbol turunan dengan Teorema Dasar Kalkulus, yaitu bahwa integral dan turunan saling invers.



Ayo Berpikir Kreatif

Guru memfasilitasi peserta didik untuk menemukan berbagai strategi dalam menyelesaikan soal integral, khususnya pada Contoh Soal 3.9 dan Contoh Soal 3.10 pada Buku Siswa. Guru menekankan bahwa dalam matematika, sebuah permasalahan dapat diselesaikan dengan lebih dari satu cara. Misalnya menghitung $\int_1^3 x^2 dx$ dapat dilakukan menggunakan sifat-sifat integral, memanfaatkan Teorema Dasar Kalkulus, atau dengan pendekatan luas menggunakan konsep dasar Jumlahan Riemann.

Guru dapat memotivasi peserta didik untuk mencoba menemukan cara alternatif tersebut. Kegiatan ini dapat dilakukan baik secara individu maupun kelompok, dilanjutkan dengan membandingkan efisiensi dan kejelasan setiap cara melalui presentasi di depan kelas. Guru dapat mengajukan pertanyaan: “*Adakah cara yang lebih sederhana?*”, “*Bagaimana jika kita menggunakan sifat integral?*”, atau “*Bisakah kita hubungkan dengan konsep luas di bawah kurva?*”. Dengan demikian, peserta didik terdorong untuk tidak hanya terpaku pada satu prosedur, tetapi juga melatih kreativitas matematis dan fleksibilitas berpikir.



Ayo Mencoba 3.8

1. Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus I, maka

$$F(x) = \int_a^b f(t) dt = \int_0^x (4 + t^6) dt,$$

dengan $f(t) = 4 + t^6$ dan $a = 0, b = x$.

Selain itu, Teorema Dasar Kalkulus I menyatakan bahwa

$$F'(x) = f(x).$$

Jika $f(t) = 4 + t^6$, maka $f(x) = (4 + x^6)$.

Jadi, $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x (4 + t^6) dt \right] = 4 + x^6$.

2. Diketahui: $v(t) = (5 - t)$ cm/detik

Ditanya: s saat $t = 0$ sampai $t = 5$

Jawab:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 (5 - t) dt \\ &= \left(5t - \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_0^5 = 25 - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, panjang lintasannya adalah $\frac{25}{2}$ cm.



Ayo Mencoba 3.9

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_0^3 (3 - 2x + x^2) dx &= \int_0^3 3 dx - \int_0^3 2x dx + \int_0^3 x^2 dx \\ &= 3 \int_0^3 dx - 2 \int_0^3 x dx + \int_0^3 x^2 dx \\ &= 3(x) \Big|_0^3 - 2 \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^3 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^3 \\ &= 3(3 - 0) - 2 \left(\frac{9}{2} - 0 \right) + (9 - 0) = 9. \end{aligned}$$

Jadi, $\int_0^3 (3 - 2x + x^2) dx = 9$.

2. Penentuan $\int_0^2 x^2(x^3 + 1) dx$ menggunakan Aturan Integrasi Substitusi.

Misalkan $g(x) = x^3 + 1$, maka

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 dx \\ \frac{1}{3}g'(x) &= x^2 dx. \end{aligned}$$

Soal dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2(x^3 + 1) dx &= \int_0^2 g(x) \left(\frac{1}{3} \right) g'(x) dx \\ &= \int_0^2 (x^3 + 1) \left(\left(\frac{1}{3} \right) 3x^2 dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \int_0^2 (x^3 + 1)(3x^2 dx) \\
 &= \frac{1}{6} (x^3 + 1)^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{6} (81 - 1) = \frac{40}{3}.
 \end{aligned}$$

Jadi, $\int_0^2 x^2 (x^3 + 1) dx = \frac{40}{3}$.



Ayo Mencoba 3.10

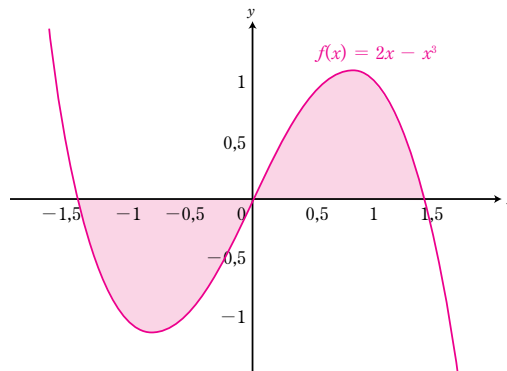
- Sebelum menggambar grafik $y = 2x - x^3$ pada koordinat Kartesius, peserta didik menentukan titik potong dengan sumbu- x . Caranya adalah menyubstitusikan persamaan $y = 2x - x^3$ pada $y = 0$.

$$\begin{aligned}
 2x - x^3 &= 0 \\
 x(2 - x^2) &= 0,
 \end{aligned}$$

sehingga

$$x = 0, x = -\sqrt{2}, \text{ atau } x = \sqrt{2}.$$

Grafik $y = 2x - x^3$ yang dihasilkan sebagai berikut.



Gambar 3.6 Grafik Fungsi $f(x) = 2x - x^3$

Pada Gambar 3.6, tampak kurva memotong sumbu- x di titik $-\sqrt{2}$, 0 , dan $\sqrt{2}$. Luas daerah pada $[0, \sqrt{2}]$ di atas sumbu- x adalah

$$\int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx$$

dan luas daerah pada $[0, \sqrt{2}]$ di bawah sumbu- x adalah

$$-\int_{-\sqrt{2}}^0 (2x - x^3) dx.$$

Berdasarkan Sifat 3.15, diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx &= \left(-\int_{-\sqrt{2}}^0 (2x - x^3) dx \right) + \left(\int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx \right) \\ &= -\left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^0 + \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2.\end{aligned}$$

Jadi, luas bidang datar tersebut adalah 2 satuan luas.

2. Sebelum menggambar grafik $y = x^3 - 9x$ pada koordinat Kartesius, peserta didik menentukan titik potong dengan sumbu- x . Caranya adalah menyubstitusikan $y = x^3 - 9x$ pada $y = 0$.

$$\begin{aligned}x^3 - 9x &= 0 \\ x(x^2 - 9) &= 0,\end{aligned}$$

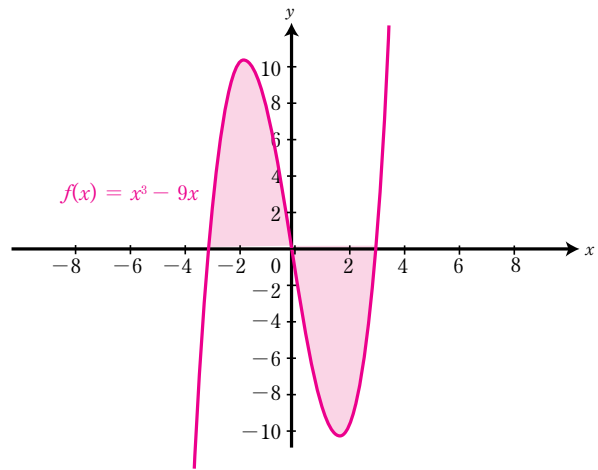
sehingga

$$x = 0, x = -3, \text{ atau } x = 3.$$

Grafik $y = x^3 - 9x$ yang dihasilkan sebagai berikut.

Pada Gambar 3.7, terdapat dua daerah, yaitu daerah pada $[-3, 0]$ di atas sumbu- x dan daerah pada $[0, 3]$ di bawah sumbu- x .

Berdasarkan Sifat 3.15, diperoleh



Gambar 3.7 Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 9x$

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 (x^3 - 9x) dx &= \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx + \left(-\int_0^3 (x^3 - 9x) dx \right) \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right) \Big|_{-3}^0 - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right) \Big|_0^3 \\ &= \left[(0 - 0) - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) - (0 - 0) \right] \\ &= \left[0 - \left(-\frac{81}{4} \right) \right] - \left[\left(-\frac{81}{4} \right) - 0 \right] \\ &= \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{162}{4} = 40,5.\end{aligned}$$

Jadi, luas daerahnya adalah 40,5 satuan luas.

Subbab C: Penerapan Integral

Indikator Tujuan Pembelajaran

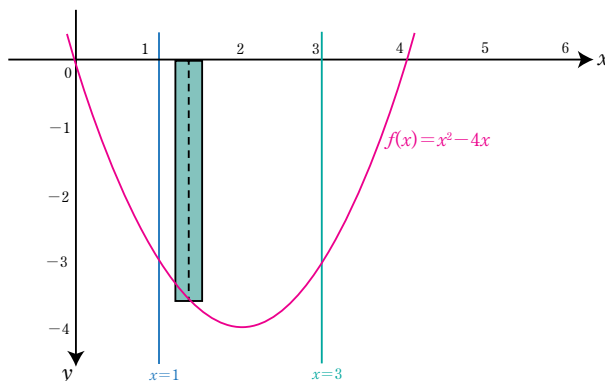
- ▶ menerapkan integral tentu dalam perhitungan luas daerah di bawah kurva;
- ▶ menyelesaikan masalah kontekstual dengan integral tentu; dan
- ▶ menilai kesesuaian model matematis dalam konteks masalah integral tentu.

1. Aplikasi Integral untuk Menentukan Luas Daerah pada Kurva



Ayo Mencoba 3.11

1. Jika kita memperhatikan Gambar 3.8, terdapat interval tertutup yaitu $[1, 3]$.



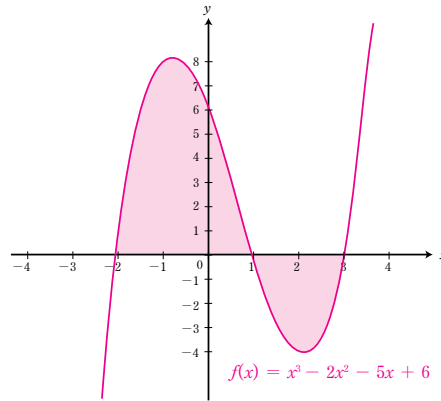
Gambar 3.8 Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x$

Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $x_i^2 - 4x_i$. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $(x_i^2 - 4x_i)\Delta x_i$. Misalkan A adalah luas daerah tersebut, maka

$$\begin{aligned} A &= \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 4x_i) \Delta x_i \\ &= - \int_1^3 (x^2 - 4x) dx \\ &= - \left. \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right|_1^3 = \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Jadi, luas daerahnya adalah $\frac{22}{3}$ satuan luas.

2. Jika kita memperhatikan Gambar 3.9, terdapat interval tertutup yaitu $[-2, 1]$ di atas sumbu- x dan $[1, 3]$ di bawah sumbu- x .



Gambar 3.9 Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6$. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $(x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6)\Delta x_i$. Karena terdapat dua daerah, yaitu di atas sumbu- x dan di bawah sumbu- x , maka

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6)\Delta x_i \\ &= \int_{-2}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6)\Delta x_i \\ &= - \int_1^3 f(x) dx \\ &= - \int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx. \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx - \int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_{-2}^1 - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{63}{4} - \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{189}{12} + \frac{64}{12} = \frac{253}{12}. \end{aligned}$$

Jadi, luas daerahnya $\frac{253}{12}$ satuan luas.

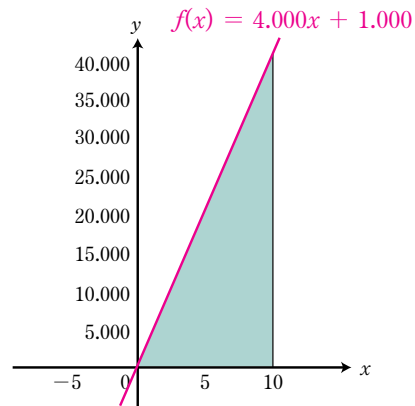
2. Aplikasi Integral dalam Bidang Ekonomi dan Bisnis



Ayo Mencoba 3.12

- a. Sketsa grafik $f(x) = 4.000x + 1.000$; $0 \leq x \leq 10$ sebagai berikut.

Jika kita memperhatikan Gambar 3.10, terdapat interval tertutup yaitu $[0, 5]$. Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $(4.000x_i + 1.000)$. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $(4.000x_i + 1.000)\Delta x_i$. Jika s adalah jumlah penghematan dalam 5 tahun pertama, maka



Gambar 3.10 Grafik Fungsi $f(x) = 4.000x + 1.000$

$$\begin{aligned} S &= \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (4.000x_i + 1.000) \Delta x_i \\ &= \int_0^5 f(x) dx \\ &= \int_0^5 (4.000x + 1.000) dx \\ &= (2.000x^2 + 1.000x) \Big|_0^5 = 55.000. \end{aligned}$$

Jadi, jumlah penghematan biaya operasional dalam 5 tahun pertama adalah Rp55.000,00.

- b. Harga seperangkat peralatan adalah Rp36.000,00 dan misalkan dalam n tahun, harga peralatan itu kembali, maka

$$\begin{aligned} \int_0^n f(x) dx &= 36.000 \\ \int_0^n (4.000x + 1.000) dx &= 36.000 \\ (2.000x^2 + 1.000x) \Big|_0^n &= 36.000 \\ 2.000n^2 + 1.000n &= 36.000 \\ 2n^2 + n - 36 &= 0 \\ (n - 4)(2n + 9) &= 0, \end{aligned}$$

diperoleh

$$n = 4 \text{ atau } n = -\frac{9}{2}.$$

Jadi, harga peralatan itu kembali dalam jangka waktu 4 tahun.

3. Aplikasi Integral dalam Bidang Fisika



Ayo Mencoba 3.13

Menurut Hukum Hooke, gaya yang diperlukan untuk menahan pegas meregang x meter di luar panjang alaminya adalah $f(x) = kx$. Ketika pegas ditarik dari 10 cm sampai 15 cm, jumlah yang diregangkan adalah

$$15 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}.$$

Ini berarti $f(0,05) = 40$, maka

$$f(0,05) = 40$$

$$0,05k = 40$$

$$k = 800.$$

Karena $k = 800$, usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm adalah

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 800x \, dx = 400x^2 \Big|_{0,05}^{0,08} = 1,56.$$

Jadi, usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm adalah 1,56 joule.

4. Aplikasi Integral dalam Bidang Kesehatan



Ayo Berdiskusi

Guru mengelompokkan peserta didik, kemudian menampilkan kasus biologis tentang penyembuhan luka yang dimodelkan secara matematis melalui fungsi kecepatan $f(t) = -11(t+9)$ cm² per hari, dengan t adalah jumlah hari sejak hari Selasa.

Peserta didik kemudian diarahkan untuk berdiskusi dalam kelompok kecil untuk (1) menentukan lebar luka dan (2) memperkirakan lebar luka pada

hari Sabtu jika proses penyembuhan luka berlangsung dengan kecepatan yang sama.

Selama diskusi berlangsung, guru menstimulus pemikiran peserta didik dengan pertanyaan:

- ▶ “Apa arti fungsi kecepatan penyembuhan tersebut?”
- ▶ “Bagaimana integral dapat membantu menghitung lebar luka dari hari ke hari?”

Dari hasil perhitungan integral, diperoleh model

$$L = -\frac{11}{2}t^2 - 99t + 226.$$

Dengan menyubstitusikan $t = 0$ yaitu pada hari Selasa, maka luas luka 226 cm^2 . Ketika $t = 4$ yaitu pada hari Sabtu, nilai yang muncul adalah negatif. Guru dan peserta didik dapat menarik kesimpulan bahwa model matematika tidak hanya menghasilkan angka, tetapi juga dapat menjelaskan fenomena nyata, misalnya penyembuhan luka.

G. Sumatif

1. Guru menugaskan peserta didik untuk menyelesaikan Uji Kompetensi Bab 3. Uji kompetensi ini dapat digunakan sebagai salah satu alternatif untuk melakukan evaluasi sumatif pada akhir pembelajaran.
2. Peserta didik didorong untuk berpikir kritis, kreatif, dan inovatif melalui asesmen ini (*berkesadaran*), yang mencakup pemahaman tentang bagaimana mereka menerapkan konsep integral. Peserta didik juga didorong untuk membuat hubungan yang signifikan antara konten matematis dan skenario dunia nyata (*bermakna*), seperti mengaitkan konsep integral pada kehidupan sehari-hari. Untuk menumbuhkan lingkungan belajar yang ceria dan *menggembirakan*, asesmen ini disusun sebagai proyek kreatif yang memberi peserta didik kesempatan untuk bekerja secara mandiri, kolaboratif, dan berkomunikasi berdasarkan temuan mereka secara interaktif di depan kelas.
3. Asesmen ini mengevaluasi kemampuan kognitif peserta didik dalam memahami materi integral sekaligus mendorong kreativitas, keingintahuan, dan komunikasi. Berdasarkan pendekatan ini, peserta

didik diharapkan dengan penuh kesadaran dapat mempelajari matematika secara mendalam (*berkesadaran*), relevan (*bermakna*), dan menyenangkan (*menggembirakan*).

Contoh kisi-kisi untuk asesmen sumatif pada materi integral dapat dilihat pada Tabel 3.4, sedangkan rubrik penskoran asesmen sumatif dapat dilihat pada Tabel 3.5.

Tabel 3.4 Contoh Kisi-Kisi Penilaian Uji Kompetensi (Asesmen Sumatif)

No.	Tujuan Pembelajaran	Materi	Indikator	Teknik Penilaian	No. Soal	Level SOLO	Jumlah
1.	Peserta didik mampu menemukan konsep integral tak tentu.	Integral Tak Tentu	Menjelaskan makna integral tak tentu sebagai invers dari turunan.	Melengkapi jawaban	A1	Unistruktural	1
			Mengidentifikasi bentuk fungsi yang dapat diintegrasikan.	Benar-Salah	B	Multistruktural	5
2.	Peserta didik mampu menerapkan konsep integral tak tentu melalui penyelesaian masalah.		Menggunakan aturan integral tak tentu untuk menyelesaikan soal.	Pilihan Ganda	C1	Relasional	1
3.	Peserta didik mampu menemukan konsep integral tentu.	Integral Tentu	Menjelaskan pengertian integral tentu sebagai luas di bawah kurva.	Melengkapi jawaban	A2	Unistruktural	1
				Uraian	D1	Relasional	1
			Menghubungkan konsep integral tentu dengan teorema dasar kalkulus.	Melengkapi jawaban	A3	Unistruktural	1
				Uraian	D1 D3 D4	Relasional Multistruktural Multistruktural	3
			Menghitung nilai integral tentu dari fungsi sederhana.	Uraian	D1 D2 D4	Relasional Unistruktural Multistruktural	3
4.	Peserta didik mampu menerapkan konsep integral tentu melalui penyelesaian masalah.	Penerapan Integral	Menerapkan integral tentu dalam perhitungan luas daerah di bawah kurva.	Pilihan Ganda Kompleks	C3 C4 C5	Relasional Relasional Relasional	3
			Menyelesaikan masalah kontekstual dengan integral tentu.	Pilihan Ganda Kompleks	C2 C3 C4 C5	Relasional Relasional Relasional Relasional	4
				Uraian	D5 D6	Relasional Relasional	2

No.	Tujuan Pembelajaran	Materi	Indikator	Teknik Penilaian	No. Soal	Level SOLO	Jumlah
			Menilai kesesuaian matematis dalam konteks masalah integral tentu.	Pilihan Ganda Kompleks	C2 C3 C4 C5	Relasional Relasional Relasional Relasional	4
				Uraian	D6	Relasional	1

Tabel 3.5 Contoh Rubrik Penskoran Soal Berbentuk Uraian

Langkah	Skor	Indikator Penskoran
Memahami masalah	3	Peserta didik mampu menuliskan (mengungkapkan) apa yang diketahui dan ditanyakan dari masalah yang diajukan dengan jelas.
	2	Peserta didik hanya menuliskan (mengungkapkan) apa yang diketahui atau apa yang ditanyakan.
	1	Peserta didik menuliskan (mengungkapkan) data/konsep/pengetahuan yang tidak berhubungan dengan masalah yang diajukan.
	0	Peserta didik tidak menuliskan apa pun sehingga peserta didik tidak memahami makna dari masalah yang diajukan.
Merencanakan penyelesaian	2	Peserta didik menuliskan/menceritakan syarat cukup dan syarat perlu (rumus) dari masalah yang diajukan serta menggunakan semua informasi yang telah dikumpulkan.
	1	Peserta didik menceritakan/menuliskan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah, tetapi tidak runtut.
	0	Peserta didik tidak menceritakan/menulis langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah.
Melaksanakan rencana	4	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, menggunakan langkah-langkah menyelesaikan masalah dengan benar, tidak terjadi kesalahan prosedur, dan tidak terjadi kesalahan algoritma/perhitungan.
	3	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, menggunakan langkah-langkah menyelesaikan masalah dengan benar, dan tidak terjadi kesalahan prosedur, tetapi terjadi kesalahan algoritma/perhitungan.
	2	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, tetapi terjadi kesalahan prosedur.

Langkah	Skor	Indikator Penskoran
	1	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, tetapi terjadi kesalahan prosedur dan kesalahan algoritma/perhitungan.
	0	Peserta didik tidak mampu melaksanakan rencana yang telah dibuat.
Memeriksa kembali	1	Peserta didik melakukan pemeriksaan kembali jawaban.
	0	Peserta didik tidak melakukan pemeriksaan kembali jawaban.

Catatan:

1. Soal berbentuk pilihan ganda biasanya diberikan skor 1 jika jawaban benar dan skor 0 untuk jawaban salah.
2. Guru dapat menetapkan bobot yang berbeda-beda antara aspek satu dan lainnya (sebagaimana contoh rubrik penskoran pada Tabel 3.5) dengan memperhatikan karakteristik tujuan pembelajaran atau keterampilan yang dinilai.
3. Alternatif perhitungan pemberian nilai:

$$\text{Nilai} = (\text{skor bagian A}) + (\text{skor bagian B}) + (\text{skor bagian C}) + (\text{skor bagian D})$$

H. Kunci Jawaban

Latihan Soal Integral Tak Tentu

1. Integral Tak Tentu

- a. $\int 2x^7 dx = \frac{2}{8}x^8 + C = \frac{1}{4}x^8 + C.$
- b. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$
- c. $\int (3x^5 - 2x^3) dx = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + C.$
- d. $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C.$

2. Integral Tak Tentu dengan Aturan Integrasi Substitusi

- a. $\int \sqrt[3]{6-2x} dx = -\frac{3}{4}(3-x)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{6-2x} + C.$
- b. $\int x(x^2-9)^2 dx = \int \frac{(x^2-9)^2}{2}(2x dx) = \frac{(x^2-9)^3}{6} + C.$
- c. $\int 2 \sin x \sqrt[3]{1+\cos x} dx = -\frac{3}{2}(1+\cos x)^{\frac{4}{3}} + C.$
- d. $\int e^x (3e^x + 2)^2 dx = \frac{1}{9}(3e^x + 2)^3 + C.$

3. Integral Tak Tentu

- $\int x(5x^2 - 3)^7 dx = \frac{(5x^2 - 3)^8}{80} + C.$
- $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$
- $\int x^2 \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} + \frac{4}{5}(1-x)^2 \sqrt{1-x} - \frac{2}{7}(1-x)^3 \sqrt{1-x} + C.$
- $\int 6 \sin^3 x dx = 2 \cos^3 x - 6 \cos x + C.$

4. Diketahui volume sel bertambah dengan kecepatan $(12 - t)^{-2}$ mikrometer kubik per hari setelah tanggal 1 Desember sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (12 - t)^{-2} \\ dV &= \frac{1}{(12 - t)^2} dt \\ \int dV &= \int \frac{1}{(12 - t)^2} dt \\ V &= \frac{1}{12 - t} + C.\end{aligned}$$

Karena pada 3 Desember volume sel itu adalah $3 \mu m^3$, maka

$$\begin{aligned}V(2) &= 3 \text{ dan } C = \frac{29}{10}, \\ \text{sehingga } V(t) &= \frac{1}{12 - t} + \frac{29}{10}.\end{aligned}$$

Jadi, pada tanggal 8 Desember ($t = 7$), volume sel tanaman adalah $V(7) = \frac{1}{12 - 7} + \frac{29}{10} = 3,1 \mu m^3$.

5. Perubahan harga terhadap jumlah permintaan adalah $p'(x) = -0,017e^{-0,01x}$ sehingga

$$p(x) = \int -0,017e^{-0,01x} dx = 1,7e^{-0,01x} + C.$$

Berikutnya adalah menentukan C . Karena harga per kemasan adalah Rp39.500,00 saat $x = 50$, maka $C = 39.498,97$. Jadi, harga per kemasan yang harus ditetapkan oleh supermarket jika ingin menjual 100 kemasan per minggu adalah sekitar Rp39.499,00.

Latihan Soal Integral Tentu

1. Dengan menyubstitusikan nilai $\bar{x}_i$ ke $f(\bar{x}_i) = 2 + \bar{x}_i$ (Gambar 3.11), diperoleh

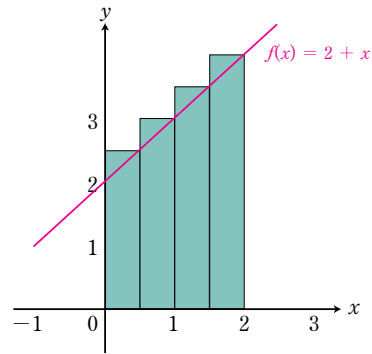
$$\bar{x}_1 = 0,5 \text{ maka } f(0,5) = 2,5;$$

$$\bar{x}_2 = 1 \text{ maka } f(1) = 3;$$

$$\bar{x}_3 = 1,5 \text{ maka } f(1,5) = 3,5;$$

$$\bar{x}_4 = 2 \text{ maka } f(2) = 4.$$

Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = 2 + x$ pada interval $[0, 2]$ adalah 6,5.



Gambar 3.11 Grafik Fungsi $f(x) = 2 + x$

2. Dengan menyubstitusikan nilai $\bar{x}_i$ ke $f(\bar{x}_i) = (2 - \bar{x}_i)^2$ (Gambar 3.12), diperoleh

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3} \text{ maka } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{25}{9};$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2}{3} \text{ maka } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9};$$

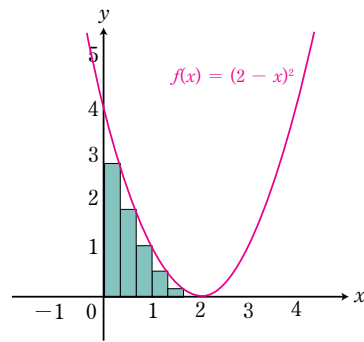
$$\bar{x}_3 = 1 \text{ maka } f(1) = 1;$$

$$\bar{x}_4 = \frac{4}{3} \text{ maka } f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9};$$

$$\bar{x}_5 = \frac{5}{3} \text{ maka } f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{9};$$

$$\bar{x}_6 = 2 \text{ maka } f(2) = 0.$$

Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = (2 - x)^2$ pada interval $[0, 2]$ adalah $\frac{55}{27}$.



Gambar 3.12 Grafik Fungsi $f(x) = (2 - x)^2$

3. Dengan menyubstitusikan nilai $\bar{x}_i$ ke $f(\bar{x}_i) = \bar{x}_i^2 + \bar{x}_i$ (Gambar 3.13), diperoleh

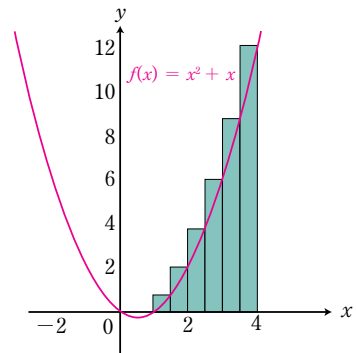
$$\bar{x}_1 = 1,5 \text{ maka } f(1,5) = \frac{15}{4};$$

$$\bar{x}_2 = 2 \text{ maka } f(2) = 6;$$

$$\bar{x}_3 = 2,5 \text{ maka } f(2,5) = \frac{35}{4};$$

$$\bar{x}_4 = 3 \text{ maka } f(3) = 12;$$

$$\bar{x}_5 = 3,5 \text{ maka } f(3,5) = \frac{63}{4};$$

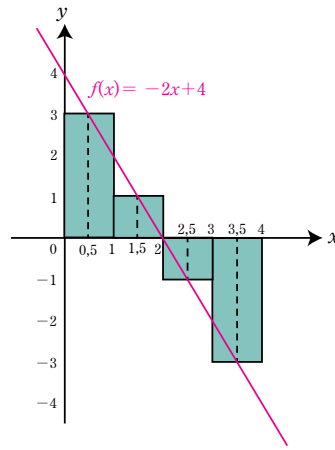


Gambar 3.13 Grafik Fungsi $f(x) = x^2 + x$

$\bar{x}_6 = 4$ maka $f(4) = 20$.

Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = x^2 + x$ pada interval $[1, 4]$ adalah $\frac{265}{8}$ atau 33,125.

4. Jumlahan Riemann berdasarkan grafik fungsi $f(x) = -2x + 4$ dengan interval $[0, 4]$ pada Gambar 3.14, dapat ditentukan dengan menyubstitusikan nilai $\bar{x}_i$ ke $f(\bar{x}_i) = -2\bar{x}_i + 4$ sehingga diperoleh



$\bar{x}_1 = 0,5$ maka $f(0,5) = 3$;

$\bar{x}_2 = 1,5$ maka $f(1,5) = 1$;

$\bar{x}_3 = 2,5$ maka $f(2,5) = -1$;

$\bar{x}_4 = 3,5$ maka $f(3,5) = -3$.

Gambar 3.14 Grafik Fungsi $f(x) = -2x + 4$

Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = -2x + 4$ pada interval $[0, 4]$ adalah 8.

5. Dengan menyubstitusikan nilai $\bar{x}_i$ ke $f(\bar{x}_i) = \frac{1}{\bar{x}_i}$, diperoleh

$\bar{x}_1 = \frac{5}{4}$ maka $f(\frac{5}{4}) = \frac{4}{5}$;

$\bar{x}_3 = \frac{5}{2}$ maka $f(\frac{5}{2}) = \frac{2}{5}$;

$\bar{x}_2 = 2$ maka $f(2) = \frac{1}{2}$;

$\bar{x}_4 = \frac{11}{4}$ maka $f(\frac{11}{4}) = \frac{4}{11}$.

Lebar setiap subintervalnya adalah

$$\Delta x_1 = 1\frac{2}{3} - (-1) = \frac{8}{3};$$

$$\Delta x_3 = 2\frac{2}{3} - 2\frac{1}{4} = \frac{5}{12};$$

$$\Delta x_2 = 2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3} = \frac{7}{12};$$

$$\Delta x_4 = 3 - 2\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Jadi, jumlahan Riemann dari $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah $\frac{3.581}{1.320}$.

6. Integral tentu $f(x) = 2 + x$ pada interval $[0, 2]$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2 + x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{2i}{n} \right) \left(\frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{n} + \frac{4i}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{4}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{4i}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} (n) + \frac{4}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \right) = 6. \end{aligned}$$

7. Integral tentu $f(x) = (2-x)^2 = 4 - 4x + x^2$ pada interval $[0, 2]$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (4 - 4x + x^2) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(4 - 4\left(\frac{2i}{n}\right) + \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \right) \left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{n}(n) - \frac{16}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{8}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \right) = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

8. Integral tentu $f(x) = x^2 + x$ pada interval $[1, 4]$ dengan menggunakan titik kanan $x_i = 1 + \frac{3i}{n}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\int_1^4 (x^2 + x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{27i^2}{n^3} + \frac{27i}{n^2} + \frac{6}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{27}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + \frac{27}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{6}{n}(n) \right) = \frac{57}{2}.\end{aligned}$$

9. Integral tentu $f(x) = x^2 - x + 4$ pada interval $[0, 4]$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\int_0^4 (x^2 - x + 4) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{4i}{n}\right)^2 - \left(\frac{4i}{n}\right) + 4 \right) \left(\frac{4}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{16}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{64}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{16}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{16}{n}(n) \right) = \frac{88}{3}.\end{aligned}$$

10. Integral tentu $f(x) = x^2 + 4x + 5$ pada interval $[1, 4]$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(10 + \frac{18}{n}i + \frac{9}{n^2}i^2 \right) \left(\frac{3}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{30}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{30}{n}(n) + \frac{54}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \right) = 66.\end{aligned}$$

11. a. $\frac{d}{dx} \left[\int_x^2 (t^2 + t^{\frac{2}{3}}) dt \right] = \frac{d}{dx} \left[- \int_2^x (t^2 + t^{\frac{2}{3}}) dt \right] = -(x^2 + x^{\frac{2}{3}}).$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^3 x \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 3 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx \\
 &= (\cos^3 x - 3 \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + (\cos^3 x - 3 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= (1 - 3) + (-(1 - 3)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\text{c. } \int_0^2 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} (e^{2x}) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (e^4 - 1).$$

12. Untuk x , y , dan dx dinyatakan dalam θ dan $d\theta$, maka batas-batas integrasinya menjadi

- $dx = -6 \sin \theta \, d\theta$,
- jika $x = 6 \cos \theta = 6$, maka $\theta = 0$, dan
- jika $x = 6 \cos \theta = 3$, maka $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
 \int_3^6 xy \, dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (6 \cos \theta)(2 \sin \theta)(-6 \sin \theta \, d\theta). \\
 &= -72 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \\
 &= 72 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \\
 &= 24 (\sin^3 \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= 9\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

13. Misalkan $\int_0^9 f(x) \, dx = 37$ dan $\int_0^9 g(x) \, dx = 16$, maka

$$\begin{aligned}
 \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] \, dx &= 2 \int_0^9 f(x) \, dx + 3 \int_0^9 g(x) \, dx \\
 &= 2(37) + 3(16) = 122.
 \end{aligned}$$

14. a. Perpindahan partikel selama periode waktu $1 \leq t \leq 4$.

$$g(x) = \int_a^x (t^2 - t - 6) \, dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x.$$

$$\text{Untuk } x = b = 4, \text{ maka } g(b) = g(4) = \frac{-64}{6}.$$

$$\text{Untuk } x = a = 1, \text{ maka } g(a) = g(1) = \frac{-37}{6}.$$

$$\int_1^4 (t^2 - t - 6) \, dt = g(4) - g(1) = -\frac{9}{2}.$$

Jadi, perpindahan partikel selama periode waktu $1 \leq t \leq 4$ adalah 4,5 meter ke arah kiri.

- b. Jarak yang ditempuh selama periode waktu $1 \leq t \leq 4$.

Apabila sketsa grafik digambarkan, terdapat dua daerah yang terbentuk, yaitu daerah di bawah sumbu- x pada interval $[1, 3]$ dan daerah di atas sumbu- x pada interval $[3, 4]$, maka

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_1^4 v(t) dt \\ &= \int_1^4 (t^2 - t - 6) dt \\ &= \left(-\int_1^3 (t^2 - t - 6) dt \right) + \int_3^4 (t^2 - t - 6) dt \\ &= -(g(3) - g(1)) + (g(4) - g(3)) \\ &= -\left(-\frac{22}{3}\right) + \frac{17}{6} = \frac{61}{6} = 10,17. \end{aligned}$$

Jadi, jarak yang ditempuh adalah 10,17 meter.

15. Jarak yang ditempuh sampai b jam dinyatakan dengan $s = \int_0^b v dt$ sehingga

$$\begin{aligned} s_{\text{Satria}} &= \int_0^b v_A dt = \int_0^b \left(t + \frac{1}{t+1} \right) dt, \\ s_{\text{Satwika}} &= \int_0^b v_B dt = \int_0^b \left(t + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Dengan demikian, cukup ditunjukkan perbandingan jarak untuk setiap $b > 0$. Karena $v_B \leq v_A$, maka $v_B - v_A \leq 0$.

$$\left(t + \frac{1}{(t+1)^2} \right) - \left(t + \frac{1}{t+1} \right) = \frac{-t}{(t+1)^2}.$$

- Saat $t = 0$ (posisi awal), $v_B = v_A$. Kita asumsikan Satria dan Satwika berangkat dari posisi yang sama.
- Saat $t > 0$, maka $\frac{-t}{(t+1)^2} < 0$. Jadi, $v_B < v_A$ sehingga $s_{\text{Satwika}} < s_{\text{Satria}}$ yang berarti Satwika tidak akan pernah menyusul Satria.

Latihan Soal Penerapan Integral

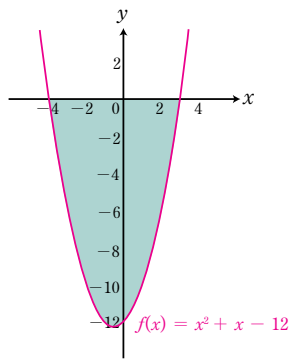
1. Karena kurva memotong sumbu- x , maka $y = 0$. Dengan menyubstitusikan $y = 0$ ke persamaan $y = x^2 + x - 12$, diperoleh

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

Dengan memfaktorkan persamaan $x^2 + x - 12 = 0$, diperoleh

$$x_1 = -4 \text{ atau } x_2 = 3.$$

Jadi, titik potong kurva $y = x^2 + x - 12$ dengan sumbu- x adalah $(-4, 0)$ dan $(3, 0)$. Apabila digambarkan, grafiknya akan tampak seperti pada Gambar 3.15.



$$\begin{aligned}
 \text{Luas} &= \int_{-4}^3 (-(f(x))) \, dx \\
 &= \int_{-4}^3 (-(x^2 + x - 12)) \, dx \\
 &= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right) \Big|_{-4}^3 \\
 &= \frac{343}{6}.
 \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah tersebut adalah $\frac{343}{6}$ satuan luas.

Gambar 3.15 Grafik Fungsi $f(x) = x^2 + x - 12$

2. Langkah pertama adalah menentukan titik potong antara kurva $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4x$. Dengan menyubstitusikan kedua persamaan tersebut, maka

$$\begin{aligned}
 x^2 &= -x^2 + 4x \\
 2x^2 - 4x &= 0 \\
 2x(x - 2) &= 0,
 \end{aligned}$$

diperoleh $x_1 = 0$ atau $x_2 = 2$.

- Untuk $x_1 = 0$, substitusikan x_1 ke salah satu persamaan (misalkan ke $y = x^2$) sehingga diperoleh $y_1 = 0$. Jadi, titik potongnya adalah $(0, 0)$.
- Untuk $x_2 = 2$, substitusikan x_2 ke salah satu persamaan sehingga diperoleh $y_2 = 4$. Jadi, titik potongnya adalah $(2, 4)$.

Pada interval $(0, 2)$, kurva fungsi $y = -x^2 + 4x$ berada di atas kurva fungsi $y = x^2$. Dari titik potong $(0, 0)$ dan $(2, 4)$, luas yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4x$ adalah

$$\text{Luas} = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) \, dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Jadi, luas daerah tersebut adalah $\frac{8}{3}$ satuan luas.

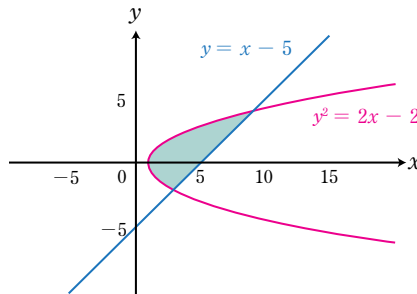
3. Dengan menyubstitusikan $y = x - 5$ ke persamaan $y^2 = 2x - 2$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 (x - 5)^2 &= 2x - 2 \\
 x^2 - 10x + 25 &= 2x - 2 \\
 x^2 - 12x + 27 &= 0.
 \end{aligned}$$

Dengan memfaktorkan persamaan kuadrat $x^2 - 12x + 27 = 0$, diperoleh $x_1 = 9$ atau $x_2 = 3$.

- Untuk $x_1 = 9$, substitusikan x_1 ke salah satu persamaan (misalkan ke $y = x - 5$), diperoleh $y_1 = 9 - 5 = 4$. Jadi, titik potongnya adalah $(9, 4)$.
- Untuk $x_2 = 3$, substitusikan ke salah satu persamaan (misalkan persamaan $y = x - 5$), diperoleh $y_2 = 3 - 5 = -2$. Jadi, titik potongnya adalah $(3, -2)$.

Dengan demikian, bentuk grafiknya seperti pada Gambar 3.16.



Gambar 3.16 Grafik Fungsi $y^2 = 2x - 2$ dan $y = x - 5$

Luas daerah yang dibatasi oleh $y^2 = 2x - 2$ dan $y = x - 5$ adalah

$$\begin{aligned}
 \text{Luas} &= \int_{-2}^4 \left((y+5) - \left(\frac{y^2}{2} + 1 \right) \right) dy \\
 &= \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^2}{2} + y + 4 \right) dy \\
 &= \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + 4y \right) \Big|_{-2}^4 = 18.
 \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah tersebut adalah 18 satuan luas.

4. Jumlah total lalat setelah 20 hari = jumlah awal + jumlah lalat baru

$$\begin{aligned}
 G(t) &= G(0) + \int_0^{20} 2e^{0,02t} dt \\
 &= 50 + \left(\frac{2}{0,02} e^{0,02t} \right) \Big|_0^{20} \\
 &= 50 + 49,18 \approx 99.
 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah lalat buah setelah 20 hari sebanyak 99 ekor.

5. Gulungan kabel seberat 200 kg memiliki panjang 100 meter, maka

$$\mu = \frac{200}{100} = 2,$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{100} w \cdot x \, dx = \int_0^{100} (\mu \cdot g) \cdot x \, dx \\
 &= \int_0^{100} (2(9,8)) \cdot x \, dx = 19,6 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{100} = 98.000.
 \end{aligned}$$

Jadi, usaha yang diperlukan untuk mengangkat kabel ke puncak gedung adalah 98.000 Joule.

Uji Kompetensi Bab 3

A. Isian Singkat

- Integral adalah kebalikan dari **turunan**. Jika turunan dari $f(x)$ adalah $v(x)$, maka **integral** dari $v(x)$ adalah $f(x)$. Jika $v(x) = 10x$, maka $f(x) = 5x^2 + C$.
- Integrasi menghasilkan **integral** di bawah kurva $y = v(x)$. Dimulai dari persegi panjang dengan alas Δx dan tinggi $v(x)$, serta luas $v(x)\Delta x$. Saat $\Delta x \rightarrow 0$, luas $v_1\Delta x + \dots + v_n\Delta x$ menjadi **sebuah angka** dari $v(x)$. Simbol untuk integral tak tentu dari $v(x)$ adalah $\int v(x) \, dx$.
- Masalah integrasi terselesaikan jika kita menemukan $f(x)$ sedemikian sehingga **turunan** $f(x) = v(x)$. Dengan demikian, fungsi f adalah **antiturunan** dari v , dan $\int_2^6 v(x) \, dx$ sama dengan $f(6) - f(2)$. Batas-batas integrasi adalah **$a = 2$ dan $b = 6$** . Hal ini merupakan **integral tentu**, dengan hasilnya adalah **sebuah angka** dan bukan fungsi $f(x)$.

B. Kebenaran dari Pernyataan

- Benar.
- Salah.
- Salah.
- Salah.
- Salah.

C. Pilihan Ganda/Pilihan Ganda Kompleks

- B.
- A, B, D, dan E.
- A, B, dan E.
- A, C, D, dan E.
- A, C, D, dan E.

D. Uraian

- Diketahui fungsi $f(x) = 12 - x - x^2$, sumbu- x , garis $x = -3$, dan garis $x = 2$.

- a. Misalkan dijadikan 5 partisi maka masing-masing memiliki $\Delta x = 1$.

Kita dapat membuat tabel pendekatan luas daerah menggunakan Jumlahan Riemann pada fungsi $f(x) = 12 - x - x^2$ seperti berikut.

$\bar{x}_i$	$f(\bar{x}_i)$	Δx_i	$f(\bar{x}_i)\Delta x_i$
-2,5	8,25	1	8,25
-1,5	11,25	1	11,25
-0,5	12,25	1	12,25
0,5	11,25	1	11,25
1,5	8,25	1	8,25
$\sum_{i=1}^5 f(\bar{x}_i)\Delta x_i$			51,25

Jadi, luasnya adalah 51,25 satuan luas.

- b.
$$\int_{-3}^2 (12 - x - x^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 (12 - x - x^2) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(12 - \left(-3 + \frac{5i}{n}\right) - \left(-3 + \frac{5i}{n}\right)^2\right) \left(\frac{5}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(6 + \frac{25i}{n} - \frac{25i^2}{n^2}\right) \left(\frac{5}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{30}{n} + \frac{125i}{n^2} - \frac{125i^2}{n^3}\right) = \frac{305}{6}. \end{aligned}$$
- c.
$$\int_{-3}^2 (12 - x - x^2) dx = 12x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-3}^2 = \frac{305}{6}.$$

Sifat yang dapat digunakan dalam penyelesaian integral tentu di atas adalah Sifat 3.14 dan Teorema Dasar Kalkulus II.

2. Persamaan $|x + 2|$ dapat didefinisikan dengan

$$|x + 2| = \begin{cases} -(x + 2), & x \leq -2, \\ x + 2, & x \geq -2, \end{cases}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 |x + 2| dx &= \int_{-3}^{-2} -(x + 2) dx + \int_{-2}^4 (x + 2) dx. \\ &= -\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_{-2}^4 = \frac{37}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, $\int_{-3}^4 |x + 2| dx = \frac{37}{2}$.

3.
$$\int_{-1}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^4 f(x) dx + \int_4^3 f(x) dx + \int_3^{-1} f(x) dx = \int_{-1}^{-1} f(x) dx = 0.$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \int_4^{16} \left[\frac{d}{dx} \int_5^x (2\sqrt{t} - 1) dt \right] dx &= \int_4^{16} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - x - \frac{4}{3} 5^{\frac{3}{2}} + 5 \right) \right] dx \\
 &= \int_4^{16} (2x^{\frac{1}{2}} - 1) dx = \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - x \right) \Big|_4^{16} = \frac{188}{3}.
 \end{aligned}$$

5. Diketahui pertambahan harga nilai lukisan terhadap waktu sesuai dengan:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= 5t^{\frac{3}{2}} + 10t + 50 \\
 \int dV &= \int (5t^{\frac{3}{2}} + 10t + 50) dt \\
 V &= 2t^{\frac{5}{2}} + 5t^2 + 50t + C.
 \end{aligned}$$

Harga awal lukisan saat pertama dibeli ($t = 0$) adalah Rp15.000.000,00, maka

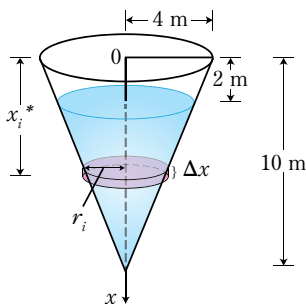
$$\begin{aligned}
 V(0) &= 15.000.000 \\
 2(0)^{\frac{5}{2}} + 5(0)^2 + 50(0) + C &= 15.000.000 \\
 C &= 15.000.000.
 \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa

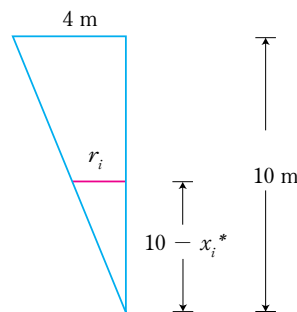
$$\begin{aligned}
 V(t) &= 2t^{\frac{5}{2}} + 5t^2 + 50t + 15.000.000. \\
 V(4) &= 2(4)^{\frac{5}{2}} + 5(4)^2 + 50(4) + 15.000.000 = 15.000.344.
 \end{aligned}$$

Jadi, harga lukisan tersebut 4 tahun kemudian adalah Rp15.000.344,00.

6. Langkah pertama adalah mengukur kedalaman dari atas tangki dengan menggunakan garis koordinat vertikal. Air memanjang dari kedalaman 2 m hingga kedalaman 10 m yang intervalnya dibagi menjadi n subinterval dengan titik akhir dan pilih di subinterval i . Cara ini membagi air menjadi beberapa lapisan. Lapisan ke- i didekati oleh silinder melingkar dengan jari-jari dan tinggi. Kita dapat menghitung menggunakan kesebangunan segitiga (*lihat Gambar 3.17 dan Gambar 3.18*).



Gambar 3.17 Kerucut Terbalik



Gambar 3.18 Sketsa Partisi Kerucut Terbalik

Perkiraan volume lapisan pada air ke- i adalah

$$V_i = \pi f_i^2 \Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i)^2 \Delta x.$$

Selain itu, massa adalah

$$m_i = \text{kerapatan} \times \text{volume} = 160\pi(10 - x_i)^2 \Delta x.$$

Gaya yang dibutuhkan adalah

$$F_i = m_i g = 1.568\pi(10 - x_i)^2 \Delta x.$$

Setiap partikel dalam lapisan harus menempuh jarak kira-kira x_i . Usaha yang dilakukan (W) untuk menaikkan lapisan ini ke atas adalah hasil kali gaya F dan jarak x , yaitu

$$W_i = F_i x_i = 1.568\pi x_i (10 - x_i)^2 \Delta x$$

Total usaha yang dilakukan:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 1.568\pi x_i (10 - x_i)^2 \Delta x \\ &= \int_2^{10} 1.568x(10 - x)^2 dx \\ &= 1.568\pi \int_2^{10} x(10 - x)^2 dx = \frac{3.211.264}{3}\pi. \end{aligned}$$

Jadi, usaha yang diperlukan untuk mengosongkan tangki dengan memompa semua air ke bagian atas tangki adalah $\frac{3.211.264}{3}\pi$ Joule.

I. Tindak Lanjut

Tindak lanjut pembelajaran dilakukan untuk memastikan seluruh peserta didik mencapai tujuan pembelajaran secara optimal. Terdapat dua bentuk tindak lanjut yang diberikan, yaitu pengayaan bagi peserta didik yang telah mencapai tujuan pembelajaran dan remedial/pendampingan bagi peserta didik yang belum mencapai tujuan pembelajaran.

1. Peserta didik yang telah menunjukkan penguasaan kompetensi diberikan pengayaan untuk memperluas wawasan dan menantang kemampuan berpikir tingkat tinggi. Pengayaan dapat berupa:
 - a. menyelesaikan soal-soal eksploratif yang tersedia pada bagian Pengayaan Buku Siswa;
 - b. mengaitkan materi pembelajaran (misalnya integral tak tentu) dengan konteks nyata atau lintas mata pelajaran, seperti penerapannya dalam ekonomi atau fisika;

- c. mengerjakan proyek mini atau studi kasus sederhana yang melibatkan konsep integral dalam kehidupan sehari-hari;
 - d. penggunaan pranala yang bersifat terbatas dan dipilih secara selektif. Pranala tidak berfungsi untuk mengulang materi, tetapi mengarahkan peserta didik pada eksplorasi tambahan, seperti simulasi interaktif atau visualisasi grafik fungsi integral.
2. Peserta didik yang mengalami kesulitan selama pembelajaran akan difasilitasi agar dapat mencapai kompetensi yang diharapkan. Berikut ini langkah-langkah yang dapat diambil.
 - a. Tutor sebaya, yaitu peserta didik yang sudah memahami materi membantu temannya melalui diskusi kelompok kecil.
 - b. Pendampingan guru saat peserta didik mengerjakan soal latihan yang tersedia dalam Buku Siswa, dengan penekanan pada pemahaman langkah demi langkah konsep integral tak tentu.
 - c. Pemberian umpan balik secara langsung dan bertahap agar peserta didik dapat memperbaiki kesalahan konseptual.
3. Buku Siswa telah menyediakan bagian khusus Pengayaan yang berisi soal-soal tantangan dan aplikasi materi dalam kehidupan sehari-hari. Materi pengayaan ini dirancang untuk mengembangkan pemikiran kritis dan kreatif peserta didik, serta memperkuat pemahaman konsep melalui penerapan dalam situasi kontekstual.
4. Penggunaan media digital sebagai sumber belajar tambahan dibatasi dan diarahkan secara bijak. Pranala hanya digunakan untuk memperluas wawasan peserta didik, seperti mengenal penggunaan integral dalam dunia nyata, bukan untuk mengulang materi pokok yang telah dijelaskan dalam pembelajaran inti.

J. Refleksi

Dalam proses pembelajaran pada materi integral, refleksi bukan sekadar kegiatan akhir, namun merupakan bagian penting dari Pembelajaran Mendalam (*Deep Learning*) yang mendorong peserta didik untuk belajar secara berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan. Refleksi ini bertujuan

mengevaluasi proses pembelajaran integral dari dua sudut pandang, yaitu peserta didik dan guru.

1. Refleksi untuk Peserta Didik

Tabel berikut merupakan alternatif refleksi selain yang terdapat pada Buku Siswa.

Tabel 3.6 Refleksi untuk Peserta Didik

Tujuan Refleksi	Contoh Pertanyaan untuk Peserta Didik	Fungsi bagi Peserta Didik	Tindak Lanjut Guru
Berkesadaran Menyadari proses dan strategi pembelajaran	• Bagian mana dari materi integral yang paling menantang bagiku? • Strategi apa yang berhasil/tidak?	• Melatih metakognisi. • Mengenali gaya belajar sendiri.	• Menyediakan variasi strategi (peta konsep, kartu rumus, atau simulasi). • Menugaskan teman tutor untuk berbagi teknik yang efektif.
Bermakna Mengaitkan materi dengan konteks nyata	Di mana aku pernah melihat konsep laju-akumulasi dalam kehidupan sehari-hari?	• Menumbuhkan relevansi. • Memperkuat transfer pengetahuan.	Mendesain tugas proyek kontekstual (misal menghitung jejak karbon keluarga).
Menyenangkan Mengungkap emosi dan motivasi belajar	• Momen apa yang paling menggembirakan saat belajar integral? • Apa yang membuatku kurang bersemangat?	• Menyuarakan kebutuhan afektif. • Meningkatkan rasa kepemilikan.	Menambahkan elemen gamifikasi, kuis berhadiah, atau permainan konsep.

2. Refleksi untuk Guru

Refleksi guru merupakan kunci Pembelajaran Mendalam karena guru akan menilai praktiknya secara berkesadaran (pengajaran berkesadaran), kemudian memastikan pembelajaran bermakna (pengajaran bermakna) dan menyenangkan bagi peserta didik (pengajaran menggembirakan).

Tabel 3.7 Refleksi untuk Guru

Ranah	Pertanyaan Reflektif	Tindak Lanjut Konkret
Perencanaan	Apakah tujuan, aktivitas, dan asesmen integral sudah selaras membangun <i>deep learning</i> ?	Melakukan revisi RPP agar HOTS dan konteks nyata lebih ditekankan.
Pelaksanaan	• Bagaimana saya mempraktikkan pembelajaran berkesadaran di bab ini? • Tahapan mana yang sulit untuk membuat suasana menggembirakan?	• Menetapkan <i>mindful pause</i> 2 menit sebelum latihan sulit. • Menambah kegiatan <i>ice breaking</i> (visual) sebelum diskusi integral tentu.
Respons peserta didik	30% peserta didik masih tidak berminat; apa yang harus diperbaiki?	Survei minat peserta didik, kemudian kontekstualisasikan soal ke hobi peserta didik (musik atau olahraga).
Profesionalisme	Bagian mana yang perlu saya perdalam agar penjelasan lebih sederhana?	Bergabung dengan PLC (komunitas kolaboratif antarpendidik yang terdiri atas guru, kepala sekolah, fasilitator, dll.) dan menyimak webinar <i>visual calculus</i> .

3. Alur Menindaklanjuti Hasil Refleksi

Langkah awal dalam menindaklanjuti hasil refleksi adalah dengan mengumpulkan data refleksi, misalnya melalui jurnal belajar peserta didik. Selanjutnya, guru perlu mengidentifikasi pola atau tantangan yang muncul, seperti kesulitan dalam memahami konsep, penggunaan strategi belajar yang kurang tepat, atau rendahnya motivasi belajar. Berdasarkan identifikasi tersebut, guru dapat merancang intervensi yang sesuai, seperti memberikan *mini lesson*, pendampingan melalui tutor sebaya, atau merancang proyek kontekstual. Intervensi ini kemudian diimplementasikan pada pertemuan berikutnya sesuai dengan kebutuhan peserta didik. Setelah itu, guru melakukan evaluasi

efektivitas intervensi dengan membandingkan hasil belajar sebelum dan sesudah perlakuan. Terakhir, guru melakukan refleksi ulang untuk meninjau apakah strategi yang diterapkan sudah tepat atau masih perlu diperbaiki dan disesuaikan agar pembelajaran semakin optimal.

K. Sumber Belajar

Berikut ini daftar buku atau sumber belajar lainnya yang dapat dijadikan sebagai alternatif referensi dalam kegiatan pembelajaran Bab 3.

1. Adams, L.J. dan P.A. White. *Analytic Geometry and Calculus*. New York: Oxford University Press, 1968.
2. Ayers, F. dan Ault. *Kalkulus Edisi Kedua*. Diterjemahkan oleh Lea Prasetio. Jakarta: Erlangga, 1990.
3. Baisuni, H. *Kalkulus*. Jakarta: Universitas Indonesia, 2005.
4. Integrals Involving Exponential and Logarithmic Functions. (2025, January 18). <https://math.libretexts.org/@go/page/2516>.
5. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. *Sejarah dan Filsafat Matematika*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018.
6. Leithold, L. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Diterjemahkan oleh Hutahaeen. Jakarta: Erlangga, 1988.
7. Mursita, D. *Matematika untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains, 2011.
8. Nursiyono, J.A. dan Jamik Safitri. *Mengenal Integral Lebih Dekat*. Bogor: In Media, 2014.
9. Pinem, D. *Kalkulus untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains, 2015.
10. Purcell, E.J. dan Dale Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2003.
11. Purcell, E.J. dan Dale Varberg. *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2005.
12. Simangunsong, W. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga, 2005.
13. Stewart, J. *Multivariable Calculus*. California: Brook Cole Cengage, 2012.
14. Stewart, J. *Single Variable Calculus: Concepts and Contexts, Enhanced Edition*. California: Brook Cole Cengage, 2018.

15. Sukmadewi, T.S. *Modul Matematika Umum Kelas XI KD 3.10*. Jakarta: Direktorat Jenderal PAUD, DIKDAS, dan DIKMEN, 2020.
16. Suyitno, A. *Guru Pembelajar: Modul Matematika SMA Kelompok Kompetensi E*. Jakarta: Direktorat Jendral Guru dan Tenaga Kependidikan, 2016.
17. Varberg, D., E.J. Purcell, dan S.E. Rigdon. *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2010.
18. Walpole, R.E. dan Raymond H. Myers. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB, 1968.
19. Wardiman. *Hitung Integral*. Yogyakarta: Hanindita, 1982.

Panduan Khusus

Bab 4

Analisis Data dan Peluang



A. Pendahuluan

1. Tujuan Pembelajaran dan Indikator

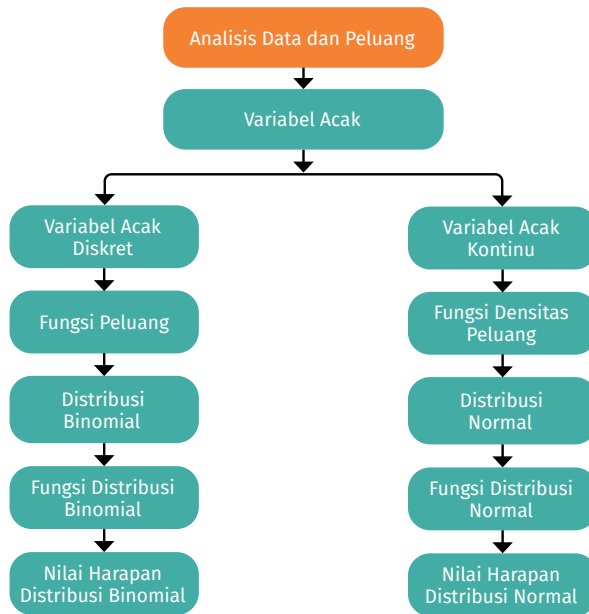
Guru dapat mempelajari tujuan pembelajaran dan indikator Bab 4 Buku Siswa pada Tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1 Tujuan Pembelajaran dan Indikator Bab 4

Tujuan Pembelajaran	Indikator
Peserta didik mampu memahami konsep variabel acak, baik diskret maupun kontinu, serta mampu menggunakannya untuk memecahkan berbagai persoalan kontekstual melalui interpretasi terhadap fungsi peluang dan distribusinya.	Peserta didik mampu: 1. menjelaskan konsep dan definisi variabel acak serta menggunakannya untuk menyelesaikan persoalan nyata; 2. menjelaskan dan membedakan antara variabel acak diskret dan kontinu serta menggunakannya untuk menyelesaikan persoalan nyata; 3. menentukan fungsi dan distribusi peluang diskret, serta menggunakannya dalam menyelesaikan persoalan nyata; 4. menentukan fungsi dan distribusi peluang kontinu, serta menggunakannya dalam menyelesaikan persoalan nyata; 5. memahami dan menerapkan fungsi peluang dan nilai harapan dari distribusi Binomial dalam menyelesaikan persoalan nyata; serta 6. memahami dan menerapkan fungsi peluang dan nilai harapan dari distribusi normal dalam menyelesaikan persoalan nyata.

2. Peta Konsep

Gambar 4.1 merupakan peta konsep materi Analisis Data dan Peluang pada Bab 4 Buku Siswa.



Gambar 4.1 Peta Konsep Bab 4 Buku Siswa

Materi ini memiliki keterkaitan dengan materi peluang yang pernah dipelajari peserta didik pada mata pelajaran Matematika SMP dan Matematika Kelas XII SMA. Peserta didik akan diajak untuk mengingat kembali materi peluang suatu kejadian dan kombinasi sebelum mempelajari materi peluang yang lebih kompleks dan menantang pada Matematika Tingkat Lanjut ini.

Materi peluang juga memiliki keterkaitan dengan materi integral yang sudah dipelajari peserta didik pada Bab 3. Peserta didik akan memahami bahwa peluang juga dapat diselesaikan dengan konsep integral tentu.

3. Saran Periode/Waktu Pembelajaran

Alokasi waktu yang disarankan untuk mempelajari materi pada Bab 4 ini adalah 50 JP. Agar proses pembelajaran berjalan lancar dan tujuan pembelajaran tercapai, guru dapat mengatur waktu secara efektif.

B. Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Salah satu konsep dasar yang harus dikuasai oleh peserta didik untuk memahami materi analisis data dan peluang adalah materi permutasi dan kombinasi. Permutasi digunakan untuk menghitung banyaknya susunan suatu objek yang mungkin terjadi, sedangkan kombinasi digunakan untuk

menghitung banyaknya cara untuk memilih suatu objek tertentu tanpa memperhatikan urutannya. Pemahaman dasar tentang himpunan, seperti irisan, gabungan, dan komplemen, juga penting dalam menganalisis hubungan antarkejadian.

Peserta didik juga harus mampu menyusun ruang sampel dan mengidentifikasi kejadian yang relevan dari soal kontekstual. Pemahaman dasar tentang fungsi dan grafik akan membantu peserta didik saat mempelajari distribusi peluang, termasuk distribusi binomial dan normal. Dengan bekal keterampilan prasyarat ini, peserta didik akan lebih siap untuk mengikuti proses pembelajaran yang menuntut kemampuan bernalar, mengaitkan konsep, serta memecahkan masalah yang melibatkan analisis data dan peluang.

C. Kerangka Pembelajaran

Kerangka pembelajaran untuk materi Analisis Data dan Peluang yang berdasarkan empat dimensi utama: praktik pedagogis, kemitraan pembelajaran, lingkungan pembelajaran, dan pemanfaatan digital dapat dilihat pada Tabel 4.2 berikut.

Tabel 4.2 Kerangka Pembelajaran pada Materi Analisis Data dan Peluang

Kerangka Pembelajaran	Deskripsi
Praktik Pedagogis	Model pembelajaran: <i>Problem-Based Learning</i> dan <i>Inquiry-Based Learning</i>. Strategi pembelajaran: ▶ Eksplorasi menggunakan benda konkret (koin, dadu, dan <i>spinner</i>). ▶ Diskusi kelompok kecil untuk menginterpretasi data dan peluang. ▶ Refleksi individu melalui jurnal belajar dan penulisan simpulan. Asesmen: ▶ Formatif: latihan soal dalam kegiatan Ayo Mencoba dan latihan soal mandiri pada akhir setiap subbab. ▶ Sumatif: Uji Kompetensi Bab 4 untuk menilai penguasaan materi secara menyeluruh.

Kerangka Pembelajaran	Deskripsi
Kemitraan Pembelajaran	Kolaborasi: ▶ <i>Peer teaching</i>: peserta didik saling menjelaskan konsep. ▶ Kontrak belajar: peserta didik menyepakati target pembelajaran. ▶ Kerja kelompok: bekerja sama dalam kelompok kecil untuk menyelesaikan permasalahan matematika. Kegiatan ini bertujuan meningkatkan pemahaman konsep, keterampilan berpikir kritis, serta kemampuan berkomunikasi dan bekerja sama. ▶ Diskusi soal: peserta didik membahas dan menyelesaikan soal-soal matematika. ▶ Interdisipliner: integrasi peluang dengan mata pelajaran lain. Peran guru: ▶ Fasilitator dan pengarah eksplorasi. ▶ Pemberi umpan balik reflektif.
Lingkungan Pembelajaran	Fisik: Zona eksperimen peluang (dengan alat peraga: dadu dan <i>spinner</i>). Psikososial: ▶ Kelas yang mendorong rasa ingin tahu. ▶ Kesalahan dihargai sebagai bagian dari proses belajar. ▶ Diskusi terbuka untuk mengeksplorasi ide.
Pemanfaatan Digital	Alat dan platform: Mathcracker: <i>standard-normal-distribution-probability-calculator</i>, untuk membantu menggambarkan kurva distribusi normal.

Kerangka pembelajaran ini diharapkan dapat menciptakan pengalaman belajar yang mendalam, kontekstual, dan bermakna bagi peserta didik dalam memahami konsep peluang.

D. Apersepsi

Guru dapat memulai pembelajaran dengan membangun apersepsi yang tersedia pada Buku Siswa. Kedua pertanyaan awal pada apersepsi bertujuan menggugah rasa ingin tahu peserta didik dalam mengaitkan materi dengan pengalaman sehari-hari. Guru dapat memperkuat apersepsi dengan meminta

peserta didik untuk berbagi contoh lain yang relevan dengan kehidupan mereka, misalnya bagaimana aplikasi musik merekomendasikan lagu atau bagaimana prediksi hasil pertandingan sepak bola.

Apersepsi tersebut penting untuk menjembatani pemahaman peserta didik antara fenomena nyata dan konsep matematis yang akan dipelajari. Guru dapat menjelaskan bahwa analisis data dan peluang tidak hanya sebatas teori, tetapi benar-benar diterapkan dalam kehidupan modern. Setelah itu, guru dapat menekankan bahwa variabel acak, fungsi peluang, distribusi binomial, maupun distribusi normal merupakan model matematis yang dirancang untuk memahami ketidakpastian. Dengan demikian, peserta didik akan lebih siap mempelajari konsep secara formal karena sudah memiliki gambaran konteks nyata yang dekat dengan kehidupan mereka.

E. Formatif Awal

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru mengajak peserta didik untuk berdoa menurut agama dan kepercayaan masing-masing. Tujuan dari kegiatan ini adalah membangun karakter spiritual dan meningkatkan akhlak pribadi serta beragama peserta didik. Setelah itu, guru melakukan formatif awal sebagai langkah awal dalam pembelajaran. Formatif awal ini mencakup dua bagian, yaitu tes nonkognitif dan tes kognitif.

Pada tes formatif kognitif, guru mulai menjajaki pemahaman awal peserta didik terhadap materi prasyarat seperti konsep permutasi, kombinasi, dan peluang suatu kejadian. Guru dapat menggunakan pertanyaan kontekstual yang dekat dengan keseharian peserta didik, misalnya:

“Apakah kalian pernah melihat hasil survei di media sosial, seperti persentase orang yang memilih suatu produk atau menyukai topik tertentu? Menurut kalian, bagaimana data itu diperoleh dan diolah?”

Pertanyaan ini bertujuan menjaring pemahaman awal saat peserta didik mulai menyadari adanya data, namun belum mengaitkannya dengan analisis data dan peluang. Guru kemudian memberikan contoh data sederhana, misalnya:

“Jika 10 teman kalian menjawab survei tentang waktu belajar mereka di rumah, bagaimana kalian bisa menyajikan dan membandingkan data tersebut?”

Melalui aktivitas ini, peserta didik mulai mengenali berbagai bentuk representasi data, seperti daftar, tabel, atau grafik sederhana. Kemudian, guru dapat mengajukan masalah kontekstual seperti

“Jika dari data tersebut diketahui bahwa sebagian besar teman kalian belajar kurang dari 1 jam, apa yang bisa disimpulkan? Apakah kalian bisa memperkirakan seberapa besar kemungkinan ada yang belajar lebih dari 2 jam?”

Sebagai penutup formatif awal, guru dapat mengajukan pertanyaan reflektif, *“Menurut kalian, mengapa analisis data dan peluang penting dalam mengambil keputusan, baik dalam kehidupan pribadi maupun kehidupan sosial?”*

Melalui rangkaian formatif awal ini, guru tidak hanya mengukur kesiapan belajar peserta didik secara emosional dan kognitif, tetapi juga menanamkan dasar yang kuat untuk Pembelajaran Mendalam dan bermakna tentang analisis data dan peluang. Hasil formatif awal ini membantu guru menyesuaikan strategi pembelajaran yang sesuai.

Pertanyaan-pertanyaan tersebut dapat digunakan untuk menentukan apakah peserta didik berada pada tahap prastruktural, unistruktural, atau multistruktural. Pada tahap *prastruktural*, peserta didik belum memiliki pemahaman atau ide yang kuat mengenai suatu topik atau masalah sehingga mengalami kesulitan untuk memberikan jawaban yang relevan atau gagal menggunakan informasi yang ada dalam menyelesaikan tugas. Pada tahap *unistruktural*, pemahaman peserta didik sangat terbatas pada satu aspek atau elemen dari sebuah konsep atau tugas. Pada tahap ini mereka hanya mampu membuat hubungan yang sederhana dan jelas, tetapi tidak memiliki pemahaman mendalam tentang relevansi atau pentingnya informasi tersebut. Pada tahap *multistruktural*, peserta didik dapat mengenali beberapa informasi penting meskipun belum terkait. Guru kemudian dapat meminta peserta didik untuk membuat daftar kemungkinan hasil dari percobaan langsung, seperti melempar koin atau dadu.

F. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Tujuan umum aktivitas belajar mengajar adalah peserta didik dapat memahami konsep variabel acak, baik diskret maupun kontinu, serta bagaimana konsep tersebut diaplikasikan dalam kehidupan nyata melalui interpretasi fungsi

peluang dan distribusinya. Peserta didik akan dibimbing untuk membedakan variabel acak diskret dan kontinu, menentukan fungsi dan distribusi peluang pada keduanya, serta menggunakan konsep ini untuk menyelesaikan berbagai persoalan kontekstual. Selain itu, peserta didik juga akan mempelajari distribusi binomial dan normal, termasuk nilai harapannya, sehingga mampu menafsirkan dan mengaitkannya dengan situasi praktis secara logis dan bermakna. Tabel 4.3 berikut menunjukkan pengalaman belajar pada setiap aktivitas pembelajaran materi Analisis Data dan Peluang.

Tabel 4.3 Pengalaman Belajar Materi Analisis Data dan Peluang

Judul Aktivitas	Pengalaman Belajar	Karakteristik
 Ayo Mengingat Kembali Mengingat kembali materi sebelumnya.	Memahami	Menghubungkan konsep baru dengan pengetahuan sebelumnya.
 Ayo Bereksplorasi Menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.
 Ayo Berdiskusi Kegiatan bertukar pikiran dan menyatakan gagasan.	Mengaplikasi	Mengembangkan pemahaman dengan eksplorasi lebih lanjut.
 Ayo Mengomunikasikan Kegiatan mengomunikasikan pendapat atau hasil diskusi.	Mengaplikasi	Menerapkan pengetahuan ke dalam situasi nyata atau bidang lain.
 Ayo Mencoba Kegiatan mengerjakan soal.	Mengaplikasi	Menerapkan pengetahuan ke dalam situasi nyata atau bidang lain.
 Ayo Berpikir Kritis Kegiatan bertukar pikiran dan menyatakan gagasan.	Mengaplikasi	Berpikir kritis dan mencari solusi inovatif berdasarkan pengetahuan yang ada.

Judul Aktivitas	Pengalaman Belajar	Karakteristik
 Ayo Menggunakan Teknologi Kegiatan yang memanfaatkan kalkulator atau aplikasi lain.	Merefleksi	Memotivasi diri sendiri untuk terus belajar bagaimana cara belajar.

Subbab A: Variabel Acak

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ menjelaskan konsep dan definisi variabel acak;
- ▶ menggunakan konsep dan definisi variabel acak untuk menyelesaikan persoalan nyata.

Ayo Bereksplorasi 4.1

Guru mengajak peserta didik untuk mengeksplorasi permasalahan terkait peluang munculnya mata dadu yang sama. Guru dapat memberikan stimulus dengan menggunakan konteks permainan monopoli digital yang dimainkan melalui aplikasi pada ponsel pintar (*smartphone*). Monopoli merupakan permainan klasik yang kini banyak dimainkan secara daring sehingga lebih akrab bagi peserta didik. Melalui aktivitas ini, peserta didik dapat membangun pemahaman yang bermakna dan membangkitkan rasa ingin tahu dalam menentukan peluang, dengan cara yang menggembirakan.

Guru kemudian dapat memberikan pertanyaan seperti “*Kapan kalian mendapatkan giliran melempar dadu dua kali berturut-turut saat bermain monopoli?*”. Guru dapat menggunakan gambar pada Buku Siswa sebagai pemantik visual.

Ayo Berdiskusi

Aktivitas ini dilakukan dengan teman sebangku. Guru memberikan pertanyaan pemantik sebagai bahan diskusi seperti berikut:

“*Dari permasalahan di atas, dapatkah kalian menemukan variabelnya?*”
 “*Dapatkah kalian menyebutkan variabel tersebut?*”

Peserta didik diharapkan dapat menyimpulkan bahwa variabel yang dimaksud adalah munculnya mata dadu kembar saat dua dadu dilempar. Untuk menemukan berapa banyak mata dadu kembar pada pelemparan dua dadu seimbang, guru dapat meminta peserta didik untuk melakukan simulasi pelemparan dua dadu secara langsung. Peserta didik diarahkan untuk melengkapi tabel pada Buku Siswa.

Fokusnya adalah pasangan muncul mata dadu kembar, yaitu muncul jumlah mata dadu yang sama pada kedua dadu. Selanjutnya, guru mengenalkan simbol variabel acak, misalkan X yang menyatakan muncul mata dadu kembar pada pelemparan dua dadu seimbang. Peserta didik diarahkan untuk menemukan nilai dari variabel X dengan mengisi titik-titik pada Buku Siswa. Guru mendampingi dan memberikan bimbingan kepada peserta didik yang mengalami kesulitan. Jawaban yang diharapkan muncul:

- X akan dianggap bernilai 0 jika hasil pelemparan bukan pasangan mata dadu kembar terjadi.
- X akan bernilai 1 jika hasil pelemparan merupakan pasangan mata dadu kembar, yaitu $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, dan $(6, 6)$ terjadi.



Ayo Mengomunikasikan

Setelah setiap kelompok berdiskusi, guru meminta beberapa peserta didik untuk menyampaikan hasil diskusi mereka di depan kelas. Guru berperan sebagai fasilitator yang membimbing alur komunikasi, memastikan bahwa setiap pendapat peserta didik dihargai dan dikembangkan melalui pertanyaan pemantik atau klarifikasi. Kegiatan ini dirancang untuk melatih kemampuan berpikir kritis, keberanian berpendapat, dan kemampuan menyampaikan gagasan secara runtut dan logis.

Dalam proses ini, guru mengarahkan peserta didik untuk menyimpulkan bahwa X merupakan variabel karena ia bisa dianggap memiliki nilai-nilai berbeda, yaitu 0 dan 1. Variabel X ini disebut variabel acak (*random variable*) karena nilai-nilainya bergantung pada hasil yang terjadi dalam percobaan acak. Variabel acak biasanya dinyatakan dengan huruf besar, seperti X , Y , dan Z . Namun, nilai-nilai variabel acak ini dinyatakan dengan huruf kecil, seperti x , y , dan z .

Guru kemudian meminta peserta didik untuk mencermati Definisi 4.1. Untuk membantu pemahaman peserta didik lebih lanjut tentang konsep variabel acak, guru dapat memberikan alternatif contoh soal yang terdapat pada Buku Siswa. Guru pun diperbolehkan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis untuk memberikan penjelasan tambahan kepada peserta didik berkaitan dengan variabel acak.

 Ayo Mencoba 4.1

Misalkan:

M = Bola merah

P = Bola putih

Ruang sampel dari pengambilan 4 bola tersebut:

$S = \{MMMM, MMMP, MMPM, MPMM, PMMM, MMPP, MPMP, MPPM, PMPM, PMMP, PPMM, MPPP, PMPP, PPMP, PPPM, PPPP\}$.

Variabel Z menyatakan banyaknya bola putih yang terambil. Tabel 4.4 menunjukkan korespondensi antara elemen ruang sampel dan nilai Z yang bersesuaian.

Tabel 4.4 Taksiran Bola Putih yang Terambil

Hasil Pengambilan Bola	z
MMMM	0
MMMP, MMPM, MPMM, PMMM	1
MMPP, MPMP, MPPM, PMPM, PMMP, PPMM	2
MPPP, PMPP, PPMP, PPPM	3
PPPP	4

Jadi, himpunan semua nilai yang mungkin dari variabel acak Z adalah $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Subbab B: Variabel Acak Diskret

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ menjelaskan variabel acak diskret dan kontinu;
- ▶ membedakan variabel acak diskret dan kontinu; serta
- ▶ menggunakan variabel acak diskret dan kontinu untuk menyelesaikan persoalan nyata.



Ayo Mengingat Kembali

Guru dapat memberikan pertanyaan pemantik, untuk mengingatkan kembali materi faktorial, kombinasi, dan peluang.

- Faktorial, misalnya $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.
- Kombinasi, misalnya berapa banyak cara memilih 2 bola dari 4 bola tersedia yang bernomor 1 sampai 4?
- Peluang, misalnya jika peluang seorang bayi lahir berjenis kelamin laki-laki adalah $\frac{1}{2}$, berapa peluang lahir bayi berjenis kelamin perempuan?

Kegiatan ini bertujuan menumbuhkan kesadaran berpikir terhadap konsep dasar yang relevan serta menjadi jembatan menuju konsep variabel acak diskret dan kontinu.



Ayo Bereksplorasi 4.2

Guru mengajak peserta didik untuk mengeksplorasi konsep variabel acak diskret melalui situasi yang dekat dengan kehidupan mereka. Kegiatan ini bertujuan membangun pemahaman yang bermakna dan menumbuhkan kesadaran berpikir kritis dalam membedakan jenis variabel acak.

Guru memberikan stimulus berupa permasalahan kontekstual yang tersaji pada Buku Siswa mengenai banyaknya kesalahan pengetikan. Guru dapat memberikan pemantik visual berupa gambar pada Buku Siswa, kemudian mendorong diskusi dengan beberapa pertanyaan berikut.

- ▶ Apakah banyaknya kesalahan ketik setiap peserta dapat dipastikan sebelumnya?
- ▶ Mengapa banyaknya kesalahan ketik antarpeserta bisa berbeda-beda?

- Apakah kita dapat menghitung semua kemungkinan banyaknya kesalahan ketik yang terjadi?

Peserta didik diharapkan dapat menyimpulkan bahwa permasalahan pada eksplorasi ini merupakan contoh percobaan acak. Guru kemudian menguatkan dengan menyampaikan alasan banyak kesalahan ketik dapat dinyatakan sebagai variabel acak, sesuai dengan yang tersaji pada Buku Siswa.

Sebagai kelanjutan dari eksplorasi ini, peserta didik diarahkan agar berdiskusi lebih lanjut untuk memperkuat pemahaman mereka.



Ayo Berdiskusi

Aktivitas ini dimulai dengan meminta peserta didik untuk duduk secara berkelompok. Kelompok dapat dibentuk berdasarkan teman sebangku (2 orang) atau kelompok kecil yang terdiri atas 3 atau 4 orang, sesuai dengan kebutuhan kelas. Guru meminta peserta didik untuk mencermati beberapa konteks variabel acak pada Buku Siswa sebagai bahan diskusi awal.

Peserta didik diajak untuk secara aktif dan kolaboratif dalam

- mengidentifikasi apakah setiap konteks variabel acak tersebut termasuk diskret atau kontinu;
- menjelaskan alasan klasifikasi secara logis dan komunikatif.

Agar diskusi berlangsung dengan kesadaran penuh dan bermakna, guru memberikan pertanyaan pemantik, dengan hasil diskusi yang diharapkan sebagai berikut.

1. Apakah semua nilai variabel acak tersebut dapat dihitung (*countable*)?

Hasil diskusi yang diharapkan: Tidak semuanya dapat dihitung satu per satu (*countable*). Hanya variabel acak diskret yang *countable*, sedangkan variabel acak kontinu bersifat *uncountable*.

2. Jika tidak, mana saja nilai variabel acak yang tak terhitung (*uncountable*)?

Hasil diskusi yang diharapkan: Berat badan peserta didik SMA Maju Bersama kelas XII dan usia penduduk Desa Suka Makmur.

3. Apakah semua ruang sampel variabel acak di atas merupakan himpunan berhingga (*finite*)?

Hasil diskusi yang diharapkan: Tidak semuanya merupakan himpunan berhingga.

4. Adakah ruang sampel variabel acak di atas yang tak berhingga (*infinite*)?

Hasil diskusi yang diharapkan: Ada, yaitu sebagai berikut.

- ▶ Bilangan bulat kurang dari 7, bisa mencakup ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ... , sehingga himpunannya tak berhingga meskipun *countable*.
 - ▶ Banyak kesalahan pengetikan, karena tidak ada batas atas banyak kesalahan sehingga hal ini juga tak berhingga secara teoretis.
5. Dapatkah kalian menyebutkan variabel mana saja yang termasuk ruang sampel himpunan berhingga dan tak berhingga?

Hasil diskusi yang diharapkan: Ruang sampel berhingga:

- ▶ Bilangan asli antara 5 dan 20 $\rightarrow \{6, 7, 8, \dots, 19\} \rightarrow$ banyaknya terbatas.
- ▶ Muncul mata dadu ganjil $\rightarrow \{1, 3, 5\} \rightarrow$ banyaknya terbatas.

Ruang sampel tak berhingga:

- ▶ Berat badan peserta didik $\rightarrow$ kontinu, tak terhingga banyaknya.
- ▶ Bilangan bulat $< 7 \rightarrow$ bisa sangat banyak dan negatif.
- ▶ Usia penduduk desa $\rightarrow$ kontinu dalam rentang 0–100-an tahun.
- ▶ Banyak kesalahan pengetikan $\rightarrow$ tidak ada batas atas (∞).

Peserta didik diberi waktu untuk bertukar gagasan dan merumuskan jawaban secara runtut. Guru berkeliling, mendampingi diskusi dan memberi bimbingan jika diperlukan. Kegiatan ini dirancang tidak hanya untuk memperdalam konsep variabel acak diskret, tetapi juga untuk menumbuhkan sikap berpikir kritis, berkolaborasi dengan terbuka, serta menyampaikan pendapat secara logis.



Ayo Mengomunikasikan

Setelah berdiskusi secara berkelompok, guru meminta beberapa peserta didik untuk menyampaikan hasil diskusi mereka di depan kelas. Setiap kelompok diminta menjelaskan alasan mereka dalam mengelompokkan konteks yang diberikan ke dalam variabel acak diskret atau kontinu.

Guru berperan sebagai fasilitator yang membimbing alur komunikasi, memastikan bahwa setiap pendapat peserta didik dihargai dan dikembangkan melalui pertanyaan pemantik atau klarifikasi. Kegiatan ini dirancang untuk melatih kemampuan berpikir kritis, keberanian berpendapat, serta kemampuan menyampaikan gagasan secara runtut dan logis. Dalam proses ini, guru mengarahkan peserta didik untuk membuat simpulan berikut.

- ▶ Jika ruang sampel memuat elemen-elemen yang jumlahnya hingga atau tak hingga, namun dapat dihitung satu per satu (sebanyak bilangan bulat), maka ruang sampel tersebut disebut *ruang sampel diskret*.
- ▶ Variabel acak yang didefinisikan pada ruang sampel diskret disebut *variabel acak diskret*.

Guru dapat meminta peserta didik mencermati Definisi 4.2 dan memberikan penguatan tentang variabel acak diskret dengan menyampaikan ciri dari variabel acak diskret. Agar peserta didik dapat memahami konsep variabel acak diskret secara lebih mendalam, guru dapat memberikan alternatif contoh soal pada Buku Siswa. Guru juga dipersilakan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis untuk memperkaya pemahaman peserta didik.



Papan A terdiri atas tiga sektor angka: 2, 4, dan 6. Luas sektor bernomor 4 dan 6 masing-masing setengah dari sektor bernomor 2. Dengan demikian, peluang setiap sektor dapat ditentukan berdasarkan proporsi luasnya.

$$P(A = 2) = \frac{2}{4}.$$

$$P(A = 4) = \frac{1}{4}.$$

$$P(A = 6) = \frac{1}{4}.$$

Sementara itu, papan B terdiri atas tiga sektor yang sama besar sehingga

$$P(B = 2) = P(B = 4) = P(B = 6) = \frac{1}{3}.$$

Variabel $Z = X - Y$, menyatakan selisih angka yang diperoleh dari papan A dan papan B. Taksiran nilai Z yang mungkin beserta peluangnya, dapat dilihat pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Taksiran Pasangan Angka yang Terpilih (Muncul)

$Z = X - Y$	$Z = z$	Peluang $P(Z = z)$
$0 = 2 - 2$ $= 4 - 4$ $= 6 - 6$	(A2, B2), (A4, B4), (A6, B6)	$\left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{12}$
$2 = 4 - 2$ $= 6 - 4$	(A4, B2), (A6, B4)	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{12}$
$4 = 6 - 2$	(A6, B2)	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$
$-2 = 4 - 6$ $= 2 - 4$	(A4, B6), (A2, B4)	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{12}$
$-4 = 2 - 6$	(A2, B6)	$\frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$

Jika kita menjumlahkan nilai semua peluang pada tabel di atas, diperoleh

$$\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = 1.$$

Hal ini menunjukkan beberapa hal berikut.

- ▶ Z memiliki nilai-nilai yang dapat dihitung satu per satu: $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$.
- ▶ Setiap nilai tersebut memiliki peluang tertentu yang jika dijumlahkan, hasilnya adalah 1.
- ▶ Dengan demikian, $Z = X - Y$ merupakan variabel acak diskret karena hasilnya berupa bilangan diskret yang dapat dihitung satu per satu dengan peluang terdefinisi.

Subbab C: Variabel Acak Kontinu

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ menjelaskan variabel acak diskret dan kontinu;
- ▶ membedakan variabel acak diskret dan kontinu; serta
- ▶ menggunakan variabel acak diskret dan kontinu untuk menyelesaikan persoalan nyata.



Ayo Bereksplorasi 4.3

Guru mengajak peserta didik untuk mengeksplorasi konsep variabel acak kontinu melalui situasi nyata yang dekat dengan kehidupan mereka. Kegiatan ini bertujuan membangun pemahaman yang bermakna dan menumbuhkan kesadaran berpikir kritis dalam membedakan jenis variabel acak.

Guru memberikan stimulus berupa permasalahan kontekstual yang tersaji pada Buku Siswa. Guru dapat memberikan pemantik visual berupa gambar pada Buku Siswa.

Melalui eksplorasi ini, peserta didik diharapkan dapat memperoleh beberapa simpulan berikut.

- ▶ Pengukuran tinggi badan merupakan percobaan acak.
- ▶ Nilai tinggi badan dapat berada di antara dua bilangan real, misalnya antara 160 cm dan 161 cm.
- ▶ Hasilnya bisa berupa bilangan desimal dalam rentang tertentu dan tidak dapat dihitung satu per satu (*uncountable*) sehingga tinggi badan merupakan contoh variabel acak kontinu.

Sebagai aktivitas lanjutan, peserta didik diarahkan agar berdiskusi lebih lanjut untuk memperkuat pemahaman mereka.



Ayo Berdiskusi

Peserta didik diarahkan untuk memperluas pemahaman mereka melalui diskusi kelompok. Aktivitas ini dirancang untuk mendorong peserta didik berpikir secara kolaboratif, kritis, dan logis dalam mengidentifikasi variabel acak kontinu.

Guru membagi peserta didik ke dalam kelompok kecil (2–4 orang per kelompok), kemudian memberikan beberapa variabel acak yang terdaftar pada Buku Siswa sebagai bahan diskusi bersama.

Peserta didik diminta untuk:

- ▶ mengidentifikasi daftar variabel acak apakah termasuk variabel acak kontinu;
- ▶ memberi alasan logis mengapa variabel tersebut dianggap kontinu; dan

- ▶ menghubungkan ciri-ciri variabel kontinu dengan ruang sampel yang tak terhingga.

Guru dapat memberikan beberapa pertanyaan pemantik, dengan hasil diskusi yang diharapkan adalah sebagai berikut.

1. Manakah dari variabel-variabel tersebut yang memiliki nilai tak terhingga banyaknya dalam suatu rentang?

Hasil diskusi yang diharapkan: Waktu tempuh lari 100 meter, volume air dalam gelas, dan berat badan siswa kelas XII.

2. Apakah nilai-nilai variabel tersebut dapat dinyatakan dalam bilangan pecahan atau desimal?

Hasil diskusi yang diharapkan: Ya, misalnya waktu tempuh 12,73 detik; volume air 125,5 ml; dan berat badan 53,2 kg.

3. Mengapa nilai-nilai tersebut tidak dapat dihitung satu per satu?

Hasil diskusi yang diharapkan:

Karena nilai-nilai dari variabel kontinu berada dalam suatu rentang yang padat, artinya

- ▶ di antara dua nilai yang tampak “berdekatan”, misalnya 12,50 dan 12,51, masih terdapat tak hingga banyaknya nilai lain (seperti 12,505; 12,50501; dan seterusnya);
- ▶ tidak mungkin menyusun daftar lengkap nilai-nilainya satu per satu karena tidak bisa dihitung atau didaftar dengan cara diskret.

Peserta didik diberi waktu untuk bertukar gagasan dan merumuskan jawaban secara runtut. Guru berkeliling, mendampingi diskusi, dan memberi bimbingan jika diperlukan. Kegiatan ini dirancang tidak hanya untuk memperdalam konsep variabel acak kontinu, tetapi juga menumbuhkan sikap berpikir kritis, berkolaborasi dengan terbuka, serta menyampaikan pendapat secara logis.



Ayo Mengomunikasikan

Setelah berdiskusi secara berkelompok, guru meminta beberapa peserta didik untuk menyampaikan hasil diskusi mereka di depan kelas. Setiap kelompok

diminta menjelaskan alasan mereka dalam mengelompokkan konteks yang diberikan ke dalam variabel acak kontinu atau bukan.

Guru berperan sebagai fasilitator yang membimbing alur komunikasi, memastikan bahwa setiap pendapat peserta didik dihargai dan dikembangkan melalui pertanyaan pemantik atau klarifikasi. Kegiatan ini dirancang untuk melatih kemampuan berpikir kritis, keberanian berpendapat, serta kemampuan menyampaikan gagasan secara runtut dan logis. Dalam proses ini, guru mengarahkan peserta didik untuk membuat simpulan berikut.

- ▶ Jika ruang sampel suatu percobaan acak terdiri atas titik-titik hasil yang tak berhingga banyaknya dan tidak dapat dihitung satu per satu, maka ruang sampel itu disebut *ruang sampel kontinu*.
- ▶ Variabel acak yang didefinisikan pada ruang sampel kontinu disebut *variabel acak kontinu*.

Guru meminta peserta didik untuk mencermati Definisi 4.3 dan memberikan penguatan tentang variabel acak kontinu dengan menyampaikan ciri-ciri dari variabel acak kontinu. Agar peserta didik dapat memahami konsep variabel acak kontinu secara lebih mendalam, guru dapat memberikan alternatif Contoh Soal 4.5 pada Buku Siswa. Guru juga dipersilakan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis untuk memperkaya pemahaman peserta didik.



Ayo Mencoba 4.3

- a. Contoh nilai waktu tempuh yang mungkin muncul adalah 13,7 detik; 14,1 detik; 14,8 detik; dan 15,2 detik.
- b. Ruang sampel dapat ditulis sebagai rentang waktu:
 $S = \{x | 13,5 \leq x \leq 15,4; x \in R\}$. Guru menjelaskan bahwa x dapat berupa bilangan real dari 13,5 hingga 15,4, bukan hanya bilangan bulat.
- c. Tidak. Karena ruang sampel S mengandung semua bilangan real dalam rentang tersebut, termasuk bilangan desimal sehingga banyaknya nilai tidak terhitung satu per satu (*uncountable*). Guru dapat membimbing peserta didik memahami bahwa ada begitu banyak angka dari 13,5 hingga 15,4 sehingga tidak mungkin menuliskan semuanya satu per satu.

- d. Variabel acak X termasuk variabel acak kontinu karena nilai-nilainya dapat berupa bilangan real dalam rentang tertentu dan tidak dapat dihitung satu per satu.

Subbab D: Fungsi Peluang

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ menentukan fungsi dan distribusi peluang diskret;
- ▶ menggunakan fungsi dan distribusi peluang diskret dalam menyelesaikan persoalan nyata.



Ayo Bereksplorasi 4.4

Guru mengajak peserta didik untuk mengeksplorasi konsep fungsi peluang melalui percobaan nyata yang sederhana dan menyenangkan. Kegiatan ini bertujuan membangun pemahaman yang bermakna dan menumbuhkan kesadaran berpikir kritis tentang bagaimana peluang suatu nilai dapat dihitung dan disusun dalam sebuah fungsi peluang. Peserta didik didorong untuk memahami konsep distribusi peluang, tidak hanya secara teoretis, tetapi juga secara kontekstual.

Peserta didik diminta melakukan percobaan menggunakan sebuah uang logam. Langkah-langkahnya sebagai berikut.

- Peserta didik melakukan pelemparan sebuah uang logam sebanyak 3 kali.
- Misalkan “A” menyatakan sisi angka dan “G” menyatakan sisi gambar yang muncul. Peserta didik diminta mencatat hasil pelemparan uang logam tersebut.
- Peserta didik menghitung berapa kali sisi gambar (G) muncul.
- Peserta didik mengulangi percobaan minimal 8–10 kali.
- Peserta didik diminta menuliskan ruang sampel pada percobaan melempar sebuah uang logam sebanyak 3 kali.
- Misalkan X adalah variabel acak diskret. X menyatakan kejadian munculnya sisi G (gambar) dalam percobaan acak tersebut. Peserta didik diminta menentukan nilai X yang mungkin terjadi.

- g. Guru memberikan pertanyaan pemantik, *“Jika kita tidak melakukan percobaan, tetapi menganalisis semua kemungkinan hasil, berapa peluang munculnya setiap nilai X ?”*
- h. Peserta didik menuliskan kemungkinan nilai $X = x$ dan peluangnya pada Tabel 4.8 pada Buku Siswa.

Guru memberikan penjelasan tambahan bahwa Tabel 4.8 pada Buku Siswa ini dikenal sebagai distribusi peluang atau fungsi peluang, untuk variabel acak diskret X .



Ayo Berdiskusi

Peserta didik diarahkan untuk memperluas pemahaman mereka melalui diskusi kelompok. Guru membagi peserta didik ke dalam kelompok kecil (2–4 orang per kelompok). Berdasarkan Definisi 4.4, peserta didik diminta untuk melakukan pemeriksaan pada Tabel 4.8 pada Buku Siswa, apakah memenuhi syarat fungsi peluang atau tidak. Guru dapat memberikan bimbingan pada kelompok yang mengalami kesulitan dalam pemeriksaan atau pembuktiannya.



Ayo Mengomunikasikan

Setelah peserta didik berdiskusi secara berkelompok, guru meminta beberapa peserta didik untuk menyampaikan hasil diskusi mereka di depan kelas. Setiap kelompok diminta menjelaskan hasil pemeriksaan tabel pada Buku Siswa. Guru berperan sebagai fasilitator yang membimbing alur komunikasi, memastikan bahwa setiap pendapat peserta didik dihargai dan dikembangkan melalui pertanyaan pemantik atau klarifikasi. Kegiatan ini dirancang untuk melatih kemampuan berpikir kritis, keberanian berpendapat, serta kemampuan menyampaikan gagasan secara runtut dan logis.

Agar peserta didik dapat memahami konsep fungsi peluang secara lebih mendalam, guru dapat memberikan alternatif Contoh Soal 4.6 dan Contoh Soal 4.7 pada Buku Siswa. Guru juga dipersilakan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis untuk memperkaya pemahaman peserta didik.



1. Misalkan Y variabel acak diskret dengan nilai y menyatakan banyaknya ponsel pintar yang dibeli Beta dalam keadaan cacat.

$$n(S) = C_2^{10} = \frac{10!}{2!8!} = 45.$$

- $Y = 0$, artinya tidak ada ponsel pintar cacat yang dibeli Beta, maka

$$f(0) = \frac{C_0^4 \cdot C_2^6}{45} = \frac{15}{45}.$$

- $Y = 1$, artinya terdapat 1 ponsel pintar cacat yang dibeli Beta, maka

$$f(1) = \frac{C_1^4 \cdot C_1^6}{45} = \frac{24}{45}.$$

- $Y = 2$, artinya terdapat 2 ponsel pintar cacat yang dibeli Beta, maka

$$f(2) = \frac{C_2^4 \cdot C_0^6}{45} = \frac{6}{45}.$$

Distribusi peluang Y disajikan dalam Tabel 4.6 berikut.

Tabel 4.6 Nilai $Y = y$ dan $f(y)$

$Y = y$	0	1	2	Total
$f(y)$	$\frac{15}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{6}{45}$	1

Fungsi peluang Y dapat dinyatakan dalam rumus:

$$f(y) = \frac{C_y^4 \cdot C_{2-y}^6}{C_2^{10}}, y = 0, 1, 2.$$

Fungsi ini memetakan setiap nilai y yang mungkin ke peluang terjadinya banyaknya ponsel pintar cacat yang dibeli oleh Beta.

2. Distribusi peluang untuk Z dapat dilihat pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Nilai $Z = z$ dan Peluangnya

$Z = z$	2	3	4	5	6	Total
$P(Z = z)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

- a. Untuk z bernilai 2, 3, atau 4, gunakan rumus $f(z) = \frac{z}{12}$. Hasilnya:

$$f(2) = \frac{2}{12}, f(3) = \frac{3}{12}, f(4) = \frac{4}{12}.$$

Untuk z bernilai 5 atau 6, gunakan rumus $f(z) = \frac{7-z}{12}$. Hasilnya:

$$f(5) = \frac{2}{12}, f(6) = \frac{1}{12}.$$

Untuk nilai z lainnya, $f(z) = 0$. Semua nilai $f(z)$ bernilai nol atau positif sehingga syarat pertama terpenuhi.

- b. Jika semua nilai peluang dijumlahkan, diperoleh

$$f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1.$$

Jadi, syarat kedua terpenuhi.

- c. Fungsi peluang $f(z)$ didefinisikan sebagai $P(Z = z) = f(z)$ untuk setiap nilai z dalam ruang hasil. Jadi,

$$P(Z = 2) = f(2) = \frac{2}{12}. \quad P(Z = 5) = f(5) = \frac{2}{12}.$$

$$P(Z = 3) = f(3) = \frac{3}{12}. \quad P(Z = 6) = f(6) = \frac{1}{12}.$$

$$P(Z = 4) = f(4) = \frac{4}{12}.$$

Hasil pemeriksaan menunjukkan bahwa $f(z)$ adalah fungsi peluang.

Subbab E: Fungsi Densitas Peluang

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ menentukan fungsi dan distribusi peluang kontinu;
- ▶ menggunakan fungsi dan distribusi peluang kontinu dalam menyelesaikan persoalan nyata.



Ayo Bereksplorasi 4.5

Guru mengajak peserta didik untuk mengeksplorasi konsep fungsi densitas peluang dengan memberikan permasalahan kontekstual. Kegiatan eksplorasi ini dirancang untuk memperkuat pemahaman peserta didik terhadap variabel acak kontinu dan bagaimana kemungkinan nilai-nilainya dapat dimodelkan melalui fungsi matematis. Guru dapat mengajukan beberapa pertanyaan pemantik yang terdapat pada Buku Siswa untuk memancing rasa ingin tahu peserta didik.

Melalui kegiatan eksplorasi ini, peserta didik diharapkan dapat menyimpulkan bahwa suatu variabel acak kontinu mempunyai peluang pada setiap titik. Dengan kata lain, yang dipandang ialah suatu selang dan bukan

nilai suatu titik dari variabel acak. Hal ini menyebabkan distribusi peluangnya tidak mungkin disajikan dalam bentuk tabel. Guru kemudian meminta peserta didik mencermati Definisi 4.5 dan menjelaskan bahwa distribusi peluang variabel acak kontinu biasanya disajikan berupa rumus fungsi secara urut. Fungsi distribusi peluang variabel acak kontinu disebut *fungsi densitas*. Guru kemudian meminta peserta didik untuk mencermati gambar yang tersaji pada Buku Siswa.



Ayo Berdiskusi

Peserta didik diarahkan untuk memperluas pemahaman mereka melalui diskusi kelompok. Guru membagi peserta didik ke dalam kelompok kecil (2–4 orang per kelompok). Fokus utama diskusi ini adalah pada pemahaman konseptual: mengapa peluang di variabel acak kontinu harus dilihat sebagai luas, bukan nilai pada satu titik.

Guru memberikan beberapa pertanyaan sebagai bahan diskusi. Hasil diskusi yang diharapkan adalah sebagai berikut.

1. Waktu tempuh lari seorang pelari mungkin saja tepat 13 detik, tetapi dalam peluang matematis, kejadian seperti itu memiliki probabilitas nol karena hanya satu titik di antara tak hingga banyak kemungkinan.
2. Jika kita memilih secara acak, satu waktu dalam rentang 12,5 sampai 13,5 detik, peluang muncul waktu tempuh pelari tepat 13 detik adalah nol. Hal tersebut karena untuk variabel acak kontinu, peluang pada satu titik selalu nol.
3. Maksud dari peluang dalam konteks variabel acak kontinu adalah luas area di bawah kurva fungsi densitas dalam rentang tertentu. Semakin besar luas area, semakin besar peluangnya.
4. Grafik fungsi menunjukkan sebaran nilai X . Tinggi kurva menunjukkan seberapa besar kemungkinan nilai itu muncul relatif terhadap yang lain. Peluang untuk sebuah rentang = luas di bawah grafik pada rentang tersebut.



Ayo Mengomunikasikan

Setelah berdiskusi secara berkelompok, guru meminta beberapa peserta didik untuk menyampaikan hasil diskusi mereka di depan kelas. Setiap kelompok

diminta menjelaskan bagaimana mereka memahami konsep fungsi densitas peluang, termasuk mengapa peluang di titik tertentu bernilai nol dan bagaimana peluang dihitung dari suatu selang nilai.

Guru berperan sebagai fasilitator yang membimbing alur komunikasi, memastikan bahwa setiap pendapat peserta didik dihargai dan dikembangkan melalui pertanyaan pemantik atau klarifikasi. Kegiatan ini dirancang untuk melatih kemampuan berpikir kritis, keberanian berpendapat, serta kemampuan menyampaikan gagasan secara runtut dan logis. Dalam proses ini, guru mengarahkan peserta didik untuk membuat simpulan berikut.

- ▶ Peluang dalam variabel acak kontinu tidak dihitung berdasarkan nilai tunggal, tetapi berdasarkan selang nilai.
- ▶ Peluang suatu kejadian dihitung sebagai luas di bawah kurva fungsi densitas pada selang tertentu.
- ▶ Fungsi densitas peluang dapat digunakan untuk memodelkan sebaran nilai variabel acak kontinu, seperti waktu, tinggi, atau panjang, yang nilainya tak terhingga banyaknya dalam suatu rentang.

Agar peserta didik dapat lebih memahami konsep materi fungsi densitas peluang, guru dapat memberikan alternatif contoh-contoh soal pada Buku Siswa. Guru juga dipersilakan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis untuk memperkaya pemahaman peserta didik.



Ayo Mencoba 4.5

a.
$$P(30 \leq x \leq 90) = \int_{30}^{90} \frac{1}{80} dx = \frac{1}{80} x \Big|_{30}^{90} = \frac{90 - 30}{80} = \frac{3}{4}.$$

Jadi, peluang siswa tersebut menulis kode dalam rentang 30 menit hingga 90 menit adalah $\frac{3}{4}$.

b.
$$P(40 \leq x \leq 60) = \int_{40}^{60} \frac{1}{80} dx = \frac{1}{80} x \Big|_{40}^{60} = \frac{60 - 40}{80} = \frac{1}{4}.$$

Jadi, peluang siswa tersebut menulis kode dalam rentang 40 menit hingga 60 menit adalah $\frac{1}{4}$.

Subbab F: Distribusi Binomial

Indikator Tujuan Pembelajaran

- ▶ memahami fungsi peluang dan nilai harapan dari distribusi binomial;
- ▶ menerapkan fungsi peluang dan nilai harapan dari distribusi binomial dalam menyelesaikan persoalan nyata.



Ayo Bereksplorasi 4.6

Guru mengajak peserta didik untuk melakukan percobaan nyata sederhana dan menyenangkan. Kegiatan ini bertujuan membangun pemahaman yang *bermakna* dan menumbuhkan kesadaran berpikir kritis (*berkesadaran*). Peserta didik diminta melakukan percobaan dengan menggunakan sebuah uang koin (uang logam). Peserta didik diminta melemparkan koin seimbang sebanyak dua kali untuk setiap percobaan. Peserta didik diminta untuk mengulangi eksperimen ini sebanyak 4 kali, kemudian menuliskan hasilnya dengan membuat tabel seperti pada Buku Siswa.



Ayo Berdiskusi

Guru membagi peserta didik ke dalam kelompok kecil (2–4 orang per kelompok). Guru memberikan beberapa pertanyaan seperti pada Buku Siswa sebagai bahan diskusi. Hasil diskusi yang diharapkan adalah sebagai berikut.

1. Peluang munculnya gambar pada dua kali pelemparan adalah $\frac{1}{4}$.
2. Kejadian kegagalannya adalah munculnya angka pada pelemparan baik satu kali maupun dua kali pelemparan.
3. Peluang kegagalannya adalah $\frac{3}{4}$.
4. Nilai harapan untuk memperoleh gambar pada satu kali pelemparan adalah $\frac{1}{2}$.
5. Nilai harapan untuk memperoleh keduanya gambar pada dua kali pelemparan adalah $\frac{1}{2}$.
6. Simpulan yang diperoleh adalah kejadian yang berlaku memiliki peluang berhasil dan gagal.

Selanjutnya, guru mengarahkan peserta didik untuk melanjutkan diskusi untuk menyelesaikan soal pada Ayo Berpikir Kritis.



Ayo Berpikir Kritis

Guru meminta setiap kelompok untuk mendiskusikan jawaban dari kedua soal pada Buku Siswa. Selanjutnya, guru meminta beberapa peserta didik menyampaikan hasil diskusi kelompok secara keseluruhan. Kelompok yang mempresentasikan hasil diskusi didorong untuk menjelaskan bagaimana percobaan dengan koin ini dapat dimodelkan ke dalam bentuk umum distribusi peluang. Guru kemudian mengarahkan setiap kelompok untuk menggeneralisasi hasil percobaan ke bentuk fungsi peluang. Guru memberikan klarifikasi bahwa fungsi yang tepat untuk menggambarkan kegiatan pada Ayo Bereksplorasi 4.6 adalah fungsi distribusi binomial.

1. Fungsi Distribusi Binomial

Guru dapat mengarahkan peserta didik untuk mencermati Definisi 4.6, kemudian mendiskusikan karakteristik distribusi binomial pada Ayo Berdiskusi.



Ayo Berdiskusi

Guru memandu peserta didik untuk menyadari bahwa distribusi peluang yang melibatkan dua kemungkinan, yaitu berhasil atau gagal, dan jumlah percobaannya tetap, merupakan karakteristik distribusi binomial. Agar peserta didik dapat lebih memahami konsep materi fungsi distribusi binomial, guru dapat memberikan alternatif Contoh Soal 4.11 dan Contoh Soal 4.12 pada Buku Siswa. Guru diperbolehkan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis.



Ayo Mencoba 4.6

1. Peluang mendapatkan 2 sisi gambar dalam 7 kali pelemparan sebuah uang logam dapat ditentukan dengan rumus $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, sehingga

$$\begin{aligned} b\left(2; 7, \frac{1}{2}\right) &= \binom{7}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-2} \\ &= \frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,164. \end{aligned}$$

Jadi, peluang untuk mendapatkan 2 sisi gambar dalam 7 kali pelemparan sebuah uang logam adalah 0,164.

2. Soal dapat diselesaikan menggunakan cara yang sama dengan penyelesaian nomor 1. Sebelum melakukan perhitungan, penting bagi peserta didik memahami makna dari rumus distribusi binomial berikut ini.

- ▶ Rumus $b(x; n; p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ menunjukkan peluang terjadinya tepat x kejadian sukses dalam n percobaan yang independen dengan peluang sukses p pada setiap percobaan.
- ▶ Nilai $b(x; n; p)$ selalu antara 0 dan 1. Jika dijumlahkan untuk semua nilai $0, 1, 2, \dots, n$, totalnya adalah 1.
- ▶ Dengan memahami rumus ini, peserta didik dapat menghitung peluang untuk berbagai nilai x sesuai dengan konteks masalah.

Setelah memahami hal tersebut, peluang tepat 5 orang yang sembuh dari 15 pengidap kanker dengan peluang sembuh 0,4 dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} b(5; 15, 0, 4) &= \binom{15}{5} \left(\frac{4}{10}\right)^5 \left(\frac{6}{10}\right)^{15-5} \\ &= \frac{15!}{5!(15-5)!} \left(\frac{4}{10}\right)^5 \left(\frac{6}{10}\right)^{10} = 0,186. \end{aligned}$$

Jadi, peluang tepat 5 orang yang sembuh dari kanker adalah 0,186.

2. Nilai Harapan Distribusi Binomial



Ayo Bereksplorasi 4.7

Peserta didik diarahkan bekerja dalam kelompok untuk mengeksplorasi permasalahan kontekstual yang disajikan pada Buku Siswa.



Ayo Berdiskusi

Permasalahan ini berkaitan dengan kejadian binomial karena memiliki dua kemungkinan (gagal dan berhasil) serta dilakukan secara berulang.

1. Mencanting satu kain batik dikatakan gagal jika terdapat satu pegawai yang melakukan kesalahan dalam proses mencanting sehingga peluang kegagalannya adalah $\frac{1}{3} = 0,33$.

2. Peluang kegagalan mencanting batik per hari dapat dicari menggunakan fungsi distribusi binomial berikut:

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ untuk } x = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

- Peluang kegagalan mencanting batik pada hari ke-1

Hasil mencanting sebanyak 10 kain maka tidak terjadi kegagalan mencanting, artinya $x = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} P(0) &= \binom{10}{0} (0,33)^0 (0,67)^{10-0} \\ &= (0,67)^{10} = 0,01822837804 = 0,018. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, akan diperoleh hasil seperti pada Tabel 4.8 berikut.

Tabel 4.8 Peluang Kegagalan Mencanting

Hari ke-	Hasil Mencanting	Peluang Kegagalan
1	10	0,018
2	7	0,261
3	9	0,090
4	10	0,018
5	8	0,199
6	7	0,261



Ayo Mengomunikasikan

Guru meminta beberapa peserta didik untuk menyampaikan hasil diskusi kelompok pada kegiatan Ayo Berdiskusi. Selanjutnya, guru mengarahkan setiap kelompok untuk mendiskusikan proses penurunan rumus nilai harapan distribusi binomial yang pemaparan awalnya terdapat pada Buku Siswa.

Guru bertindak sebagai fasilitator. Guru mengarahkan peserta didik untuk dapat membuat kesimpulan terkait definisi nilai harapan distribusi binomial. Agar peserta didik dapat lebih memahami konsep materi nilai harapan distribusi binomial, guru dapat memberikan alternatif Contoh Soal 4.13 pada Buku Siswa. Guru diperkenankan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis.



Ayo Mencoba 4.7

1. Nilai harapan untuk mendapatkan 3 sisi angka dalam 6 kali pelemparan sekeping uang logam dapat ditentukan dengan rumus $E(X) = np = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.
2. $E(X) = np = 40(0,80) = 32$.

Jadi, nilai harapan sembuhnya adalah 32.

Subbab G: Distribusi Normal

Indikator Tujuan Pembelajaran

- memahami fungsi peluang dan nilai harapan dari distribusi normal;
- menerapkan fungsi peluang dan nilai harapan dari distribusi normal dalam menyelesaikan persoalan nyata.



Ayo Mengingat Kembali

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru diharapkan melakukan tes nonkognitif dan tes kognitif. Tes kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan *mean* atau rata-rata, varians, dan standar deviasi.



Ayo Bereksplorasi 4.8

Guru meminta setiap kelompok yang telah dibentuk pada kegiatan Ayo Bereksplorasi 4.7 untuk menganalisis beberapa kurva normal dan melengkapi interpretasi gambar pada Buku Siswa. Jawaban peserta didik yang diharapkan adalah sebagai berikut.

- Pada Buku Siswa tersaji gambar dua kurva normal dengan rata-rata berbeda dan simpangan baku sama. Makna lengkapnya sebagai berikut.

Jika diperhatikan, kedua kurva pada gambar ini memiliki bentuk yang *sama*. Hal ini dapat dilihat pada simpangan baku (σ) yang *sama*, tetapi titik tengahnya atau rata-rata (μ) terletak di tempat berbeda di sepanjang sumbu- x sehingga $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$.

- ▶ Pada Buku Siswa tersaji gambar dua kurva normal dengan rata-rata sama dan simpangan baku berbeda. Makna lengkapnya sebagai berikut.

Jika diperhatikan, kedua kurva pada gambar ini memiliki bentuk yang *berbeda*. Hal ini dapat dilihat pada simpangan baku (σ) yang *berbeda*, tetapi titik tengahnya atau rata-rata (μ) terletak di tempat yang sama di sepanjang sumbu- x sehingga $\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$.

- ▶ Pada Buku Siswa tersaji gambar dua kurva normal dengan rata-rata dan simpangan baku berbeda. Makna lengkapnya sebagai berikut.

Jika diperhatikan, kedua kurva pada gambar ini memiliki bentuk yang *berbeda*. Hal ini dapat dilihat pada simpangan baku (σ) dan titik tengahnya atau rata-rata (μ) terletak di tempat yang *berbeda* di sepanjang sumbu- x sehingga $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$.



Ayo Berdiskusi

Guru mengarahkan peserta didik menyimpulkan hasil analisis beberapa kurva. Guru dapat mendampingi ketika diskusi kelompok berlangsung. Guru dapat memberikan beberapa pertanyaan pemantik berikut.

- ▶ Apa perbedaan dari beberapa kurva yang telah dipelajari?
- ▶ Bagaimana karakteristik dari kurva-kurva tersebut?

Pada akhir kegiatan, guru dapat menekankan kembali tentang kasus tertentu dari distribusi normal, khususnya berkaitan dengan kondisi kurvanya.

1. Fungsi Distribusi Normal

Kegiatan Ayo Bereksplorasi 4.8 memberikan informasi bahwa kurva normal sangat bergantung pada rata-rata distribusi (μ) dan varians (σ^2). Untuk memahami distribusi normal, guru dapat menjelaskan Definisi 4.7 pada Buku Siswa. Agar peserta didik dapat lebih memahami konsep materi fungsi distribusi normal, guru dapat memberikan alternatif Contoh Soal 4.14 pada Buku Siswa. Guru diperkenankan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis.



Ayo Mencoba 4.8

- Langkah pertama adalah menentukan nilai $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

Diketahui $\mu = 2,1$ dan $\sigma = 0,8$. Nilai-nilai z padanan $x_1 = 2,5$ dan $x_2 = 3,5$ adalah

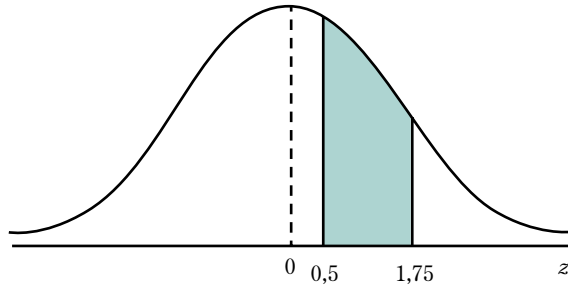
$$z_1 = \frac{2,5 - 2,1}{0,8} = 0,5 \text{ dan } z_2 = \frac{3,5 - 2,1}{0,8} = 1,75.$$

Selanjutnya, peserta didik menggambarkan kurvanya untuk mengetahui posisi z_1 dan z_2 .

Dengan demikian,

$$P(2,5 < x < 3,5) =$$

$$P(0,5 < Z < 1,75).$$



Gambar 4.2 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(0,5 < Z < 1,75)$

Nilai $P(0,5 < Z < 1,75)$

diberikan oleh daerah gelap dalam Gambar 4.2. Luas ini diperoleh dengan mengurangi luas daerah di sebelah kiri $z = 1,75$ dari luas daerah di sebelah kiri $z = 0,5$. Untuk menentukan peluang nilai z_1 dan z_2 , peserta didik dapat melihat Tabel Distribusi Normal pada Lampiran Buku Siswa.

- Untuk $z_1 = 0,5$.

Untuk z arah menurun, temukan 0,5 dan z arah ke kanan, temukan 0,00 sehingga $P(Z < 0,5) = 0,6915$.

- Untuk $z_2 = 1,75$.

Untuk z arah menurun, temukan 1,7 dan z arah ke kanan, temukan 0,05 sehingga $P(Z < 1,75) = 0,9599$.

Dengan demikian,

$$P(2,5 < X < 3,5) = P(0,5 < Z < 1,75)$$

$$= P(Z < 1,75) - P(Z < 0,5)$$

$$= 0,9599 - 0,6915 = 0,2684.$$

Jadi, peluang siswa tersebut memiliki nilai antara 2,5 dan 3,5 adalah 0,2684.

2. Dengan menerapkan cara yang sama dengan nomor 1, diperoleh

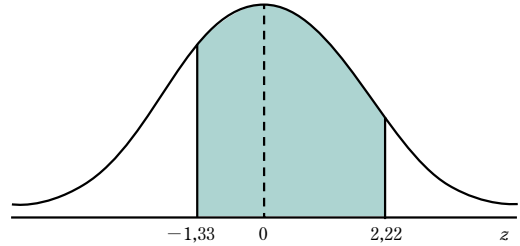
$$z_1 = \frac{3.200 - 3.500}{225} = -1,33 \text{ dan } z_2 = \frac{4.000 - 3.500}{225} = 2,22.$$

Dengan demikian,

$$P(3.200 < x < 4.000) =$$

$$P(-1,33 < Z < 2,22).$$

Nilai $P(3.200 < x < 4.000)$ diberikan oleh daerah gelap dalam Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-1,33 < Z < 2,22)$

Berdasarkan Tabel Distribusi Normal baku, diperoleh informasi sebagai berikut.

- Untuk $z_1 = -1,33$, maka $P(-1,33 < Z < 0) = P(0 < Z < 1,33) = 0,9082 - 0,5 = 0,4082$.
- Untuk $z_2 = 2,22$, maka $P(0 < Z < 2,22) = 0,9868 - 0,5 = 0,4868$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P(3.200 < X < 4.000) &= P(-1,33 < Z < 2,22) \\ &= P(0 < Z < 2,22) + P(-1,33 < Z < 0) \\ &= 0,4868 + 0,4082 = 0,8950. \end{aligned}$$

Jadi, peluang bayi lahir dengan berat antara 3.200 gram dan 4.000 gram adalah 0,8950.

2. Nilai Harapan Distribusi Normal



Ayo Bereksplorasi 4.9

Guru mengarahkan peserta didik agar secara berkelompok melengkapi langkah-langkah untuk menemukan nilai harapan distribusi normal untuk memahami nilai harapan distribusi normal. Guru dapat memberikan bimbingan jika peserta didik mengalami kesulitan.

Nilai harapan pada distribusi normal diperoleh dari $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, sehingga

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx.$$

Misalkan $t = \frac{x - \mu}{\sigma}$, maka

$$x = \sigma t + \mu \text{ dan } dx = \sigma dt,$$

dan

$$x^2 = (\sigma t + \mu)^2 = \sigma^2 t^2 + 2\sigma t\mu + \mu^2.$$

Dengan menyubstitusikan $x = \sigma t + \mu$ dan $dx = \sigma dt$ ke persamaan $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$, diperoleh

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi} \right) \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \mu. \end{aligned}$$

Misalkan $z = -\frac{1}{2}t^2$ maka $dz = -t dt$, sehingga

$$E(X) = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^z dz + \mu = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^z \Big|_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu.$$

Agar peserta didik dapat lebih memahami konsep materi nilai harapan distribusi normal, guru dapat memberikan alternatif Contoh Soal 4.15 pada Buku Siswa. Guru dipersilakan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis.



Ayo Mencoba 4.9

1. Diketahui $\mu = 2,1$ dan $\sigma = 0,8$,

sehingga nilai harapan dapat dicari dengan

$$E(X) = \mu,$$

$$E(2,7) = 2,1.$$

Jadi, nilai harapan siswa tersebut mencapai nilai 2,7 adalah 2,1.

2. Diketahui $\mu = 3.500$ dan $\sigma = 225$,

sehingga nilai harapan dapat dicari dengan

$$E(X) = \mu,$$

$$E(3.750) = 3.500.$$

Jadi, nilai harapan bayi lahir dengan berat 3.750 gram adalah 3.500.

G. Sumatif

1. Guru menugaskan peserta didik untuk menyelesaikan Uji Kompetensi Bab 4. Uji kompetensi ini dapat digunakan sebagai salah satu alternatif untuk melakukan asesmen sumatif pada akhir pembelajaran.
2. Peserta didik didorong untuk berpikir kritis, kreatif, dan inovatif melalui asesmen ini secara *berkesadaran*, yang mencakup pemahaman tentang bagaimana mereka menerapkan konsep analisis data dan peluang. Peserta didik juga didorong untuk membangun keterkaitan yang *bermakna* antara konten matematis dan skenario dunia nyata, seperti mengaitkan konsep analisis data dan peluang pada kehidupan sehari-hari.
3. Asesmen ini mengevaluasi kemampuan kognitif peserta didik dalam memahami materi analisis data dan peluang sekaligus mendorong kreativitas, keingintahuan, dan komunikasi. Berdasarkan pendekatan ini, peserta didik diharapkan dengan penuh kesadaran dapat mempelajari matematika secara mendalam (*berkesadaran*), relevan (*bermakna*), dan menyenangkan (*menggembirakan*).

Contoh kisi-kisi untuk asesmen sumatif pada materi analisis data dan peluang dapat dilihat pada Tabel 4.9, sedangkan rubrik penskoran asesmen sumatif dapat dilihat pada Tabel 4.10.

Tabel 4.9 Contoh Kisi-Kisi Penilaian Uji Kompetensi (Asesmen Sumatif)

No.	Tujuan Pembelajaran	Materi	Indikator	Teknik Penilaian	No. Soal	Level SOLO	Jumlah
1.	Peserta didik mampu memahami konsep variabel acak, baik diskret maupun kontinu, serta mampu menggunakannya untuk memecahkan berbagai persoalan kontekstual melalui interpretasi terhadap fungsi peluang dan distribusinya.	Variabel Acak Diskret	Menentukan nilai-nilai yang mungkin dari suatu variabel acak diskret dari suatu percobaan acak.	Benar-Salah	A1	Unistruktural	1
				Uraian	B1	Multistruktural	1
2.		Fungsi Peluang	Menentukan distribusi peluang dari variabel acak diskret.	Benar-Salah	A2	Multistruktural	1

No.	Tujuan Pembelajaran	Materi	Indikator	Teknik Penilaian	No. Soal	Level SOLO	Jumlah
3.	- Peserta didik mampu menjelaskan dan membedakan antara variabel acak diskret dan kontinu, menentukan fungsi dan distribusi peluang diskret serta kontinu, serta menggunakannya dalam menyelesaikan persoalan nyata. - Peserta didik mampu memahami distribusi binomial dan distribusi normal, serta dapat menafsirkan nilai harapan dari kedua distribusi tersebut secara logis dan bermakna.	Fungsi Densitas Peluang	Menentukan peluang dari suatu interval berdasarkan fungsi densitas peluang variabel acak kontinu.	Benar-Salah	A3	Relasional	1
				Uraian	B2	Unistruktural	1
4.		Distribusi Binomial	Menentukan nilai peluang dari suatu kejadian dalam distribusi binomial.	Benar-Salah	A4	Unistruktural	1
				Uraian	B3 B5	Multistruktural Relasional	2
			Menentukan nilai harapan berdasarkan peluang dari suatu kejadian dalam distribusi binomial.	Uraian	B6	Relasional	1
5.		Distribusi Normal	Menghitung nilai Z untuk dua batas interval pada distribusi normal.	Benar-Salah	A5	Relasional	1
				Uraian	B4, B7	Relasional	2
			Menentukan peluang suatu nilai pada distribusi normal dan nilai harapan dari distribusi normal.	Uraian	B8	Relasional	1

Tabel 4.10 Contoh Rubrik Penskoran untuk Soal Berbentuk Uraian

Langkah	Skor	Indikator Penskoran
Memahami Masalah	3	Peserta didik mampu menuliskan (mengungkapkan) apa yang diketahui dan ditanyakan dari masalah yang diajukan dengan jelas.
	2	Peserta didik hanya menuliskan (mengungkapkan) apa yang diketahui atau apa yang ditanyakan.
	1	Peserta didik menuliskan (mengungkapkan) data/konsep/ pengetahuan yang tidak berhubungan dengan masalah yang diajukan.
	0	Peserta didik tidak menuliskan apa pun sehingga tidak memahami makna dari masalah yang diajukan.
Merencanakan penyelesaian	2	Peserta didik menuliskan/menceritakan syarat cukup dan syarat perlu (rumus) dari masalah yang diajukan serta menggunakan semua informasi yang telah dikumpulkan.
	1	Peserta didik menceritakan/menuliskan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah, tetapi tidak runtut.

Langkah	Skor	Indikator Penskoran
	0	Peserta didik tidak menceritakan/menuliskan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah.
Melaksanakan rencana	4	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, menggunakan langkah-langkah menyelesaikan masalah dengan benar, tidak terjadi kesalahan prosedur, dan tidak terjadi kesalahan algoritma/perhitungan.
	3	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, menggunakan langkah-langkah menyelesaikan masalah dengan benar, dan tidak terjadi kesalahan prosedur, tetapi terjadi kesalahan algoritma/perhitungan.
	2	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, tetapi terjadi kesalahan prosedur.
	1	Peserta didik melaksanakan rencana yang telah dibuat, tetapi terjadi kesalahan prosedur dan kesalahan algoritma/perhitungan.
	0	Peserta didik tidak mampu melaksanakan rencana yang telah dibuat.
Memeriksa kembali	1	Peserta didik melakukan pemeriksaan kembali jawaban.
	0	Peserta didik tidak melakukan pemeriksaan kembali jawaban.

Catatan:

1. Soal berbentuk benar atau salah biasanya diberikan skor 1 jika jawaban benar dan skor 0 untuk jawaban salah.
2. Guru dapat menetapkan bobot yang berbeda-beda antara aspek satu dan lainnya pada penskoran (sebagaimana contoh rubrik penskoran pada Tabel 4.10) dengan memperhatikan karakteristik tujuan pembelajaran atau keterampilan yang dinilai.
3. Alternatif perhitungan pemberian Nilai Akhir (skala 10)
Skor Total Tes Tertulis Berbentuk Benar atau Salah = 5
Skor Total Tes Tertulis Berbentuk Uraian = 80

$$\text{Nilai} = \frac{(4 \times \text{skor bagian A}) + (\text{skor bagian B})}{10}$$

Contoh:

$$\text{Nilai} = \frac{(4 \times 4) + (60)}{10} = \frac{(16 + 60)}{10} = \frac{(76)}{10} = 7,6$$

H. Kunci Jawaban

Latihan Soal Variabel Acak

1. Misalkan: B = Suku cadang busi dengan kondisi baik.
C = Suku cadang busi dengan kondisi cacat.

Ruang sampel dari kemungkinan hasil pemeriksaan terhadap tiga suku cadang busi motor adalah

$$S = \{BBB, BBC, BCB, CBB, BCC, CBC, CCB, CCC\}.$$

Variabel X menyatakan banyaknya suku cadang busi yang cacat. Tabel 4.11 berikut menunjukkan korespondensi antara elemen ruang sampel dan nilai X yang bersesuaian.

Tabel 4.11 Taksiran Suku Cadang Busi Motor yang Cacat

Ruang Sampel	x
BBB	0
BBC = BCB = CBB	1
BCC = CBC = CCB	2
CCC	3

Jadi, himpunan semua nilai yang mungkin dari variabel acak X adalah $\{0, 1, 2, 3\}$.

- Misalkan: B = Mobil dengan kondisi baik.
C = Mobil dengan kondisi tergores.

Ruang sampel dari kemungkinan hasil mobil yang diterima toko adalah

$$T = \{BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB\}.$$

Variabel X menyatakan banyaknya mobil terkena goresan yang diterima toko tersebut. Tabel 4.12 berikut menunjukkan korespondensi antara elemen ruang sampel dan nilai X yang bersesuaian.

Tabel 4.12 Taksiran Banyak Mobil yang Tergores

Ruang Sampel	x
BBB	0
BBG = BGB = GBB	1
BGG = GBG = GGB	2

Jadi, himpunan semua nilai yang mungkin dari variabel acak X adalah $\{0, 1, 2\}$.

Latihan Soal Variabel Acak Diskret

1. Manakah dari variabel acak berikut yang merupakan variabel acak diskret?

Variabel Acak	B	S
Produksi gabah per hektar		✓
Jumah penduduk perempuan di kota B	✓	
Berat badan siswa SMA Maju Jaya		✓
Produksi sepatu olahraga pabrik Niko per hari	✓	
Berat bagasi penumpang pesawat		✓

2. Diketahui terdapat percobaan melempar dua buah dadu seimbang.

- a. Ruang sampelnya adalah

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}, \text{ sehingga } n(S) = 36.$$

- b. X = jumlah mata dadu yang muncul dari dua mata dadu seimbang.

x = nilai variabel X , maka

$$x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6, x = 7, x = 8, x = 9, x = 10, x = 11, x = 12.$$

Diperoleh hasil peluang yang dapat dilihat pada Tabel 4.13.

Tabel 4.13 Taksiran Pasangan Angka yang Terpilih (Muncul)

X	$X = x$	Peluang $P(X = x)$
2	(1, 1)	$\frac{1}{36}$
3	(1, 2), (2, 1)	$\frac{2}{36}$
4	(1, 3), (2, 2), (3, 1)	$\frac{3}{36}$
5	(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)	$\frac{4}{36}$
6	(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	$\frac{5}{36}$
7	(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)	$\frac{6}{36}$
8	(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	$\frac{5}{36}$

X	$X = x$	Peluang $P(X = x)$
9	(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	$\frac{4}{36}$
10	(4, 6), (5, 5), (6, 4)	$\frac{3}{36}$
11	(5, 6), (6, 5)	$\frac{2}{36}$
12	(6, 6)	$\frac{1}{36}$
Jumlah		1

- c. Dari tabel di atas, jumlah semua peluangnya adalah 1.

Hal ini menunjukkan beberapa hal berikut.

- ▶ x memiliki nilai-nilai yang dapat dihitung satu per satu: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.
- ▶ Setiap nilai tersebut memiliki peluang tertentu yang jika dijumlahkan, hasilnya adalah 1.
- ▶ Dengan demikian, x merupakan variabel acak diskret karena hasilnya berupa bilangan diskret yang dapat dihitung satu per satu dengan peluang terdefinisi.

Latihan Soal Variabel Acak Kontinu

- a. Contoh jawaban: 27,8°; 28,1°; 28,7°; dan 29,5°.
- b. Ruang sampel dapat ditulis sebagai rentang waktu:

$$S = \{x | 25,5 \leq x \leq 30, x \in R\}.$$
- c. Tidak, karena ruang sampel S mengandung semua bilangan real dalam rentang tersebut, termasuk bilangan desimal, sehingga banyaknya nilai tidak terhitung satu per satu (*uncountable*).

Latihan Soal Fungsi Peluang

1. Diketahui:

- ▶ banyak bola putih = 5,
- ▶ banyak bola merah = 3,
- ▶ banyak bola hitam = 2,
- ▶ jumlah bola = 10.

Misalkan Y variabel acak diskret dengan nilai y menyatakan banyak bola merah yang diambil, maka

- ▶ jumlah cara mengambil 3 dari 10 bola = $n(S) = C_3^{10} = \frac{10!}{3!7!} = 120$,
- ▶ banyak cara mengambil bola merah = C_y^3

Dengan demikian,

$Y = 0$, artinya tidak terdapat bola merah yang terambil, maka

$$f(0) = \left(\frac{C_3^5 \cdot C_0^2 \cdot C_0^3}{120} \right) + \left(\frac{C_2^5 \cdot C_1^2 \cdot C_0^3}{120} \right) + \left(\frac{C_1^5 \cdot C_2^2 \cdot C_0^3}{120} \right) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}.$$

$Y = 1$, artinya terdapat 1 bola merah yang terambil, maka

$$f(1) = \left(\frac{C_2^5 \cdot C_0^2 \cdot C_1^3}{120} \right) + \left(\frac{C_1^5 \cdot C_1^2 \cdot C_1^3}{120} \right) + \left(\frac{C_0^5 \cdot C_2^2 \cdot C_1^3}{120} \right) = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}.$$

$Y = 2$, artinya terdapat 2 bola merah yang terambil, maka

$$f(2) = \left(\frac{C_1^5 \cdot C_0^2 \cdot C_2^3}{120} \right) + \left(\frac{C_0^5 \cdot C_1^2 \cdot C_2^3}{120} \right) = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}.$$

$Y = 3$, artinya terdapat 3 bola merah yang terambil, maka

$$f(3) = \left(\frac{C_0^5 \cdot C_0^2 \cdot C_3^3}{120} \right) = \frac{1}{120}.$$

Distribusi peluang Y ditunjukkan pada Tabel 4.14 berikut.

Tabel 4.14 Nilai $Y = y$ dan $f(y)$

$Y = y$	0	1	2	3	Total
$f(y)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

Fungsi peluang Y dapat dinyatakan dalam rumus:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{7}{24}, & \text{untuk } y = 0, \\ \frac{21}{40}, & \text{untuk } y = 1, \\ \frac{7}{40}, & \text{untuk } y = 2, \\ \frac{1}{120}, & \text{untuk } y = 3, \\ 0, & \text{untuk } y \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Fungsi ini memetakan setiap nilai y yang mungkin ke peluang terambilnya jumlah bola merah tersebut.

2. a. Distribusi peluang untuk X ditunjukkan pada Tabel 4.15 berikut.

Tabel 4.15 Nilai x dan Peluang ($X = x$)

x	1	2	3	4	Total
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	0	1

- b. Berikut proses pemeriksaan apakah $f(x)$ merupakan fungsi peluang dari variabel acak diskret X .

- Untuk $x = 1, 2, 3$, digunakan rumus $f(x) = \frac{x}{6}$ yang menghasilkan $f(1) = \frac{1}{6}, f(2) = \frac{2}{6}, f(3) = \frac{3}{6}$.

Untuk nilai x lainnya, maka $f(x) = 0$.

Semua nilai $f(x)$ bernilai nol atau positif sehingga syarat pertama terpenuhi.

- Jika semua nilai peluang dijumlahkan, diperoleh

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + 0 = \frac{6}{6} = 1.$$

Jadi, syarat kedua terpenuhi.

- Fungsi peluang $f(x)$ didefinisikan sebagai $P(X = x) = f(x)$. Untuk setiap nilai x dalam ruang hasil, diperoleh

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{1}{6}, P(X = 2) = f(2) = \frac{2}{6}, P(X = 3) = f(3) = \frac{3}{6}, \\ P(X = 4) = f(4) = 0.$$

Hasil pemeriksaan menunjukkan bahwa $f(x)$ adalah fungsi peluang.

$$c. \quad P(X = 2) = \frac{2}{6}, P(X \geq 2) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}, \text{ dan } P(X < 3) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}.$$

3. Misalkan X : variabel acak diskret telur yang busuk,

x : banyak telur yang busuk.

$$n(S) = C_3^9 = \frac{9!}{3!6!} = 84.$$

$X = 0$, artinya tidak ada telur busuk yang terambil, maka $f(0) = \frac{C_0^3 \cdot C_3^6}{84} = \frac{20}{84}$.

$X = 1$, artinya terdapat 1 telur busuk yang terambil, maka $f(1) = \frac{C_1^3 \cdot C_2^6}{84} = \frac{45}{84}$.

$X = 2$, artinya terdapat 2 telur busuk yang terambil, maka $f(2) = \frac{C_2^3 \cdot C_1^6}{84} = \frac{18}{84}$.

$X = 3$, artinya terdapat 3 telur busuk yang terambil, maka $f(3) = \frac{C_3^3 \cdot C_0^6}{84} = \frac{1}{84}$.

Distribusi peluang X ditunjukkan pada Tabel 4.16 berikut.

Tabel 4.16 Nilai $X = x$ dan $f(x)$

$X = x$	0	1	2	3	Total
$f(x)$	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$	1

Adapun fungsi peluang X dapat dinyatakan dalam rumus:

$$f(x) = \frac{C_x^3 \cdot C_{3-x}^6}{C_3^9}, x = 0, 1, 2, 3.$$

4. Misalkan N : variabel acak diskret kelereng merah,

n : banyak kelereng merah yang diambil.

$$n(S) = C_4^{10} = \frac{10!}{4!6!} = 210.$$

Dengan cara yang sama pada soal nomor 3, diperoleh distribusi peluang N ditunjukkan pada Tabel 4.17 berikut.

Tabel 4.17 Nilai $N = n$ dan $f(n)$

$N = n$	0	1	2	3	4	Total
$f(n)$	$\frac{15}{210}$	$\frac{80}{210}$	$\frac{90}{210}$	$\frac{24}{210}$	$\frac{1}{210}$	1

Adapun fungsi peluang N dapat dinyatakan dalam rumus:

$$f(N) = \frac{C_n^4 \cdot C_{4-n}^6}{C_4^{10}}, n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

5. Peluang ($X = \text{benar}$) = 0,5 dan peluang ($X = \text{salah}$) = 0,5.

Fungsi peluang X :

$$P(X = x) = f(x) = C_x^3 (0,5)^3 (0,5)^{3-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$P(X = 0) = f(0) = C_0^3 (0,5)^0 (0,5)^3 = 0,125.$$

$$P(X = 1) = f(1) = C_1^3 (0,5)^1 (0,5)^2 = 0,375.$$

$$P(X = 2) = f(2) = C_2^3 (0,5)^2 (0,5)^1 = 0,375.$$

$$P(X = 3) = f(3) = C_3^3 (0,5)^3 (0,5)^0 = 0,125.$$

Distribusi peluang X ditunjukkan pada Tabel 4.18 berikut.

Tabel 4.18 Nilai $X = x$ dan $f(x)$

$X = x$	0	1	2	3	Total
$f(x)$	0,125	0,375	0,375	0,125	1

Latihan Soal Fungsi Densitas Peluang

1. a. $P(30 < x < 90) = \int_{30}^{90} \frac{1}{180} dx = \frac{1}{180} x \Big|_{30}^{90} = \frac{90 - 30}{180} = \frac{1}{3}.$

Jadi, peluang seorang pembeli berada di toko antara 30 dan 90 menit adalah $\frac{1}{3}$.

b. $P(15 < x < 60) = \int_{15}^{60} \frac{1}{180} dx = \frac{1}{180} x \Big|_{15}^{60} = \frac{60 - 15}{180} = \frac{1}{4}.$

Jadi, peluang seorang pembeli berada di toko antara 15 dan 60 menit adalah $\frac{1}{4}$.

2. a. Pembuktian bahwa $P(1 < X < 5) = 1$.

$$\begin{aligned} P(1 < X < 5) &= \int_1^5 \frac{x+2}{20} dx = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_1^5 \\ &= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{25}{2} + 10 \right) - \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{20} \left(\frac{45}{2} - \frac{5}{2} \right) = \frac{1}{20} (20) = 1. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $P(1 < X < 5) = 1$.

b. $P(X < 4) = P(1 < X < 4) = \int_1^4 \frac{x+2}{20} dx = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_1^4$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{20} \left(\left(\frac{16}{2} + 8 \right) - \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{20} (16 - 2,5) = 0,675. \end{aligned}$$

Jadi, $P(X < 4) = 0,675$.

Latihan Soal Distribusi Binomial

1. Diketahui sekeping uang logam yang seimbang dilemparkan sebanyak tiga kali.

a. Peluang muncul tiga angka: $b\left(3; 3, \frac{1}{2}\right) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}.$

Jadi, peluang munculnya tiga angka adalah $\frac{1}{8}$.

b. Peluang muncul tiga gambar: $b\left(3; 3, \frac{1}{2}\right) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$

Jadi, peluang munculnya tiga gambar adalah $\frac{1}{8}$.

2. Peluang dan nilai harapan pemain bisbol berhasil tepat memukul sekali dalam 5 kesempatan secara berturut-turut adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\text{Peluang } b\left(1; 5, \frac{25}{100}\right) &= \binom{5}{1} \left(\frac{25}{100}\right)^1 \left(\frac{75}{100}\right)^{5-1} \\ &= \binom{5}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0,3955.\end{aligned}$$

$$\text{Nilai harapan } E(X) = np = 5(0,250) = 1,25.$$

3. Peluang 4 dari 6 bayi belum divaksinasi rubela adalah

$$b(4; 6, 0, 2) = \binom{6}{4} (0,2)^4 (0,8)^{(6-4)} = 0,0154.$$

4. Peluang 3 dari 10 orang yang sudah mengunjungi dokter dalam sebulan terakhir adalah

$$b\left(3; 10, \frac{1}{5}\right) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{(10-3)} = 0,201.$$

5. Peluang seorang siswa menyelesaikan studi pada sebuah sekolah adalah 0,9. Misalkan terdapat 5 siswa di sekolah tersebut.

- a. Peluang bahwa tidak ada siswa yang menyelesaikan studi adalah $P(X = 0) = \binom{5}{0} (0,9)^0 (0,1)^5 = 0,00001.$

- b. Peluang bahwa hanya satu siswa yang menyelesaikan studi adalah $P(X = 1) = \binom{5}{1} (0,9)^1 (0,1)^4 = 0,00045.$

- c. Peluang paling sedikit satu siswa yang menyelesaikan studi adalah $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,99999.$

- d. Peluang semua siswa menyelesaikan studi adalah $P(X = 5) = \binom{5}{5} (0,9)^5 (0,1)^0 = 0,59049.$

6. Diketahui sepasang dadu seimbang dilemparkan sebanyak 6 kali.

- a. Peluang memperoleh jumlah mata dadu 9 sebanyak dua kali adalah

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^{6-2} = 0,116.$$

- b. Peluang memperoleh jumlah mata dadu 9 paling sedikit dua kali adalah

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= \binom{6}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^4 + \binom{6}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \binom{6}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^4 \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{9}\right)^5 \left(\frac{8}{9}\right)^1 + \\ &\quad \binom{6}{6} \left(\frac{1}{9}\right)^6 \left(\frac{8}{9}\right)^0 = 0,137.\end{aligned}$$

7. Pesulap sukses melaksanakan aksinya jika semua angka pilihan penonton berhasil ditebak dengan benar.

- a. Peluang pesulap tersebut sukses melaksanakan aksinya adalah

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{10}\right)^4 \left(\frac{9}{10}\right)^{(4-4)}$$

$$= \frac{4!}{4!0!} \times \frac{1}{10.000} \times 1 = 0,0001.$$

Jadi, peluang pesulap tersebut sukses menebak semua angka dengan benar adalah 0,0001.

- b. Nilai harapan pesulap tersebut menebak angka dengan benar adalah

$$E(X) = np = 4 \times \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{4}{10}.$$

Jadi, nilai harapan pesulap menebak angka dengan benar adalah $\frac{4}{10}$.

Latihan Soal Distribusi Normal

1. Diketahui $\mu = 61$ dan $\sigma = 2$, maka

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{58 - 61}{2} = -1,5 \text{ dan } z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{63 - 61}{2} = 1.$$

Peluang berat badan mereka akan berada di antara 58 kg dan 63 kg dinotasikan dengan $P(58 < X < 63) = P(-1,5 < Z < 1)$. Kurva distribusi normalnya ditunjukkan pada Gambar 4.4 berikut.

Dari tabel nilai Z untuk skor

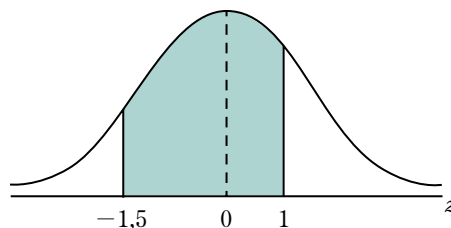
1,5 dan 1, diperoleh

$$P(-1,5 < Z < 0) = 0,4332 \text{ dan}$$

$$P(0 < Z < 1) = 0,3413.$$

Untuk luas daerah yang

diarsir, maka



Gambar 4.4 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-1,5 < Z < 1)$

$$P(-1,5 < Z < 1) = P(-1,5 < Z < 0) + P(0 < Z < 1)$$

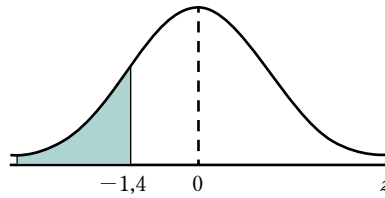
$$= 0,4332 + 0,3413 = 0,7745.$$

Jadi, peluang siswa untuk mengikuti lomba gulat berdasarkan berat badannya adalah 0,7745.

2. Nilai x untuk jenis baterai otomotif berumur rata-rata 3 tahun dengan simpangan baku 0,5 tahun adalah

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2,3 - 3}{0,5} = -1,4$$

Kurva distribusi normalnya ditunjukkan pada Gambar 4.5 berikut.

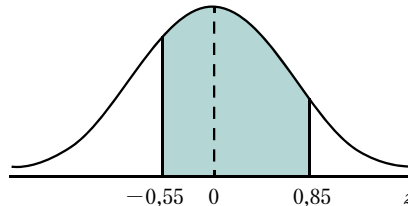


Gambar 4.5 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,4)$

- a. Peluang suatu baterai akan berumur kurang dari 2,3 tahun adalah $P(X < 2,3) = P(Z < -1,4) = 0,0808$.
 - b. Nilai harapannya adalah $E(X) = \mu = 3$. Jadi, nilai harapannya adalah 3 tahun.
3. Diketahui $\mu = 800$ dan $\sigma = 40$.
- a. Peluang lampu padam antara 778 jam dan 834 jam dapat ditentukan dengan cara berikut.

$$z_1 = \frac{778 - 800}{40} = -0,55 \text{ dan } z_2 = \frac{834 - 800}{40} = 0,85.$$

Kurva distribusi normalnya ditunjukkan pada Gambar 4.6 berikut.



Gambar 4.6 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,55 < Z < 0,85)$

Dari tabel nilai Z untuk skor $-0,55$ dan $0,85$, diperoleh

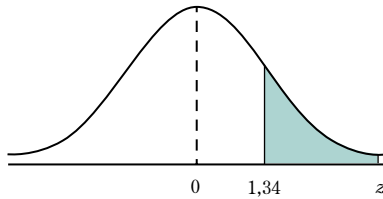
$$\begin{aligned} P(778 < X < 834) &= P(-0,55 < Z < 0,85) \\ &= P(Z < 0,85) - P(Z < -0,55) \\ &= 0,8023 - 0,2912 = 0,5111. \end{aligned}$$

Jadi, peluang lampu padam antara 778 dan 834 jam adalah 0,5111.

- b. Nilai harapan $E(X) = \mu = 800$. Jadi, nilai harapannya adalah 800 jam.
4. Diketahui $\mu = 30$ dan $\sigma = 4,1$.
- a. Persentase anjing pudel memiliki tinggi lebih dari 35,5 cm dapat ditentukan sebagai berikut.

$$z = \frac{35,5 - 30}{4,1} = 1,34.$$

Kurva distribusi normalnya ditunjukkan pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 1,34)$

Dari tabel nilai Z untuk skor 1,34, diperoleh

$$\begin{aligned} P(X > 35,5) &= P(Z > 1,34) \\ &= 1 - P(Z < 1,34) \\ &= 1 - 0,9099 \\ &= 0,0901 = 9\%. \end{aligned}$$

Jadi, persentase anjing pudel jenis tersebut memiliki tinggi lebih dari 35,5 cm adalah 9%.

b. $E(X) = \mu$ maka $E(X) = 30$. Jadi, nilai harapannya adalah 30 cm.

5. Diketahui $\sigma = 37$ dan $P(X > 230) = P(Z > z) = 0,14$.

Gambar 4.8 menunjukkan luas daerah distribusi normal untuk $P(Z > z)$.

Dapat ditulis

$$\begin{aligned} P(Z > z) &= 1 - P(Z < z) \\ 0,14 &= 1 - P(Z < z) \\ P(Z < z) &= 1 - 0,14 = 0,86. \end{aligned}$$

Dari tabel Z , diperoleh bahwa skor $z = 1,08$ (dibulatkan).

Selanjutnya, tentukan nilai rata-rata μ .

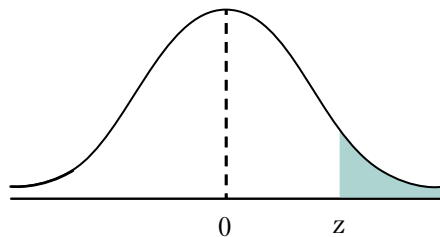
$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \mu}{\sigma} \\ 1,08 &= \frac{230 - \mu}{37} \\ \mu &= 190,04. \end{aligned}$$

Jadi, rata-rata pemain bermain *game online* tersebut adalah 190,04 menit.

6. Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan banyaknya air yang dikeluarkan oleh mesin, maka $z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - 200}{15}$.

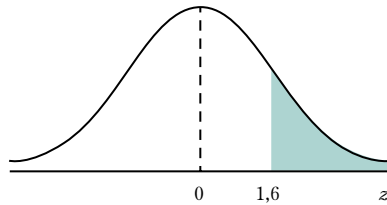
a. Cara menentukan banyak gelas (dalam persentase) yang berisi lebih dari 224 ml adalah sebagai berikut.

$$z = \frac{224 - 200}{15} = 1,6.$$



Gambar 4.8 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > z)$

Gambar 4.9 menunjukkan luas daerah distribusi normal untuk $P(Z > 1,6)$.



Gambar 4.9 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 1,6)$

Dari tabel nilai Z , diperoleh

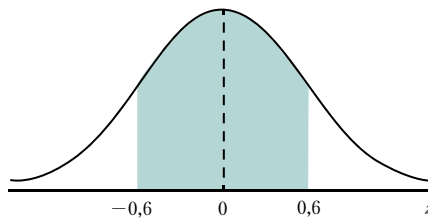
$$\begin{aligned} P(X > 224) &= P(Z > 1,6) \\ &= 1 - P(Z < 1,6) \\ &= 1 - 0,9452 \\ &= 0,0548 = 5,48\%. \end{aligned}$$

Jadi, banyak gelas yang berisi lebih dari 224 ml adalah 5,48%.

- b. Cara menentukan peluang sebuah gelas berisi antara 191 ml dan 209 ml adalah sebagai berikut.

$$z_1 = \frac{191 - 200}{15} = -0,6 \text{ dan } z_2 = \frac{209 - 200}{15} = 0,6.$$

Gambar 4.10 menunjukkan luas daerah distribusi normal untuk $P(-0,6 < Z < 0,6)$.



Gambar 4.10 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,6 < Z < 0,6)$

Dari tabel nilai Z , diperoleh

$$\begin{aligned} P(191 < X < 209) &= P(191 < X < 0) + P(0 < X < 209) \\ &= P(-0,6 < Z < 0) + P(0 < Z < 0,6) \\ &= 0,2257 + 0,2257 = 0,4514. \end{aligned}$$

Jadi, peluang sebuah gelas berisi antara 191 ml dan 209 ml adalah 0,4514.

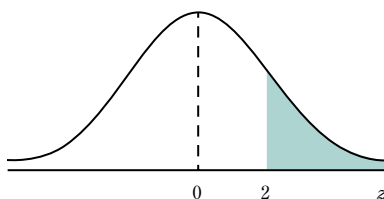
- c. Cara menentukan banyak gelas di antara 1.000 gelas berikutnya yang akan meluap bila gelas-gelas itu berukuran 230 milimeter adalah sebagai berikut.

$$z = \frac{230 - 200}{15} = 2.$$

Gambar 4.11 menunjukkan luas daerah distribusi normal untuk $P(Z > 2)$.

Dari tabel nilai Z, diperoleh

$$\begin{aligned} P(X > 230) &= 1 - P(X < 230) \\ &= 1 - P(Z < 2) \\ &= 1 - 0,9772 = 0,0228. \end{aligned}$$



Gambar 4.11 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 2)$.

Jadi, banyak gelas yang airnya akan tumpah adalah

$$1.000 \times 0,0228 = 22,8 \approx 23.$$

- d. Cara menentukan batasan volume dari 25% gelas yang berisi sedikit adalah sebagai berikut.

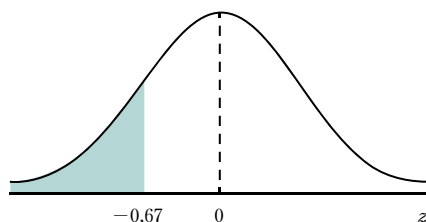
$$P(Z < z) = 0,25.$$

Dari tabel distribusi z, diperoleh

$$z = -0,67.$$

Gambar 4.12 menunjukkan luas daerah distribusi normal untuk

$$P(Z < -0.67).$$



Gambar 4.12 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -0.67)$

Maka

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \mu}{\sigma} \\ -0,67 &= \frac{x - 200}{15} \\ x &= 189,95. \end{aligned}$$

Jadi, batasan volume dari 25% gelas yang berisi sedikit adalah di bawah 189,95 ml.

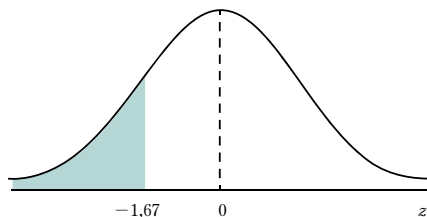
7. Diketahui $x = 95$, $\mu = 115$, dan $\sigma = 12$, maka

$$z = \frac{95 - 115}{12} = -1,67.$$

Perhatikan Gambar 4.13.

Cek tabel nilai Z.

$$\begin{aligned} P(X < 95) &= P(Z < -1,67) \\ &= 0,0475 \\ &= 4,75\% \end{aligned}$$



Gambar 4.13 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,67)$

Banyak calon mahasiswa yang akan ditolak (M) adalah

$$M = P(X < 95) \times n = \frac{4,75}{100} \times 600 = 28,5.$$

Jadi, banyaknya calon mahasiswa yang akan ditolak tanpa memperhatikan kualifikasi yang lain adalah 28 atau 29 orang.

8. Persamaan yang digunakan adalah $x = \mu + z\sigma$.

Untuk peserta didik pertama: $88 = \mu + 0,8\sigma$ (1).

Untuk peserta didik kedua: $64 = \mu + 0,4\sigma$ (2).

Dari persamaan (1) dan (2), menghasilkan rata-rata $\mu = 40$ dan simpangan baku $\sigma = 60$. Jadi, rata-ratanya adalah 40 dan nilai standarnya adalah 60.

Uji Kompetensi Bab 4

A. Kebenaran dari Pernyataan

No.	Pembahasan Pernyataan	B	S								
1.	X bernilai 1 sampai 6 merupakan nilai diskret. Nilai peluang setiap mata dadu adalah $\frac{1}{6}$ sehingga $P(X = 4) = \frac{1}{6}$.	X									
2.	Misalkan H = Hijau dan P = Putih. $n(S) = C_2^{10} = 45$. $X = 0$ jika kejadian (PP) terjadi, maka $P(X = 0) = \frac{C_0^6 \cdot C_2^4}{45} = \frac{6}{45}$. $X = 1$ jika kejadian (HP) terjadi, maka $P(X = 1) = \frac{C_1^6 \cdot C_1^4}{45} = \frac{24}{45}$. $X = 2$ jika kejadian (HH) terjadi, maka $P(X = 2) = \frac{C_2^6 \cdot C_0^4}{45} = \frac{15}{45}$. <table border="1" data-bbox="283 1462 900 1580"> <thead> <tr> <th>$X = x$</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <th>$P(X = x)$</th><td>$\frac{6}{45}$</td><td>$\frac{24}{45}$</td><td>$\frac{15}{45}$</td></tr> </tbody> </table>	$X = x$	0	1	2	$P(X = x)$	$\frac{6}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$	X	
$X = x$	0	1	2								
$P(X = x)$	$\frac{6}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$								
3.	$P(0 \leq x \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8} x \Big _0^2 = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$.	X									

No.	Pembahasan Pernyataan	B	S
4.	Misalkan p = peluang munculnya sisi gambar, q = peluang munculnya sisi angka, $n = 3$ dan $x = 2$. Peluang $p = \frac{1}{2}$ dan peluang $q = \frac{1}{2}$. $P(x) = C_x^n \cdot p^x q^{n-x}$. $P(x = 2) = C_2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.	x	
5.	Ubah variabel X yang berdistribusi normal menjadi variabel Z yang berdistribusi normal standar dengan rumus: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, diperoleh $z_1 = \frac{20 - 25}{10} = -0,5$ dan $z_2 = \frac{38 - 25}{10} = 1,3$. $P(20 < X < 38) = P(-0,5 < Z < 1,3)$ $= P(-0,5 < Z < 0) + P(0 < Z < 1,3)$ $= P(0 < Z < 0,5) + P(0 < Z < 1,3)$ $= 0,1915 + 0,4032 = 0,5947$.		x

B. Alternatif Penyelesaian Soal Uraian

1. Tabel jumlah nomor bola yang mungkin terambil sebagai berikut.

x = Jumlah Nomor Bola		Kotak 1		
		2	4	6
Kotak 2	1	3	5	7
	2	4	6	8
	3	5	7	9

Jadi, $x = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2. $P(2 \leq x \leq 4) = \int_2^4 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8}x \Big|_2^4 = \frac{4-2}{8} = \frac{1}{4}$.
3. Peluang ($X = \text{benar}$) = 0,5 dan peluang ($X = \text{salah}$) = 0,5.

Fungsi peluang X :

$$P(X = x) = f(x) = C_x^4 (0,5)^x (0,5)^{4-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$P(X = 2) = f(2) = C_2^4 (0,5)^2 (0,5)^2 = 0,375.$$

Jadi, peluang seorang siswa menjawab 2 soal benar adalah 0,375.

4. Diketahui:

$$\mu = 5.000, \sigma = 1.200, x_1 = 3.400, \text{ dan } x_2 = 6.500.$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{3.400 - 5.000}{1.200} = -1,33.$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{6.500 - 5.000}{1.200} = 1,25.$$

$$\begin{aligned} P(-1,33 < X < 1,25) &= P(Z < 1,25) - P(Z < -1,33). \\ &= 0,8944 - 0,0918 = 0,8026. \end{aligned}$$

Jadi, peluang angkutan umum menempuh jarak antara 3.400 km dan 6.500 km dalam 1 bulan adalah 0,8026.

5. Diketahui sebuah keluarga memiliki 4 anak.

- a. Peluang (p) memiliki satu anak laki-laki adalah $\frac{1}{2}$. Jika X adalah kejadian memiliki anak laki-laki, maka dengan distribusi binomial, diperoleh

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}, & P(X=3) &= \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}, \\ P(X=2) &= \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}, & P(X=4) &= \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Maka

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{15}{16}.$$

Jadi, peluang terdapat paling sedikit satu anak laki-laki adalah $\frac{15}{16}$.

- b. Peluang paling sedikit satu anak laki-laki dan satu anak perempuan (misalkan P) adalah

$$\begin{aligned} P &= 1 - P(\text{tanpa laki-laki}) - P(\text{tanpa perempuan}) \\ &= 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Jadi, peluang terdapat paling sedikit satu anak laki-laki dan satu anak perempuan adalah $\frac{7}{8}$.

6. Diketahui terdapat 2.000 keluarga dengan masing-masing memiliki 4 orang anak.

- a. Harapan banyaknya keluarga dengan paling sedikit 1 anak laki-laki adalah

$$2.000 \left(\frac{15}{16} \right) = 1.875.$$

- b. Harapan banyaknya keluarga dengan 2 anak laki-laki adalah

$$2.000 \times P(2 \text{ laki-laki}) = 2.000 \left(\frac{3}{8} \right) = 750.$$

- c. $P(1 \text{ atau } 2 \text{ perempuan}) = P(1 \text{ perempuan}) + P(2 \text{ perempuan}) = \frac{5}{8}.$

Harapan banyaknya keluarga dengan 1 atau 2 anak perempuan adalah

$$2.000 \left(\frac{5}{8} \right) = 1.250.$$

- d. Harapan banyaknya keluarga tanpa anak perempuan adalah

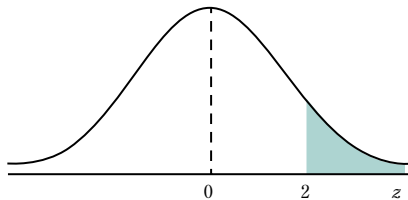
$$2.000 \left(\frac{1}{16} \right) = 125.$$

7. Diketahui $\mu = 60$ dan $\sigma = 10$.

- a. Cara menentukan persentase siswa yang mendapat A jika nilai ≥ 80 adalah sebagai berikut.

$$z = \frac{80 - 60}{10} = 2.$$

Perhatikan Gambar 4.14.



Gambar 4.14 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z \geq 2)$

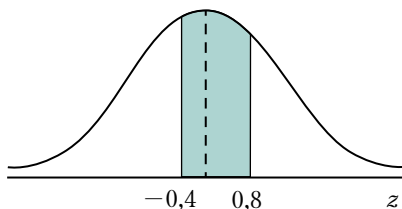
$$\begin{aligned} P(X \geq 80) &= P(Z \geq 2) \\ &= 1 - P(Z < 2) \\ &= 1 - 0,9772 \\ &= 0,0228 = 2,28\%. \end{aligned}$$

Jadi, persentase siswa yang mendapat A adalah 2,28%.

- b. Cara menentukan persentase siswa yang mendapat nilai C jika nilai C terletak pada interval $56 \leq C \leq 68$ adalah sebagai berikut.

$$z_1 = \frac{(56 - 60)}{10} = -0,4 \text{ dan } z_2 = \frac{68 - 60}{10} = 0,8.$$

Perhatikan Gambar 4.15.



Gambar 4.15 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,4 \leq Z \leq 0,8)$

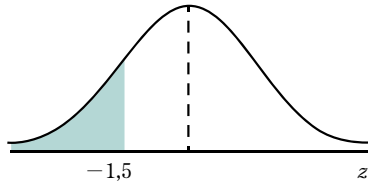
$$\begin{aligned} P(56 \leq X \leq 68) &= P(-0,4 \leq Z \leq 0,8) \\ &= P(Z < 0,8) - P(Z < -0,4) \\ &= 0,7881 - 0,3446 \\ &= 0,4435 = 44,35\%. \end{aligned}$$

Jadi, persentase siswa yang mendapat C adalah 44,35%.

- c. Cara menentukan persentase siswa yang mendapat nilai E jika nilai < 45 adalah sebagai berikut.

$$z = \frac{45 - 60}{10} = -1,5.$$

Perhatikan Gambar 4.16.



Gambar 4.16 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,5)$

$$\begin{aligned} P(X < 45) &= P(Z < -1,5) \\ &= 0,0668 \\ &= 6,68\%. \end{aligned}$$

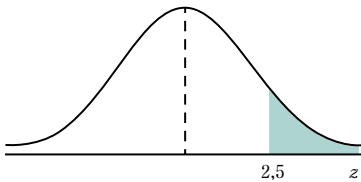
Jadi, persentase siswa yang mendapat nilai E adalah 6,68%.

- d. Jadi, nilai harapannya adalah $E(X) = \mu = 60$.
8. Diketahui $\mu = 60$ dan $\sigma = \sqrt{64} = 8$.
- a. Nilai A didapatkan jika nilai peserta adalah $X \geq 80$.

Ambil $x = 80$ sehingga diperoleh

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 60}{8} = \frac{5}{2} = 2,50.$$

Perhatikan Gambar 4.17.



Gambar 4.17 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 2,50)$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} P(X \geq 80) &= P(X > 80) \\ &= P(Z > 2,50) \\ &= P(Z > 0) - P(0 < Z < 2,50) \\ &= 0,5 - 0,4938 = 0,0062. \end{aligned}$$

Jadi, peluang peserta yang dipilih memperoleh nilai A adalah 0,0062.

- b. Nilai B didapatkan jika nilai peserta berada pada interval $65 \leq X < 80$.

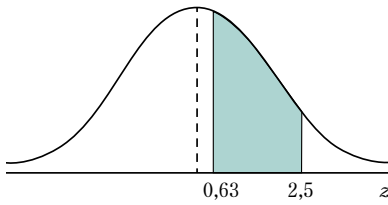
Ambil $x_1 = 65$ dan $x_2 = 80$ sehingga

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{65 - 60}{8} = \frac{5}{8} \approx 0,63;$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 60}{8} = \frac{5}{2} = 2,50.$$

Perhatikan Gambar 4.18.

Dengan demikian, diperoleh



Gambar 4.18 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(0,63 < Z < 2,50)$

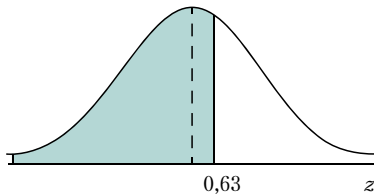
$$\begin{aligned} P(65 \leq X < 80) &= P(65 < X < 80) \\ &= P(0,63 < Z < 2,50) \\ &= P(Z < 2,50) - P(Z < 0,63) \\ &= 0,9938 - 0,7357 \\ &= 0,2581. \end{aligned}$$

Jadi, peluang peserta yang dipilih memperoleh nilai B adalah 0,2581.

- c. Nilai peserta yang mengikuti ujian perbaikan yaitu $X < 65$.

Ambil $x = 65$ sehingga diperoleh $z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{65 - 60}{8} = \frac{5}{8} \approx 0,63$.

Perhatikan Gambar 4.19.



Gambar 4.19 Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < 0,63)$

$$\begin{aligned} P(X < 65) &= P(Z < 0,63) \\ &= 0,7357. \end{aligned}$$

Jadi, peluang peserta yang dipilih mengikuti ujian perbaikan adalah 0,7375.

I. Tindak Lanjut

1. Strategi Tindak Lanjut yang Terdiferensiasi

Guru perlu memberikan perlakuan yang berbeda berdasarkan capaian peserta didik sebagai tindak lanjut dari materi Analisis Data dan Peluang, yang meliputi variabel acak, variabel acak diskret dan kontinu, fungsi peluang, distribusi binomial, dan distribusi normal, dengan tetap berpegang pada prinsip Pembelajaran Mendalam (*berkesadaran, bermakna, dan menggembirakan*).

Bagi peserta didik yang telah memenuhi tujuan pembelajaran, guru dapat memberikan tantangan lanjutan dalam bentuk soal-soal yang lebih kompleks dan proyek mini yang menuntut kemampuan berpikir tingkat tinggi (HOTS) seperti berikut:

- menganalisis permasalahan kontekstual, misalnya data pengukuran kesehatan (berat badan, kadar hemoglobin, atau suhu tubuh) atau

performa kendaraan (konsumsi bahan bakar atau kecepatan rata-rata), lalu menyusun model distribusi peluang diskret maupun kontinu dari data tersebut;

- ▶ membuat estimasi dan interpretasi peluang dari distribusi normal dalam konteks data yang tidak eksplisit, misalnya menaksir skor peserta didik dalam ujian atau memprediksi waktu layanan pelanggan.

Melalui kegiatan ini, peserta didik didorong untuk merenungkan proses berpikir mereka, menilai pendekatan yang digunakan, dan mengembangkan strategi pemecahan masalah berbasis data. Proses ini memperkuat pembelajaran yang *berkesadaran*.

Untuk menjadikan pembelajaran lebih *bermakna*, peserta didik diajak mengaitkan konsep dengan kehidupan sehari-hari. Misalnya, membuat laporan reflektif tentang peluang munculnya pola tertentu dalam permainan dadu, atau peluang waktu tempuh perjalanan saat jam sibuk.

Pembelajaran juga dibuat *menggembirakan* melalui aktivitas berikut ini.

- ▶ Proyek mini: eksperimen peluang, yaitu peserta didik mendesain eksperimen sendiri (misalnya simulasi melempar koin dengan perangkat digital) dan mengomunikasikan hasilnya.
- ▶ Simulasi distribusi binomial dan normal dengan visualisasi grafik menggunakan aplikasi spreadsheet atau kalkulator grafik.
- ▶ Bagi peserta didik yang belum memenuhi tujuan pembelajaran, tindak lanjut diberikan untuk memperkuat pemahaman mendasar melalui bimbingan terstruktur dan pendekatan yang lebih konkret.
- ▶ Peserta didik diberi kesempatan untuk merekonstruksi ulang pemahaman konsep variabel acak dan fungsi peluang dengan alat bantu manipulatif seperti tabel, diagram pohon, atau simulasi digital sederhana (misalnya menggunakan *spinner* atau kartu warna).
- ▶ Guru memberikan latihan berjenjang, mulai dari membuat daftar ruang sampel hingga menghitung peluang sederhana (contoh: peluang mengambil bola merah dari kantong atau peluang muncul dua angka dari lemparan dadu).
- ▶ Aktivitas didesain agar peserta didik merefleksikan kesalahan umum, seperti keliru membedakan antara peluang dan frekuensi relatif, atau

tidak memahami syarat fungsi peluang (jumlah = 1), dengan bimbingan dan umpan balik bertahap.

Untuk membuat proses ini bermakna, guru mengajak peserta didik menghubungkan pembelajaran dengan konteks nyata dan dekat seperti berikut ini.

- ▶ Peluang datang tepat waktu ke sekolah jika rute dan moda transportasi berbeda-beda.
- ▶ Eksperimen menggunakan *stopwatch* untuk mengukur waktu yang dibutuhkan menyelesaikan tugas tertentu, lalu mendiskusikan data waktu sebagai variabel acak kontinu.
- ▶ Kegiatan didesain tetap *menggembirakan*, misalnya dengan
- ▶ permainan interaktif kelompok yang melibatkan peran (sebagai dadu, pencatat data, dan penafsir hasil);
- ▶ *mini challenge* atau kuis reflektif berbasis cerita atau masalah nyata yang menarik.

Dengan strategi tindak lanjut yang terdiferensiasi ini, semua peserta didik, baik yang sudah memahami maupun yang masih dalam proses belajar dan perlu dukungan, dapat memperoleh pengalaman belajar yang menyeluruh, relevan, dan menyenangkan dalam memahami konsep analisis data dan peluang. Mereka diharapkan dapat memperoleh kompetensi matematika menggunakan pendekatan yang dibedakan berdasarkan Pembelajaran Mendalam.

2. Pengayaan

Bagian pengayaan ini dirancang untuk mendorong peserta didik melampaui batas-batas teori dan latihan rutin, serta menumbuhkan keterampilan literasi data yang relevan dengan kehidupan nyata. Dalam kegiatan ini, peserta didik diajak untuk mengeksplorasi data terbuka dari sumber resmi, mengolahnya secara mandiri dan merefleksikan temuannya dalam konteks distribusi normal. Kegiatan ini bertujuan memperkuat pemahaman konsep rata-rata, simpangan baku, dan *Z-score*, serta mengembangkan keterampilan berpikir kritis, kolaboratif, dan reflektif. Guru diharapkan menjadi fasilitator yang membuka ruang eksplorasi, membimbing proses berpikir, serta mendorong diskusi bermakna di kelas.

Dengan pendekatan yang berkesadaran, bermakna, dan menyenangkan, guru dapat membantu peserta didik menyadari bahwa matematika hadir dalam kehidupan sehari-hari dan menjadi alat penting untuk memahami dunia. Pada kegiatan ini, guru dapat mengarahkan peserta didik untuk mengikuti langkah-langkah berikut ini.

a. Persiapan

Peserta didik diminta untuk mengakses situs data dan memilih kumpulan data numerik berkelanjutan. Contoh tampilan situs penyedia data terbuka yang dapat diakses ialah <https://data.go.id/>.

b. Eksplorasi Data

Peserta didik mengunduh data dan menjelaskan konteks data. Guru dapat memberikan pertanyaan pemantik untuk memahami isi kumpulan data, misalnya terkait apa yang diukur, satuan, atau populasinya.

c. Pengolahan

Peserta didik melakukan perhitungan dan visualisasi. Guru dapat memandu cara menghitung rata-rata, simpangan baku, dan membuat histogram.

d. Analisis

Peserta didik menganalisis kesesuaian pola distribusi dengan distribusi normal standar. Guru dapat mengarahkan peserta didik untuk membandingkan histogram dengan kurva normal, kemudian menghitung *Z-score*.

e. Refleksi

Peserta didik menyimpulkan temuan dan menyajikan hasil. Guru memberikan pertanyaan reflektif dan mendorong diskusi kelompok atau presentasi.

Pada kegiatan pengayaan, guru dapat melakukan diferensiasi pembelajaran untuk memfasilitasi keberagaman peserta didik dan memberikan strategi yang tepat seperti berikut ini.

- a. Profil Peserta didik: Pemula (belum terbiasa mengakses data)
- b. Strategi: Guru memberikan contoh kumpulan data siap pakai dan membimbing langkah demi langkah.
- c. Profil Peserta didik: Menengah (terbiasa dengan *spreadsheet*)

- d. Strategi: Peserta didik memilih data sendiri, lalu bekerja secara berpasangan.
- e. Profil Peserta Didik: Mahir (terampil menganalisis data)
- f. Strategi: Peserta didik diminta untuk berdiskusi dan melakukan presentasi. Peserta didik kemudian melakukan refleksi mendalam tentang keterbatasan data.

J. Refleksi

Pencapaian Pembelajaran Mendalam sebagian besar didukung oleh refleksi pembelajaran, khususnya terkait dengan materi Analisis Data dan Peluang. Refleksi memungkinkan peserta didik untuk secara aktif (*berkesadaran*) menilai proses pembelajaran, memahami relevansi konsep dengan kehidupan sehari-hari (*bermakna*), dan mengidentifikasi pengalaman belajar yang menyenangkan dan menginspirasi (*menggembirakan*). Selain mendorong kemajuan berkelanjutan dalam memahami konsep peluang secara utuh dan kontekstual, refleksi ini berupaya untuk meningkatkan kesadaran akan pencapaian dan masalah pembelajaran.

1. Refleksi untuk Peserta Didik

Guru dapat mengarahkan peserta didik untuk melakukan refleksi mandiri dengan menjawab pertanyaan pada Buku Siswa. Berikut ini merupakan alternatif refleksi lainnya yang dapat dijawab setiap peserta didik secara mandiri.

- a. Apa saja strategi belajar yang kalian gunakan untuk memahami analisis data dan peluang? Apakah semua strateginya sudah membantu untuk belajar secara optimal?
- b. Kendala apa saja yang dapat kalian selesaikan untuk mempelajari materi analisis data dan peluang?
- c. Bagaimana kalian melihat konsep analisis data dan peluang diterapkan dalam tindakan dan pengalaman kalian sehari-hari?
- d. Mengapa penting untuk memahami materi analisis data dan peluang dalam kehidupan nyata?
- e. Apakah materi analisis data dan peluang ini menjadikan kalian berpikir lebih kritis dan berpikir lebih kreatif? Coba jelaskan.

- f. Pada materi analisis data dan peluang, kegiatan pembelajaran manakah yang membuat kalian menyukainya? Apa alasannya?
- g. Bagaimana perasaan kalian saat melakukan permainan atau eksperimen berdasarkan materi analisis data dan peluang?

2. Refleksi untuk Guru

a. *Mindful* (Berkesadaran)

- ▶ Apakah saya telah memberikan cukup kesempatan kepada peserta didik untuk menyelidiki dan mendiskusikan materi analisis data dan peluang secara bermakna dan mandiri?
- ▶ Apa saja tanda bahwa peserta didik tidak hanya menghafal rumus, tetapi juga benar-benar memahami materi analisis data dan peluang?
- ▶ Apa kendala terbesar yang saya alami saat mengajarkan materi analisis data dan peluang ini. Bagaimana saya mengatasinya?

b. *Meaningful* (Bermakna)

- ▶ Apakah saya telah berhasil menghubungkan antara konsep analisis data dan peluang dengan masalah kontekstual yang dapat dipahami dengan mudah oleh peserta didik?
- ▶ Bagaimana reaksi peserta didik saat diminta menggunakan konsep analisis data dan peluang untuk menganalisis masalah nyata?
- ▶ Apakah pembelajaran analisis data dan peluang oleh peserta didik menumbuhkan kemampuan berpikir mereka ke arah berpikir kritis, kreatif, dan reflektif?

c. *Joyful* (Menggembirakan)

- ▶ Pendekatan apa yang menurut peserta didik paling menyenangkan saat mempelajari materi analisis data dan peluang?
- ▶ Apakah lingkungan belajar terasa aktif dan menyenangkan di kelas? Bagaimana saya mengetahuinya?
- ▶ Bagaimana saya dapat terus membuat latihan matematika yang menyenangkan tanpa mengorbankan kedalaman pemahaman?

3. Alur Menindaklanjuti Hasil Refleksi

Langkah awal dalam menindaklanjuti hasil refleksi adalah dengan mengumpulkan data refleksi, misalnya melalui jurnal belajar peserta didik. Selanjutnya, guru perlu mengidentifikasi pola atau tantangan yang muncul, seperti kesulitan dalam memahami konsep, penggunaan strategi belajar yang kurang tepat, atau rendahnya motivasi belajar. Berdasarkan identifikasi tersebut, guru dapat merancang intervensi yang sesuai, seperti memberikan *mini lesson*, pendampingan melalui tutor sebaya, atau merancang proyek kontekstual. Intervensi ini kemudian diimplementasikan pada pertemuan berikutnya sesuai dengan kebutuhan peserta didik. Setelah itu, guru melakukan evaluasi efektivitas intervensi dengan membandingkan hasil belajar sebelum dan sesudah perlakuan. Terakhir, guru melakukan refleksi ulang untuk meninjau apakah strategi yang diterapkan sudah tepat atau masih perlu diperbaiki dan disesuaikan agar pembelajaran semakin optimal.

K. Sumber Belajar

Berikut ini daftar buku yang dapat dijadikan sebagai alternatif referensi dalam kegiatan pembelajaran Bab 4.

1. Herrhyanto, N. dan Tuti Gantini. *Pengantar Statistika Matematis*. Bandung: Yrama Widya, 2009.
2. Kadir. *Statistika Terapan*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada, 2015.
3. Spiegel, M.R. *Statistika Edisi Kedua*. Diterjemahkan oleh I Nyoman Susila dan Ellen Gunawan. Jakarta: Erlangga, 1996.
4. Subanar. *Statistika Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2013.
5. Sudjana. *Metoda Statistika*. Bandung: PT. Tarsito, 2005.
6. Susiswo. *Teori Peluang*. Malang: UM Press, 2009.
7. Walpole, R.E. *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama, 1992.
8. Walpole, R.E. dan Raymond H. Myers. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Diterjemahkan oleh R.K. Sembiring. Bandung: Penerbit ITB, 1995.

Glosarium

asesmen	penilaian terhadap kompetensi peserta didik sepanjang proses pembelajaran dan pada akhir pembelajaran
asimtot	sebuah garis yang sedemikian rupa sehingga jarak antara kurva dan garis tersebut mendekati nol seiring x atau y (salah satu atau keduanya) mendekati tak hingga
aturan rantai	kaidah menurunkan suatu fungsi komposisi
Dimensi Profil Lulusan	kompetensi utuh yang harus dimiliki oleh peserta didik setelah menyelesaikan proses pembelajaran yang terdiri atas Keimanan dan Ketakwaan terhadap Tuhan YME, Kewargaan, Penalaran Kritis, Kreativitas, Kolaborasi, Kemandirian, Kesehatan, dan Komunikasi
distribusi binomial	distribusi suatu fungsi peluang dari n kali percobaan yang menghasilkan dua peluang saling bebas yang bernilai tetap dalam setiap percobaan
distribusi normal	distribusi peluang kontinu yang penting dalam analisis statistik parametrik
elips	himpunan titik-titik yang jaraknya terhadap dua titik tertentu selalu sama. Kedua titik tertentu tersebut adalah titik fokus.
fungsi aljabar	fungsi yang terdiri atas fungsi polinomial, fungsi rasional, dan fungsi akar
fungsi distribusi	suatu fungsi yang berhubungan dengan peluang suatu kejadian yang terdefinisikan dalam variabel acak
fungsi kontinu	fungsi yang terdefinisi dalam domainnya dan mempunyai limit yang bernilai sama dengan nilai fungsinya
fungsi peluang	suatu fungsi yang berhubungan dengan peluang suatu kejadian dengan syarat nilai fungsinya tak negatif dan fungsi kumulatifnya sama dengan 1
fungsi trigonometri	fungsi yang terdiri atas bentuk trigonometri, seperti sinus, kosinus, dan tangen

garis singgung	garis lurus yang menyinggung sebuah kurva pada sebuah titik
integral	antiturunan
Jumlahan Riemann	salah satu cara menentukan integral tentu
kedudukan garis	kedudukan suatu garis terhadap lingkaran (menyinggung, memotong, atau tidak menyinggung dan tidak memotong)
kedudukan titik	kedudukan suatu titik terhadap lingkaran (di luar, di dalam, atau dilalui)
kejadian	kumpulan dari satu atau lebih hasil suatu percobaan
kemiringan	koefisien arah suatu garis lurus
kompetensi	kemampuan peserta didik sebagai hasil dari proses pembelajaran
kosinus	kosinus suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi yang berseberangan dan sudut itu terhadap hipotenusa
<i>latus rectum</i>	garis yang melalui titik fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor pada elips
limit	pendekatan
lingkaran	tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap titik pusat
nilai maksimum	nilai fungsi saat mencapai titik maksimum
nilai minimum	nilai fungsi saat mencapai titik minimum
peluang	suatu nilai yang menyatakan kemungkinan terjadinya suatu kejadian
persamaan	kalimat matematika yang dihubungkan dengan tanda sama dengan (=)
ruang sampel	himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan
sinus	sinus suatu sudut merupakan perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut dan hipotenusa pada segitiga siku-siku.
sumbu fokal	garis lurus yang menghubungkan kedua titik fokus elips
sumbu mayor	diameter terpanjang elips; garis yang melalui pusat dan kedua fokus elips dan berakhir pada titik terjauh elips terhadap pusatnya

sumbu minor	diameter terpendek elips; garis yang melalui pusat dan berakhir pada titik terdekat elips terhadap pusatnya
tangen	tangen suatu sudut merupakan perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut dan sisi mendarat di samping sudut itu pada segitiga siku-siku.
titik balik maksimum	salah satu titik stasioner dengan ciri kurva cekung ke bawah sehingga pada titik tersebut kurva berubah dari naik menjadi turun
titik balik minimum	salah satu titik stasioner dengan ciri kurva cekung ke atas sehingga pada titik tersebut kurva berubah dari turun menjadi naik
titik belok	salah satu titik stasioner yang mengakibatkan adanya perubahan kurva dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau sebaliknya
titik potong	suatu titik hasil perpotongan garis atau kurva
titik stasioner	suatu titik yang berhenti dari naik atau turun, disebut juga titik diam
tujuan pembelajaran	kompetensi yang diharapkan dimiliki oleh peserta didik setelah mempelajari suatu materi
turunan	laju perubahan nilai suatu fungsi terhadap variabelnya
uji turunan	salah satu pengujian turunan pertama dan kedua dalam aplikasi turunan
variabel acak	suatu fungsi yang memetakan setiap titik pada ruang sampel terhadap bilangan real
variabel	karakteristik yang menunjukkan variasi atau sesuatu yang nilainya berubah-ubah

Daftar Pustaka

- Achmad, A. *Modul Pembelajaran SMA: Matematika Peminatan*. Jakarta: Kemdikbud, 2020.
- Adam, L.J. & White, P. *Analytic Geometry and Calculus*. New York: Oxford University Press, 1968.
- Ayers, F. dan Ault. *Kalkulus Edisi Kedua*. Diterjemahkan oleh Lea Prasetyo. Jakarta: Erlangga, 1990.
- Baisuni, H. *Kalkulus*. Jakarta: Universitas Indonesia, 2005.
- Bittinger, M.L., D.J. Ellenbogen, dan Scott J. Surgent. *Calculus and its Applications Tenth Edition*. Boston: Pearson Education, 2012.
- Danuri, M. *Pembelajaran Lingkaran SMA dengan Geometri Analitik*. Yogyakarta: P4TK Matematika, 2008.
- Dumairy. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta, 2012.
- Herrhyanto, N. dan Tuti Gantini. *Pengantar Statistika Matematis*. Bandung: Yrama Widya, 2009.
- Huberman, M., C. Bitter, J. Anthony, dan J. O'Day. *The Shape of Deeper Learning: Strategies, Structures, and Cultures in Deeper Learning Network High Schools. Findings from the Study of Deeper Learning Opportunities and Outcomes: Report 1*. American Institutes for Research, 2014.
- Kadir. *Statistika Terapan*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada, 2015.
- Kemendikdasmen Republik Indonesia. Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Nomor 046/H/KR/2025 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah. https://kurikulum.kemendikdasmen.go.id/file/1753929861_manage_file.pdf Jakarta: Kemendikdasmen RI, 2025.
- Kemendikdasmen Republik Indonesia. Peraturan Menteri Pendidikan Dasar dan Menengah Republik Indonesia Nomor 13 Tahun 2025 tentang Perubahan Atas Peraturan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Nomor 12 Tahun 2024 tentang Kurikulum pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah. Jakarta: Kemendikdasmen RI, 2025.
- Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. *Sejarah dan Filsafat Matematika*. Jakarta: Kementerian pendidikan dan kebudayaan, 2018.

- Leithold, L. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Diterjemahkan oleh Hutahaean. Jakarta: Erlangga, 1988.
- Mauladaniyati, R. dan Widodo. *Geometri Analitik Ruang*. Yogyakarta: Matematika, 2020.
- Mursita, D. *Matematika untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains, 2011.
- Nursiyono, J.A. dan Jamik Safitri. *Mengenal Integral Lebih Dekat*. Bogor: In Media, 2014.
- Pinem, D. *Kalkulus untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains, 2015.
- Pradyumnati, R.M. *Irisan Kerucut: Pengayaan Matematika SMA*. Lampung: UIN Raden Intan.
- Presiden Republik Indonesia. Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 75 Tahun 2019 tentang Peraturan Pelaksanaan Undang-Undang Nomor 3 Tahun 2017 tentang Sistem Perbukuan. Jakarta: Kementerian Sekretariat Negara Republik Indonesia, 2019.
- Purcell, E.J. dan Dale Varberg. *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2005.
- Quinn, J., Joanne McEachen, Michael Fullan, Mag Gardener, dan Max Drummy. *Dive into Deep Learning: Tools for Engagement*. California: Corwin Press, 2019.
- Rizki, N.A. *Geometri Analitik*. Samarinda: Universitas Mulawarman, 2018.
- Simangunsong, W. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga, 2005.
- Spiegel, M.R. *Statistika Edisi Kedua*. Diterjemahkan oleh I Nyoman Susila dan Ellen Gunawan. Jakarta: Erlangga, 1996.
- Stewart, J. *Multivariable Calculus*. California: Brook Cole Cengage, 2012.
- Stewart, J. *Single Variable Calculus: Concepts and Contexts, Enhanced Edition*. California: Brook Cole Cengage, 2018.
- Strang, Gilbert dan Edwin “Jed” Herman. “Integrals Involving Exponential and Logarithmic Functions.” *LibreTexts™ Mathematics*. 18 Januari 2025. <https://math.libretexts.org/@go/page/2516>.
- Subanar. *Statistika Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2013.
- Sudjana. *Metoda Statistika*. Bandung: PT. Tarsito, 2005.
- Sukmadewi, T.S. *Modul Matematika Umum Kelas XI KD 3.10*. Jakarta: Direktorat Jenderal PAUD, DIKDAS, dan DIKMEN, 2020.
- Sunardi dan Erfan Yudianto. *Teori dan Soal-soal Geometri Analitika Bidang*. Jember: Unej, 2015.

- Susiswo. *Teori Peluang*. Malang: UM Press, 2009.
- Suyitno, A. *Guru Pembelajar: Modul Matematika SMA Kelompok Kompetensi E*. Jakarta: Direktorat Jendral Guru dan Tenaga Kependidikan, 2016.
- Tim Penyusun. Naskah Akademik Pembelajaran Mendalam Menuju Pendidikan Bermutu untuk Semua. Jakarta: Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Republik Indonesia, 2025.
- Varberg, D., E.J. Purcell, dan S.E. Rigdon. *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2010.
- Walpole, R.E. dan Raymond H. Myers. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB, 1986.
- Walpole, R.E. *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama, 1992.
- Wardiman. *Hitung Integral*. Yogyakarta: Hanindita, 1982.
- Yahya, Yusuf, D. Suryadi H.S., dan Agus S. *Matematika Dasar Perguruan Tinggi*. Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia, 2012.
- Yunita, A. dan Hamdunah. *Modul Geometri Analitik*. Padang: Rumahkayu Pustaka Utama, 2017.

Indeks

A

aplikasi turunan 96, 129, 289
asesmen xii, 18, 19, 60, 93, 132, 164,
204, 205, 222, 259, 287
asimtot 287
aturan pangkat 112, 113, 180
aturan rantai 114, 170, 287

C

capaian pembelajaran xii, 7, 17

D

diameter 30, 31, 63, 76, 288, 289
diskriminan 45, 46, 47, 48, 49, 53, 78,
79, 80, 82
distribusi binomial 10, 12, 14, 228,
230, 232, 250, 251, 252, 253, 260,
277, 280, 281, 287
distribusi normal 10, 12, 14, 226, 229,
230, 254, 255, 257, 258, 260, 272,
273, 274, 280, 281, 282, 283, 287
distribusi peluang 8, 11, 226, 228,
232, 244, 245, 247, 248, 251, 259,
260, 267, 281, 287

E

eksponensial 10, 12, 96, 112, 119, 120
elips 7, 9, 10, 11, 12, 13, 22, 24, 25, 26,
27, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42,
43, 60, 61, 69, 70, 71, 72, 73, 74,
75, 76, 87, 90, 91, 92, 93, 287, 288,
289
extended abstract 100, 102, 173, 174

F

flipped classroom 16, 17, 19
formatif xiii, 3, 16, 18, 19, 20, 25, 26,
53, 55, 230, 231
fungsi aljabar 13, 96, 112, 132, 170,
287
fungsi densitas peluang 14, 247, 249,
260
fungsi diam 96, 120, 123, 124, 126, 145

fungsi distribusi 251, 253, 255, 287
fungsi eksponensial 96, 112, 119, 120
fungsi kontinu 8, 96, 110, 195, 287
fungsi naik 96, 120, 123, 145, 146, 157
fungsi peluang 8, 10, 11, 12, 14, 226,
230, 231, 244, 245, 247, 250, 251,
254, 259, 265, 266, 267, 280, 281,
282, 287
fungsi polinomial 10, 12, 287
fungsi trigonometri 8, 96, 107, 108,
109, 112, 117, 132, 287
fungsi turun 96, 120, 123, 145, 146,
156, 157

G

garis lurus 111, 288
garis sekan 110, 111
garis singgung 7, 10, 11, 12, 13, 22,
23, 24, 25, 26, 27, 43, 45, 50, 51,
52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60,
61, 81, 83, 89, 91, 92, 93, 96, 97,
98, 104, 120, 121, 122, 123, 129,
140, 141, 142, 143, 144, 145, 170,
288
garis singgung lingkaran 7, 13, 22,
23, 24, 25, 26, 27, 43, 45, 50, 51,
52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60,
61, 83, 91, 92, 93
garis tangen 110, 111, 120, 121
geometri analitik 23, 24, 98

H

HOTS 3, 91, 93, 164, 222, 280

I

integral 8, 10, 11, 12, 13, 14, 97, 168,
169, 170, 171, 172, 173, 174, 176,
177, 178, 179, 180, 181, 182, 185,
186, 189, 190, 191, 192, 193, 194,
195, 196, 200, 204, 205, 206, 216,
217, 219, 220, 221, 222, 227, 288
integral tak tentu 13, 168, 170, 176,
179, 180, 205, 216, 219, 220

integral tentu 14, 168, 170, 185, 189,
190, 191, 192, 194, 200, 205, 206,
216, 217, 222, 227, 288

J

jari-jari 29, 30, 31, 32, 33, 62, 66, 67,
68, 82, 87, 88, 90, 91, 107, 139, 218

Jumlahan Riemann 185, 187, 188,
190, 191, 196, 209, 210, 217, 288

K

kalkulus 10, 12, 97, 113, 128, 129,
168, 169, 178, 185, 192, 205

kedudukan garis 45, 47, 84, 288

kejadian 8, 227, 228, 230, 244, 248,
249, 250, 252, 260, 275, 277, 287,
288

kemiringan 23, 53, 54, 55, 81, 97, 98,
110, 111, 121, 122, 123, 126, 143,
144, 288

kerangka pembelajaran xii, xiii, 4,
23, 98

kognitif 4, 10, 19, 20, 26, 60, 105, 132,
174, 204, 230, 231, 254, 259

kompetensi iv, xiii, xiv, 2, 3, 4, 10, 11,
19, 20, 26, 60, 92, 131, 162, 163,
204, 219, 220, 259, 282, 287, 288,
289

komposisi fungsi 114

kontinuitas fungsi 110

koordinat Kartesius 23, 26, 186, 198,
199

kosinus 23, 287, 288

kurva normal 254, 255, 283

L

latus rectum 36, 39, 41, 70, 288

limit 8, 11, 13, 96, 98, 99, 104, 105,
106, 107, 108, 109, 112, 117, 135,
187, 192, 195, 287, 288

limit fungsi 96, 99, 104, 105, 107, 108,
109, 112, 117

limit fungsi trigonometri 107, 108, 109

lingkaran 7, 9, 10, 11, 12, 13, 22, 23,
24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33,
34, 35, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49,

50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58,
59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68,
76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84,
85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93,
107, 108, 186, 288

LOTS 3

luas bidang datar 199

M

multistruktural 20, 27, 101, 174, 231

N

nilai balik maksimum 96, 120, 151,
157

nilai balik minimum 96, 120, 151,
156, 157

nilai harapan 10, 12, 226, 250, 253,
254, 257, 258, 260, 269, 270

nonkognitif 19, 26, 230, 254

P

peluang 8, 10, 11, 12, 14, 172, 226,
227, 228, 229, 230, 231, 232, 233,
236, 239, 240, 244, 245, 246, 247,
248, 249, 250, 251, 252, 254, 256,
257, 259, 260, 263, 264, 265, 266,
267, 268, 270, 271, 273, 275, 276,
277, 279, 280, 281, 282, 284, 285,
287, 288

Pembelajaran Mendalam xiv, 2, 3, 4,
5, 6, 16, 26, 91, 92, 93, 102, 163,
164, 173, 220, 221, 231, 280, 282,
284, 292, 297

penerapan integral 170

persamaan elips 7, 13, 22, 26, 27, 35,
36, 37, 38, 40, 42, 61, 69, 70, 71,
75, 87, 90

persamaan garis singgung lingkaran
7, 13, 22, 26, 27, 43, 45, 50, 51, 52,
53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 83, 93

persamaan lingkaran 7, 10, 11, 12,
13, 22, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33,
34, 46, 47, 48, 49, 54, 56, 58, 59,
60, 61, 63, 64, 66, 68, 77, 78, 79,
80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 91
prastruktural 27, 100, 101, 173, 231

Profil Lulusan v, xii, 4, 6, 7, 12, 287

R

rata-rata xiii, 10, 12, 19, 26, 100, 101, 110, 111, 112, 254, 255, 270, 272, 275, 281, 282, 283

relasional 100, 102, 174

ruang sampel 228, 235, 237, 238, 239, 242, 243, 244, 262, 264, 281, 288, 289

rubrik penilaian 20

rubrik penskoran xiii, 60, 62, 132, 134, 205, 207, 259, 261

S

sekan 110, 111

sifat limit 13, 98, 105, 106, 108, 109, 112, 117, 135

sifat turunan 112, 113, 117, 132, 180, 181

sinus 23, 287, 288

standar deviasi 254

sumatif xiii, 16, 19, 20, 25, 60, 131, 132, 204, 205, 259

sumbu mayor 38, 39, 40, 41, 42, 72, 73, 75, 76, 87, 88, 90, 288

sumbu minor 39, 40, 41, 42, 73, 75, 88, 90, 289

T

Taksonomi Bloom 11

Taksonomi SOLO 11, 26, 100, 173

tangen 23, 110, 111, 120, 121, 287, 289

Teorema Pythagoras 23, 30, 37, 90

titik balik maksimum 127, 128, 149, 151, 156, 289

titik balik minimum 127, 128, 149, 150, 151, 156, 289

titik belok 98, 127, 128, 129, 150, 289

titik ekstrem 96, 98, 120, 126, 127, 128, 129, 131, 133, 149, 150, 151, 152

titik fokus 39, 40, 69, 70, 71, 72, 73, 87, 287, 288

titik potong 23, 46, 48, 52, 64, 88, 122,

142, 143, 198, 199, 213, 214, 289

titik puncak 39, 40, 69, 70

titik pusat 29, 30, 31, 32, 36, 38, 39, 40, 42, 54, 62, 63, 66, 68, 69, 70, 71, 73, 75, 76, 81, 82, 88, 89, 144, 288

titik singgung 46, 56, 83, 84, 121, 122, 123, 144, 145

titik stasioner 133, 155, 156, 289

tujuan pembelajaran xii, xiv, 2, 15, 17, 19, 22, 23, 27, 28, 62, 91, 96, 97, 134, 162, 168, 171, 207, 219, 226, 227, 261, 280, 281, 289

turunan fungsi aljabar 13, 96, 112, 132, 170

turunan fungsi trigonometri 117, 132

U

uji turunan kedua 128, 129

uji turunan pertama 96, 120, 127, 129

unistruktural 20, 27, 100, 101, 173, 231

V

variabel acak 8, 10, 11, 12, 14, 226, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 259, 260, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 272, 280, 281, 282, 287, 289

variabel acak diskret 11, 14, 226, 232, 236, 237, 238, 239, 240, 244, 245, 246, 259, 260, 263, 264, 265, 266, 267, 280

variabel acak kontinu 14, 237, 241, 242, 243, 244, 247, 248, 249, 260, 282

varians 254, 255

Profil Pelaku Perbukuan

Profil Penulis

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sri Adi Widodo, M.Pd.
Email : sriadi@ustjogja.ac.id
Instansi : Universitas Sarjanawiyata
Tamansiswa
Alamat Instansi : Jl. Batikan, UH-III Jl. Tuntungan No.
1043, Tahunan, Kec. Umbulharjo, Kota
Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta 55167
Bidang Keahlian : Pembelajaran Matematika, Media Pembelajaran
Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

2009–sekarang Dosen Pendidikan Matematika Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. S-1 Pendidikan Matematika, Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Yogyakarta, tahun masuk 2001
2. S-2 Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret (UNS), Surakarta, tahun masuk 2008
3. S-3 Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, tahun masuk 2016

Judul Buku dan Tahun Terbit (4 Tahun Terakhir):

1. Matematika SMA/SMK Kelas XI, Penerbit Yudhistira (2022)
2. Metode Numerik Bahan Ajar dengan Pendekatan Problem Solving (2023)
3. Norma Sosiomatematis: Landasan Teoretis dan Praktis Penelitian, Penerbit Deepublish (2024)
4. Kemampuan Memecahkan Masalah Matematis: Suatu Konsep Dasar, Penerbit Deepublish (2025)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (1 Tahun Terakhir):

1. Lembar Kerja Digital Berbasis Ethno-Modelling Dan Tri-N Pada Pembelajaran Mendalam Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis Matematis Siswa (2025).
2. The effect of teaching props on the mathematical problem-solving skills: A meta-analysis study (2025)
3. Android-based Mathematics Learning Media on Geometry Using the Context of Tourist Destinations (2025).

Informasi Lain:

<https://scholar.google.com/citations?user=CobzRdUAAAAJ&hl=id>



Profil Penulis

Nama Lengkap : Dr. Wikan Budi Utami, M.Pd.
Email : wikanbudiutami@unikama.ac.id
Instansi : Universitas PGRI Kanjuruhan Malang
Alamat Instansi : Jl. S. Supriadi No. 48, Bandungrejosari,
Kec. Sukun, Kota Malang, Jawa Timur
65148
Bidang Keahlian : Desain Pembelajaran Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. 2012–2022 Dosen Pendidikan Matematika Universitas Pancasakti Tegal
2. 2022–sekarang Dosen Program Studi S-1 Pendidikan Matematika Universitas PGRI Kanjuruhan Malang

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. S-1 Pendidikan Matematika Universitas Pancasakti Tegal, tahun masuk 2006
2. S-2 Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta (UNS), tahun masuk 2010
3. S-3 Teknologi Pembelajaran Universitas Negeri Malang, tahun masuk 2022

Judul Buku dan Tahun Terbit (4 Tahun Terakhir):

1. Matematika SMA/SMK Kelas X (2022)
2. Matematika SMA/SMK Kelas XI (2022)
3. Matematika SMA/SMK Kelas XII (2023)
4. Analisis Numerik Bahan Ajar dengan Pendekatan *Problem Solving* (2023)
5. Trigonometri Kelas X Fase E (2024)
6. Desain dan Implementasi Pembelajaran Adaptif: Pada Pembelajaran Matematika Bermuatan Ethnomatematika (2025)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (3 Tahun Terakhir):

1. Penerapan Mobile Learning dalam Implementasi Kurikulum Merdeka sebagai Penguatan Profil Pelajar Pancasila (2023)
2. Pengembangan Modul *Microlearning* Berbasis Candi Singasari sebagai Pembelajaran Kearifan Lokal untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematika (2024)
3. Pengembangan Desain Pembelajaran Adaptif Bermuatan Ethnomatematika terhadap Kemampuan Literasi dan Pemecahan Masalah Matematika (2025)

Informasi Lain:

<https://scholar.google.com/citations?user=i4HqnqgAAAAJ&hl=id>



Profil Penulis

Nama Lengkap : Fitria Sulistyowati, M.Pd.
Email : fitria.sulistyowati@ustjogja.ac.id
Instansi : Universitas Sarjanawiyata
Tamansiswa
Alamat Instansi : Jl. Batikan, UH-III Jl. Tuntungan
No.1043, Tahunan, Kec. Umbulharjo,
Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta 55167
Bidang Keahlian : Media Pembelajaran dan Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. 2015–2018 Tentor Primagama Magelang
2. 2018–sekarang Dosen Program Studi S-1 Pendidikan Matematika Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. S-1 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Purworejo, tahun masuk 2010
2. S-2 Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta (UNS), tahun masuk 2016

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Siswa dan Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (2021)
2. Metode Numerik Bahan Ajar dengan Pendekatan *Problem Solving* (2023)
3. MODEL-MODEL PEMBELAJARAN: PRINSIP, KONSEP, DAN APLIKASI (2024)
4. BELAJAR DAN PEMBELAJARAN (2024)
5. Psikologi Pendidikan: Sebuah Pengantar (2025)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Game Pembelajaran Online Program Linear
2. Pengembangan Bank Soal High Order Thinking Skills Berbasis 3N pada Mata Kuliah Aljabar
3. Meta-Analysis Study: Effectiveness of Using GeoGebra on Students' Mathematical Ability (2025)
4. THE ANALYSIS OF POOR COMMUNICATION IMPACT ON STUDENTS'INTEREST IN LEARNING EXPONENT TOPIC (2025)

Informasi Lain:

<https://scholar.google.com/citations?hl=id&user=aVvthBgAAAAJ>



Profil Penulis

Nama Lengkap : Atiek Sandrawati, S.Pd.
Email : atieksandrawati29@guru.sma.belajar.id
Instansi : SMA Negeri 1 Karanganom
Alamat Instansi : Jl. Raya 3 Karanganom, Klaten
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. 2011–2012 Guru Matematika di SMA Tri Dharma, Ende, Flores
2. 2014–2020 Guru Matematika di SMAN CMBBS, Pandeglang, Banten
3. 2020–sekarang Guru Matematika di SMAN 1 Karanganom, Klaten, Jawa Tengah

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

S-1 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Semarang, tahun masuk 2006

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Bunga Rampai Merawat Sehat, Merawat Indonesia, Gapai Prestasi dengan Raga Bugar dan Bergizi (2023)
2. Bulan Guru (2024)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pendekatan Kolaboratif dengan Asesmen Estafet Matematika untuk Meningkatkan Kompetensi Sosial Emosional Siswa

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
Email : sunardi.fkip@unej.ac.id
Instansi : –
Alamat Instansi : FKIP Universitas Jember, Jl. Kalimantan
No. 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Dosen Program Studi S-1, S-2, dan S-3 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (1982–2024)
2. Dosen Program Studi Magister Pendidikan Dasar dan Pendidikan Matematika UT (2010–sekarang)
3. Dosen Penguji Disertasi S-3 Program Studi Pendidikan Matematika di UM, UNESA, UNES (2016–2024)
4. Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16 Universitas Jember (2007–2016)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-3: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, lulus tahun 2005
2. S-2: Pendidikan Matematika, IKIP Malang, lulus tahun 1996
3. S-1: Pendidikan Matematika, IKIP Malang, lulus tahun 1981

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMA/SMK Kelas X (2021) (Penelaah)
2. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika Untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X (2019) (Penelaah)
3. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII (2018) (Editor)
4. Matematika Fisika 1 dan Matematika Fisika 2 (2018) (Penelaah)
5. Strategi Belajar Mengajar IPA (2016) (Penelaah)

Judul Buku dan Tahun Terbit (7 Tahun Terakhir):

1. Development of the Spatial Visual Oriented Geometry Test to Measure the Creative Thinking Ability of Elementary Students (2020)
2. The Development of Tangram-Based Geometry Test to Measure the Creative Thinking Ability of Junior High School Students in Solving Two-Dimensional Figure Problems (2020)
3. The Geometry Anxiety of Students' Visualization, Analysis, and Informal Deduction Levels in Solving Geometry Problem (2019)
4. The profile of student's anxiety in solving the critical thinking problem on geometry according to Van Hiele theory (2019)

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng
Email : kiki@sci.ui.ac.id
Instansi : Universitas Indonesia
Alamat Instansi : Kampus UI Depok, Depok 16424
Bidang Keahlian : Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. 1986–sekarang : Dosen Tetap Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia
2. 2018–2023 : Vice President of Institute Combinatorics and Its Application
3. 2012–2016 : Wakil Presiden Indonesian Mathematical Society (IndoMS)
4. 2016–sekarang : Chief Editor of Indonesian Journal of Combinatorics
5. 2013–sekarang : Managing Editor of Electronic Journal of Graph Theory and Applications

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. 2001–2006 : Doctor of Philosophy, University of Ballarat, Australia
2. 1985–1987 : Magister Matematika, Institut Teknologi Bandung
3. 1979–1985 : Sarjana Matematika, Universitas Indonesia

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matriks dalam Pelabelan Graf (2023), UI Publishing

Judul Buku yang Pernah Ditelaah (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika SD Kelas VI (Buku Siswa dan Buku Guru)
2. Matematika SMP Kelas VII (Buku Siswa dan Buku Guru)
3. Matematika SMA Tingkat Lanjut Kelas XI (Buku Siswa dan Buku Guru)
4. Matematika SMA Tingkat Lanjut Kelas XII (Buku Siswa dan Buku Guru)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Hinding, N, Sunusi, N, Mutmainnah, S, Rahayu, I.I, Syafrizal Sy, Sugeng, K.A., Simanjuntak, R, A constructive method to determine the total vertex irregularity strength of two flower graph variants, *MethodsX*, 2025, 15, 103587
2. Barack, Z.Z., Sugeng, K. A., Semaničová- Feňovčíková, A., Bača, M., Modular Irregularity Strength of Corona Product Graph, *DML* 2024, 13, 111-116
3. Judul lain dapat dilihat di: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=12797262400>
<https://scholar.ui.ac.id/en/persons/kiki-ariyanti>



Profil Ilustrator

Nama Lengkap : Reddy Fajar Ciptoadi, S.Pd.
Email : ciptoadiku@gmail.com
Instansi : SMP Negeri 54
Alamat Instansi : SMP Negeri 54 Surabaya Jl. Kyai Tambak
Deres No. 293, Bulak, Kec. Bulak,
Surabaya, Jawa Timur.
Bidang Keahlian : Ilustrasi



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Art and Music Teacher di SD Surabaya Montessori School (2013–2023)
2. Guru SMP Negeri 54 Surabaya (2023–sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-1 Pendidikan Ekonomi Tata Niaga Universitas Negeri Surabaya tahun 2006.
2. S-1 PGSD Universitas Terbuka tahun 2023.

Karya Buku dan Ilustrasi (10 Tahun Terakhir):

1. Ilustrator Berbahasa Mandarin, Inggris dan Indonesia Tanpa Hafal buku 1 dan 2 tahun 2015. Penerbit PT Pustaka Internasional.
2. Ilustrator Buku Bintang Pendidikan Agama Islam dan Budi Pekerti untuk SD kelas 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 Tahun 2020. Penerbit CV Bintang Sarana Media.
3. Ilustrator Buku Pendidikan Agama Islam dan Budi Pekerti SD Kelas II Tahun 2021. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
4. Ilustrator Buku Matematika untuk SD/MI Kelas III Tahun 2022. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
5. Ilustrator Buku Pendidikan Pancasila SD Kelas I Tahun 2023. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
6. Ilustrator Buku Panduan Guru Seni Musik Tahun 2024. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
7. Ilustrator Bahasa Inggris: English for Nusantara Kids untuk SD/MI Kelas IV Tahun 2024. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.

Profil Penyunting

Nama Lengkap : Uly Amalia, S.Si.
Email : ulyaaa13@gmail.com
Instansi : -
Alamat Instansi : -
Bidang Keahlian : Penyuntingan Buku

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

Editor, pemeriksa aksara, dan penulis lepas (2012—sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

S-1: Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor (2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

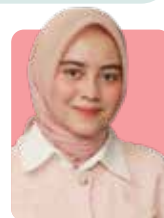
1. Buku Teks Pendamping Matematika untuk SD/MI Kelas IV (2023)
2. Target Nilai 100 Ulangan Tematik SD/MI Kelas 3 (2021)

Judul Buku yang Disunting dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Dasar-Dasar Teknik Jaringan Komputer dan Telekomunikasi untuk SMK/MAK Kelas X, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi (2023)
2. Buku Panduan Guru Dasar-Dasar Teknik Jaringan Komputer dan Telekomunikasi untuk SMK/MAK Kelas X, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi (2023)
3. Buku Teks Pendamping Matematika untuk SD/MI Kelas II, Bukit Mas Mulia (2023)
4. Ilmu Pengetahuan Sosial untuk SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi), Kemdikbudristek (2023)
5. Panduan Guru Ilmu Pengetahuan Sosial untuk SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi), Kemdikbudristek (2023)
6. Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan, Kemdikbudristek (2022)
7. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan, Kemdikbudristek (2022)

Profil Editor

Nama Lengkap : Sofia Nida Khoerunnisa
Email : khoerunnisasofia@gmail.com
Instansi : Pusat Perbukuan, Kemendikbudristek
Alamat Instansi : Jalan RS. Fatmawati Gd D
Kemendikbudristek Cipete, Jakarta
12410
Bidang Keahlian : Penyuntingan Naskah



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

2022 – sekarang : Pusat Perbukuan, Kemendikbudristek

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. S1 Pendidikan Matematika – Universitas Siliwangi (2019)
2. S2 Pendidikan Matematika – Universitas Siliwangi (2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit:

1. *Analisis Kemampuan Penalaran Induktif Matematik Peserta Didik Ditinjau dari Gaya Belajar Silver-Hanson*, Journal of Authentic Research on Mathematics Education (JARME), 2020.
2. *The Student Achievement assisted Edmodo: An Alternative to Online Learning in Pandemic Era*, Edumatika: Jurnal Riset Pendidikan Matematika, 2020.
3. *Pengembangan Digibook Trigonometri Berbasis Flip PDF untuk Mengeksplor Kemampuan Koneksi Matematis*, Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika, 2021.

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. *Hitungannya Nala: Mencari Jadwal Runa*, Kemendikbudristek, 2024

Profil Penyunting Visual

Nama Lengkap : M. Firdaus Jubaedi
Email : muhafir@gmail.com
Instansi : Thinkin Studio
Alamat Instansi : Jl. Permai 24 No. 9 Desa Mekarrahayu,
Kecamatan Margaasih, Kab. Bandung
Bidang Keahlian : Desain Grafis, UI/UX Desain



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. *Creative Director*, Thinkin Studio (2019–sekarang)
2. Konsultan Komunikasi Visual, Ditjen PAUD, Dikdas, dan Dikmen, Kemendikbudristek (2022–2024)
3. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020–2021)
4. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019–2020)
5. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018–2019)
6. Multimedia Designer, Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016–2018)
7. Intern Junior Art Director di Syafa'at Marcomm (2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

S-1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011–2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (5 Tahun Terakhir):

1. Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi) (2023)
2. Matematika untuk SMA/SMK Kelas X, Kemdikbud (2021)
3. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X, Kemdikbud (2021)
4. Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama, Modul, Kemdikbud (2021)

Profil Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : Dono Merdiko
Email : donoem2025@gmail.com
Instansi : Praktisi Perbukuan
Alamat Instansi : Jl. Akmaliah No. 24, 13730
Bidang Keahlian : Desain Buku



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Penata Letak Buku Kurikulum Merdeka Kemendikdasmen (2024–sekarang)
2. Penata Letak Buku Kurikulum Merdeka Kemendikbudristek (2020–2024)
3. Penata Letak Buku Tematik Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemendikbud (2014–2019)
4. Penata Letak Mizan Group (2013–2021)
5. Penata Letak Penerbit Kasyaf (2005–2021)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

Bina Sarana Informatika, Manajemen Informatika, 2002

Buku yang Pernah Dibuat Ilustrasi/Desain (10 Tahun Terakhir):

1. Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI Edisi Revisi, Pusat Perbukuan (2024)
2. Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI Edisi Revisi, Pusat Perbukuan (2024)
3. Bahasa Inggris *English for Nusantara Kids* Kelas III Pusat Perbukuan (2024)
4. Buku Panduan Guru Bahasa Inggris *English for Nusantara Kids* Kelas III, Pusat Perbukuan (2024)
5. Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan (2023)
6. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan (2023)
7. Dasar-Dasar Teknik Kimia Industri untuk SMK/MAK Kelas X Pusat Perbukuan (2023)
8. Buku Panduan Guru Dasar-Dasar Teknik Kimia Industri untuk SMK/MAK Kelas X Pusat Perbukuan (2023)
9. Matematika untuk SD/MI Kelas I, Pusat Perbukuan (2022)
10. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas I, Pusat Perbukuan (2022)
11. Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI, Pusat Perbukuan (2021)
12. Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI, Pusat Perbukuan (2021)
13. Buku Panduan Guru Pengembangan Pembelajaran untuk Satuan PAUD, Pusat Perbukuan (2021)
14. Buku Seri Tematik, Pusat Kurikulum dan Perbukuan (2014–2019)