



KEMENTERIAN
PENDIDIKAN DASAR
DAN MENENGAH
2025

MATEMATIKA

Tingkat Lanjut

Edisi Revisi

Sri Adi Widodo
Wikan Budi Utami
Fitria Sulistyowati
Atiek Sandrawati

SMA/MA Kelas XII

Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah

Dilindungi Undang-Undang

Penafian: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemendikdasmen.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi)

Penulis

Sri Adi Widodo
Wikan Budi Utami
Fitria Sulistyowati
Atiek Sandrawati

Penelaah

Sunardi
Kiki Ariyanti Sugeng

Penyelia/Penyelaras

Supriyatno
Maharani Prananingrum
Sofia Nida Khoerunnisa
Putri Ainur Islam

Kontributor

Iman Santoso
Eja Suteja

Ilustrator

Reddy Fajar Ciptoadi

Editor

Uly Amalia
Sofia Nida Khoerunnisa

Editor Visual

M. Firdaus Jubaedi

Desainer

Dono Merdiko

Penerbit

Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah

Dikeluarkan oleh

Pusat Perbukuan
Kompleks Kemdikdasmen Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
<https://buku.kemendikdasmen.go.id>

Edisi Revisi, 2025

ISBN 978-623-388-334-4 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-634-00-3296-3 (jil.2 PDF)

Isi buku ini menggunakan huruf Noto Serif 10/15 pt, SIL License.
xvi, 304 hlm.: 17,6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, termasuk Pendidikan Khusus. Sebagai sumber belajar utama dalam pembelajaran, buku senantiasa menyesuaikan diri dengan arah kebijakan pendidikan dan perkembangan kurikulum dari waktu ke waktu.

Sejalan dengan dinamika tersebut, pemerintah melakukan penyesuaian terhadap buku teks utama agar tetap relevan dan mendukung proses pembelajaran yang bermutu. Buku teks utama yang terdiri atas buku siswa dan panduan guru, disiapkan sebagai sumber belajar utama bagi peserta didik dan menjadi salah satu referensi atau inspirasi bagi guru dalam merancang dan mengembangkan pembelajaran sesuai karakteristik, potensi, dan kebutuhan peserta didik. Keberadaan buku teks utama ini diharapkan, dapat membentuk generasi yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan yang Maha Esa, dan berakhlak mulia; berpengetahuan luas; mandiri; kritis; kreatif; mampu bekerja sama; serta berdaya saing di tingkat nasional maupun global.

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkolaborasi dalam upaya menghadirkan buku teks utama ini. Semoga buku teks utama ini dapat menjadi tonggak perubahan yang menginspirasi, membimbing, dan mengangkat kualitas pendidikan kita ke puncak keunggulan.

Jakarta, Oktober 2025

Kepala Pusat Perbukuan,

Supriyatno, S.Pd., M.A.

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan rahmat-Nya, kami dapat menyelesaikan penulisan Buku Siswa *Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi)*. Buku ini disusun untuk memenuhi Capaian Pembelajaran Fase F bagi peserta didik SMA Kelas XII sesuai dengan Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Nomor 046/H/KR/2025 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah.

Matematika sering dipandang sebagai mata pelajaran yang abstrak, sulit, dan tidak relevan dengan kehidupan nyata, padahal banyak konsep dan prinsip matematika yang muncul di alam dan kehidupan sehari-hari. Pada buku ini, kami mencoba membawa konsep matematika lebih aplikatif pada kehidupan sehari-hari. Harapan kami, persepsi bahwa mempelajari matematika tidak ada manfaatnya karena tidak dapat diterapkan dalam kehidupan dan bidang ilmu lainnya, mulai berkurang dan hilang.

Dalam mempelajari konsep Matematika Tingkat Lanjut pada buku ini, kamu diharapkan telah menguasai konsep-konsep matematika dasar pada fase sebelumnya karena terdapat kaitan yang sangat erat antarkonsep matematika tersebut. Dengan demikian, kamu tidak mengalami kesulitan dalam memahami materi matematika pada buku ini.

Kami berusaha merancang buku Matematika Tingkat Lanjut ini semenarik mungkin agar kamu berminat dan termotivasi untuk mempelajari matematika. Pada buku ini, kamu diajak untuk mengingat kembali materi matematika pada jenjang sebelumnya. Kamu juga diajak untuk menggunakan teknologi. Pada buku ini, kamu mendapat kesempatan untuk berdiskusi, berkomunikasi, dan bekerja sama untuk menyelesaikan masalah matematis yang aplikatif dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu, untuk mengembangkan delapan Dimensi Profil Lulusan, tersaji beberapa kegiatan pembelajaran, seperti Ayo Bereksplorasi, Ayo Mencoba, Ayo Berpikir Kritis, dan Ayo Berpikir Kreatif. Pada beberapa masalah pada latihan soal, kami mengupayakan agar kemampuanmu dalam berpikir tingkat tinggi semakin berkembang dengan memberikan soal berpikir kreatif. Harapan kami adalah kemampuanmu sesuai dengan Dimensi Profil Lulusan dan keterampilan abad ke-21 semakin terasah.

Kami menyampaikan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku ini, khususnya kepada para penelaah, yaitu Prof. Dr. Sunardi, M.Pd. dan Prof. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng, M.Si. atas diskusi, bimbingan, dan masukan yang berharga dari awal sampai akhir proses penulisan. Tidak lupa juga kami sampaikan terima kasih kepada Pusat Perbukuan yang telah memfasilitasi tim penulis dan para penelaah sehingga buku ini dapat terselesaikan.

Akhir kata, kami berharap buku *Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi)* ini bermanfaat bagimu agar capaian pembelajaran Fase F dapat terpenuhi pada akhir fase. Kami juga berharap kamu mulai menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika karena dengan belajar matematika, secara tidak langsung kamu sudah mempelajari lingkungan sekitar.

Oktober 2025

Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Prakata	iv
Daftar Isi	vi
Daftar Gambar	viii
Daftar Tabel	xi
Ada Apa di Buku Ini?	xii
Bab 1 Lingkaran, Elips, dan Garis Singgung Lingkaran	1
A. Lingkaran.....	4
1. Definisi Lingkaran	5
2. Persamaan Lingkaran.....	6
B. Elips	18
1. Definisi Elips.....	18
2. Unsur-Unsur Elips.....	19
3. Persamaan Elips.....	20
C. Kedudukan Titik dan Garis terhadap Lingkaran	38
1. Kedudukan Titik terhadap Lingkaran.....	39
2. Kedudukan Garis terhadap Lingkaran	43
D. Persamaan Garis Singgung Lingkaran.....	51
1. Titik Singgung pada Lingkaran Telah Ditentukan	51
2. Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Kemiringan m Diketahui	56
3. Sebuah Titik di Luar Lingkaran Telah Ditentukan	61
Bab 2 Turunan Fungsi.....	79
A. Definisi Turunan Fungsi	81
1. Limit dan Kontinuitas Fungsi	82
2. Konsep Turunan Fungsi.....	97
3. Penulisan Turunan Fungsi	102
B. Sifat-Sifat Turunan Fungsi.....	102
1. Menemukan Sifat Turunan Fungsi	102
2. Turunan Fungsi Aljabar.....	114
3. Turunan Fungsi Trigonometri.....	116
4. Turunan Fungsi Eksponensial.....	120
C. Aplikasi Turunan Fungsi.....	127
1. Persamaan Garis Singgung pada Kurva	127

2. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Fungsi Diam.....	131
3. Titik Ekstrem, Nilai Balik Minimum, dan Nilai Balik Maksimum	137
D. Aplikasi Turunan Fungsi di Berbagai Bidang Ilmu	148
Bab 3 Integral.....	159
A. Integral Tak Tentu.....	161
1. Definisi Integral Tak Tentu	166
2. Sifat-Sifat Integral Tak Tentu	167
B. Integral Tentu	178
1. Jumlahan Riemann.....	178
2. Integral Tentu.....	183
3. Sifat-Sifat Integral Tentu	188
4. Teorema Dasar Kalkulus.....	190
C. Penerapan Integral.....	204
1. Luas Daerah pada Kurva	204
2. Aplikasi Integral dalam Bidang Ekonomi dan Bisnis	207
3. Aplikasi Integral dalam Bidang Fisika	209
4. Aplikasi Integral dalam Bidang Kesehatan.....	211
Bab 4 Analisis Data dan Peluang.....	221
A. Variabel Acak	224
B. Variabel Acak Diskret	230
C. Variabel Acak Kontinu.....	237
D. Fungsi Peluang.....	241
E. Fungsi Densitas Peluang	248
F. Distribusi Binomial.....	253
1. Fungsi Distribusi Binomial.....	256
2. Nilai Harapan Distribusi Binomial.....	259
G. Distribusi Normal	265
1. Fungsi Distribusi Normal.....	267
2. Nilai Harapan Distribusi Normal.....	273
Lampiran.....	281
Glosarium	283
Daftar Pustaka.....	286
Indeks	290
Profil Pelaku Perbukuan	294

Daftar Gambar

Gambar 1.1	<i>Chain Ring dan Sprocket</i>	3
Gambar 1.2	Orbit Planet Berbentuk Elips (NASA)	3
Gambar 1.3	Trek Pacuan Kuda Berbentuk Elips	4
Gambar 1.4	Irisan Kerucut dan Bidang Berupa Lingkaran	4
Gambar 1.5	Lingkaran dengan Titik Pusat $P(x, y)$ dan Jari-Jari r	5
Gambar 1.6	Langkah ke-1 Menggambar Lingkaran	6
Gambar 1.7	Langkah ke-2 Menggambar Lingkaran	6
Gambar 1.8	Langkah ke-3 Menggambar Lingkaran	6
Gambar 1.9	Lingkaran dengan Titik Pusat $O(0, 0)$ dan Jari-Jari r	7
Gambar 1.10	Lingkaran dengan Pusat $P(a, b)$ dan jari-jari r	9
Gambar 1.11	Irisan Kerucut Berbentuk Elips	18
Gambar 1.12	Elips	19
Gambar 1.13	Unsur-Unsur Elips	19
Gambar 1.14	Elips Horizontal dengan Titik Pusat $O(0, 0)$	20
Gambar 1.15	Unsur-Unsur Elips Horizontal dengan Titik Pusat $O(0, 0)$	22
Gambar 1.16	Unsur-Unsur Elips Horizontal dengan Pusat $P(m, n)$	23
Gambar 1.17	Elips Vertikal dengan Titik Pusat $O(0, 0)$	24
Gambar 1.18	Elips Vertikal dengan Titik Pusat $P(m, n)$	25
Gambar 1.19	Orbit Bumi terhadap Matahari Berbentuk Elips	31
Gambar 1.20	Sketsa Orbit Bumi Mengelilingi Matahari	31
Gambar 1.21	Sketsa Lengkungan dengan Panjang Sumbu Mayor 40 dan Panjang Sumbu Minor 20	35
Gambar 1.22	Terowongan Cisumdawu atau <i>Cisumdawu Twin Tunnel</i> .	38
Gambar 1.23	Kedudukan Titik $A(x, y)$ terhadap Lingkaran	39
Gambar 1.24	Hubungan Garis g terhadap Lingkaran	44
Gambar 1.25	Garis Singgung g pada Lingkaran dan Titik Singgung $T(x_1, y_1)$	51
Gambar 1.26	Lingkaran, Garis Singgung Lingkaran, dan Titik Singgung	61
Gambar 1.27	Irisan Kerucut Berbentuk Parabola	69
Gambar 1.28	Parabola dengan Titik Puncak $O(0, 0)$ dan Sumbu Simetri adalah Sumbu- y	70
Gambar 1.29	Parabola dengan Titik Puncak $O(0, 0)$ dan Sumbu Simetri adalah Sumbu- x	71
Gambar 1.30	Parabola dengan Titik Puncak $H(m, n)$ dan Sumbu Simetri Sejajar Sumbu- y	72
Gambar 1.31	Parabola dengan Titik Puncak $H(m, n)$ dan Sumbu Simetri Sejajar Sumbu- x	73
Gambar 1.32	Unsur-Unsur pada Hiperbola	77
Gambar 2.1	Karyawan Pabrik Sepatu	80
Gambar 2.2	Karl Theodor Wilhelm Weierstrass	81

Gambar 2.3	Tradisi Pacu Jawi di Kabupaten Tanah Datar Sumatra Barat	82
Gambar 2.4	Nilai Fungsi $f(x)$ dalam Garis Bilangan.....	84
Gambar 2.5	Interpretasi Geometri Sudut Pusat Lingkaran.....	88
Gambar 2.6	Wahana Halilintar di Taman Hiburan Indonesia.....	94
Gambar 2.7	Grafik Fungsi $F(x)$, $G(x)$, dan $H(x)$	95
Gambar 2.8	Kurva Laju Produksi Sepatu.....	98
Gambar 2.9	Bentuk Lain Kurva Laju Produksi Sepatu	99
Gambar 2.10	Bentuk Diperumum Garis Sekan dalam Kurva $f(x)$	100
Gambar 2.11	Pergerakan Titik Q Mendekati Titik P	101
Gambar 2.12	Turunan Fungsi Konstan.....	104
Gambar 2.13	Garis Tangen Kurva $f(x)$	127
Gambar 2.14	Kemonotonan Grafik Fungsi $f(x)$	132
Gambar 2.15	Grafik Fungsi $f(x)$	133
Gambar 2.16	Titik Ekstrem dari Kurva $f(x)$	137
Gambar 2.17	Titik Balik dari Kurva $f(x)$	140
Gambar 2.18	Grafik Fungsi $f(x)$	144
Gambar 2.19	Ilustrasi Karton	150
Gambar 2.20	Ilustrasi Kotak	151
Gambar 2.21	Jumlah Orang Terkonfirmasi Covid-19 di Jakarta	152
Gambar 2.22	Ilustrasi Persegi Panjang pada Kurva	153
Gambar 3.1	Inflasi, Efisiensi, dan Integral	161
Gambar 3.2	Gottfried Wilhelm Leibniz	161
Gambar 3.3	Aturan Trapesium	165
Gambar 3.4	Proses Perubahan Fungsi.....	166
Gambar 3.5	Bernhard Riemann	178
Gambar 3.6	Grafik Fungsi $f(x) = x$	181
Gambar 3.8	Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$	182
Gambar 3.7	Contoh Sketsa Awal Grafik $f(x)$	182
Gambar 3.9	Penambahan Partisi yang Mengakibatkan Perubahan Δx	183
Gambar 3.10	Grafik Fungsi $y = f(x)$	191
Gambar 3.11	Luas Daerah Bidang Datar di atas Sumbu- x	197
Gambar 3.12	Luas Daerah Bidang Datar di Bawah Sumbu- x	197
Gambar 3.13	Luas Daerah Bidang Datar di Atas dan di Bawah Sumbu- x	198
Gambar 3.14	Luas Daerah Bidang Datar yang Dibentuk dari Dua Kurva	198
Gambar 3.15	Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 4x$	199
Gambar 3.16	Grafik Fungsi $f(x) = -2x + 4$	202
Gambar 3.17	Grafik Fungsi $f(x) = x\sqrt{x^2 + 5}$ dan Garis $x = 2$	204
Gambar 3.18	Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x$	205
Gambar 3.19	Contoh Bidang Koordinat untuk Menggambar Grafik.....	206
Gambar 3.20	Grafik Fungsi $y = 3.000\sqrt{x} + 1.000$	207
Gambar 3.21	Contoh Bidang Koordinat untuk Menggambar Grafik.....	208

Gambar 3.22	Mekanisme Kesembuhan Luka	211
Gambar 3.24	Grafik Laju Pengunjung ke Kampung Adat Naga	214
Gambar 3.23	Batik Tulis Celaket Malang, Jawa Timur	214
Gambar 3.25	Grafik Fungsi $h(t) = -t^2 + 10t$	215
Gambar 3.26	Bentuk-Bentuk Daun	219
Gambar 3.27	Contoh Hasil Menjiplak	220
Gambar 4.1	Analisis data dan peluang digunakan dalam prakiraan cuaca.	223
Gambar 4.2	Permainan Monopoli Digital	224
Gambar 4.3	Mata Uang Logam	227
Gambar 4.4	Bola Merah dan Bola Putih di Dalam Kotak	228
Gambar 4.5	Kesalahan pada Pengetikan Kata	230
Gambar 4.6	Representasi Variabel Acak Diskret pada Garis Bilangan	232
Gambar 4.7	Papan Putar Angka	232
Gambar 4.8	Pengukuran Tinggi Badan Siswa	237
Gambar 4.9	Representasi Variabel Acak Kontinu pada Garis Bilangan	239
Gambar 4.10	Penghitungan Waktu pada Lomba Lari	240
Gambar 4.11	Daerah di Bawah Kurva f pada Interval $[a, b]$	249
Gambar 4.12	Jacob Bernoulli	253
Gambar 4.13	Mata Dadu 4	257
Gambar 4.14	Mata Uang Logam	258
Gambar 4.15	Sel Kanker	259
Gambar 4.16	Motif Batik Besurek	261
Gambar 4.17	Sisi Angka pada Mata Uang Logam	263
Gambar 4.18	Abraham de Moivre	265
Gambar 4.19	Kurva Normal	266
Gambar 4.20	Dua Kurva Normal dengan Rata-Rata Berbeda dan Simpangan Baku Sama	266
Gambar 4.21	Dua Kurva Normal dengan Rata-Rata Sama dan Simpangan Baku Berbeda	266
Gambar 4.22	Dua Kurva Normal dengan Rata-Rata dan Simpangan Baku Berbeda	267
Gambar 4.23	Fungsi Densitas Distribusi Normal	268
Gambar 4.24	Distribusi Normal Umum dan Distribusi Normal Baku ...	268
Gambar 4.25	Luas Daerah pada Contoh Soal Distribusi Normal	269
Gambar 4.26	Kurva Distribusi Normal	271
Gambar 4.27	Luas Daerah Berdistribusi Normal	272

Daftar Tabel

Tabel 1.1	Rangkuman Unsur-Unsur Elips.....	26
Tabel 1.2	Persamaan Lingkaran dan Persamaan Garis Polar.....	62
Tabel 2.1	Kecepatan Sapi dalam Pacu Jawi.....	83
Tabel 2.2	Nilai $f(x)$ untuk x Mendekati 1	85
Tabel 2.3	Nilai $g(x)$ untuk x Mendekati 1	85
Tabel 2.4	Hasil Pengamatan Lintasan <i>Roller Coaster</i>	95
Tabel 2.5	Menentukan Turunan Beberapa Fungsi.....	103
Tabel 2.6	Hasil Turunan Beberapa Fungsi	109
Tabel 2.7	Penentuan Nilai $\frac{a^h-1}{h}$ untuk $a = 2$ dan $a = 3$	122
Tabel 2.8	Data Penjualan Bola Boling	157
Tabel 3.1	Pengeluaran Rumah Tangga	164
Tabel 3.2	Luas Kurva dengan Pendekatan Luas Trapesium.....	165
Tabel 3.3	Luas Total Setengah Lingkaran.....	179
Tabel 4.1	Taksiran Pasangan Mata Dadu yang Muncul dari Pelemparan Dua Mata Dadu	225
Tabel 4.2	Taksiran Angka yang Muncul pada Uang Logam.....	227
Tabel 4.3	Taksiran Anak Perempuan yang Lahir	228
Tabel 4.4	Taksiran Bola Putih yang Terambil.....	229
Tabel 4.5	Taksiran Pasangan Angka yang Terpilih (Muncul).....	233
Tabel 4.6	Taksiran Pasangan Sisi Mata Uang yang Muncul.....	234
Tabel 4.7	Taksiran Pasangan Angka yang Terpilih (Muncul).....	236
Tabel 4.8	Nilai $X = x$ dan Peluangnya	242
Tabel 4.9	Nilai $X = x$ dan $f(x)$	244
Tabel 4.10	Nilai $X = x$ dan Peluangnya	245
Tabel 4.11	Nilai $Y = y$ dan $f(y)$	246
Tabel 4.12	Nilai $Z = z$ dan Peluangnya	247
Tabel 4.13	Hasil Lemparan Pertama dan Kedua.....	254
Tabel 4.14	Hasil Pelemparan dan Peluang	255
Tabel 4.15	Data Hasil Mencanting Batik Besurek dalam 6 Hari	260
Tabel 4.16	Tabel Distribusi Normal	270

Ada Apa di Buku Ini?

Kover Bab

Halaman awal bab yang memuat gambar dan pertanyaan pemantik untuk memotivasi semangatmu dalam mempelajari materi pada bab tersebut.

Tujuan Pembelajaran

Penjelasan mengenai berbagai kompetensi yang diharapkan dapat kamu capai setelah mempelajari bab tersebut.

Kata Kunci

Istilah-istilah matematis yang membantumu untuk menghubungkan antarkonsep materi.

Peta Konsep

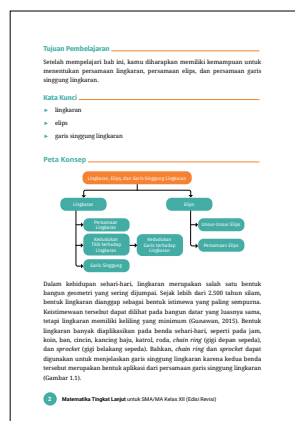
Diagram yang menunjukkan hubungan antarkonsep pada setiap bab. Kamu dapat mencermati peta konsep untuk mendapatkan gambaran luas tentang isi bab tersebut.

Apersepsi

Pendahuluan bab berupa fenomena nyata dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan materi yang akan kamu pelajari.

Ayo Mengingat Kembali

Kamu diajak untuk mengingat kembali materi yang pernah dipelajari di kelas atau di bab sebelumnya. Hal ini sangat penting karena dengan mengingat materi tersebut,



Ayo Mengingat Kembali

Untuk mempelajari materi bab ini, kamu perlu mengingat kembali teorema Pythagoras, persamaan linear, jarak antartitik, jarak titik ke garis, trigonometri (terutama pada sinus, kosinus, dan tangen), serta fungsi kuadrat.

kamu akan lebih mudah untuk memahami materi berikutnya.

Ayo Bereksplorasi

Kegiatan menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Kamu dapat melakukan kegiatan ini secara mandiri atau berkelompok sesuai dengan petunjuk guru.

Definisi

Penjelasan dari suatu istilah atau konsep matematika untuk mendukungmu memahami materi dengan konsep dasar yang benar.

Sifat-Sifat

Bagian ini menyajikan sifat-sifat dari suatu konsep matematika. Kamu dapat menggunakan sifat-sifat tersebut untuk menyelesaikan masalah matematis yang diberikan.

Contoh Soal

Contoh soal disajikan untuk membantumu memahami konsep matematika yang sedang dipelajari. Kamu dapat mencermati soal beserta alternatif penyelesaiannya.

Ayo Mencoba

Bagian ini menyajikan soal beserta bimbingan penyelesaian soal. Kamu dapat menyelesaikan soal sesuai dengan arahan pada alternatif penyelesaian.

Petunjuk

Arahan untuk mengerjakan soal berupa penjelasan mengenai koneksi antarmateri,

Ayo Bereksplorasi 1.1

Kamu dapat menggambar lingkaran tanpa menggunakan jangka. Siapkan alat dan bahan, seperti benang, pensil/bolpoin, dan kertas. Ikuti langkah-langkah berikut ini.

- Ambil sehelai benang, kemudian ikatkan pada ujung pensil atau bolpoin (Gambar 1.6).
- Tahan ujung benang menggunakan jari tanganmu sehingga ujung benang tersebut tidak dapat bergerak (Gambar 1.7).
- Tarik benang sampai kencang, kemudian gerakkan pensil atau bolpoin secara melingkar pada kertas (Gambar 1.8). Kalau benang dijaga tetap kencang selama menggambar, kamu akan memperoleh lingkaran sempurna.

Definisi 2.1

Misalkan $f(x)$ sebuah fungsi $f(x): R \rightarrow R$. Ketika x mendekati c , limit $f(x)$ adalah L , ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L,$$

berarti untuk x mendekati c dari kiri dan kanan, maka $f(x)$ mendekati L .

Catatan: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dibaca limit $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L .

Sifat-Sifat

Sifat Limit 1: Misalkan $f(x) = k$ dan $g(x) = x$ adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi di R dan mempunyai limit di c dengan k konstanta, maka berlaku

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c.$$

Contoh Soal 1.1

Misalkan suatu lingkaran berpusat di O dan berjari-jari $r = 4$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lingkaran memiliki pusat O dan jari-jari $r = 4$ sehingga persamaan lingkaran dapat ditulis

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dengan substitusi $r = 4$ ke persamaan di atas, diperoleh persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 16$.

Ayo Bereksplorasi 1.1

Kamu dapat menggambar lingkaran tanpa menggunakan jangka. Siapkan alat dan bahan, seperti benang, pensil/bolpoin, dan kertas. Ikuti langkah-langkah berikut ini.

- Ambil sehelai benang, kemudian ikatkan pada ujung pensil atau bolpoin (Gambar 1.6).
- Tahan ujung benang menggunakan jari tanganmu sehingga ujung benang tersebut tidak dapat bergerak (Gambar 1.7).
- Tarik benang sampai kencang, kemudian gerakkan pensil atau bolpoin secara melingkar pada kertas (Gambar 1.8). Kalau benang dijaga tetap kencang selama menggambar, kamu akan memperoleh lingkaran sempurna.

Petunjuk

Diameter adalah tali busur terpanjang yang melalui titik pusat. Panjang diameter dua kali jari-jarinya. Diameter membagi lingkaran menjadi dua bagian dengan luas yang sama.

rumus, dan trik penyelesaian. Fitur ini umumnya tersaji pada Ayo Mencoba.

Ayo Berdiskusi

Kegiatan bertukar pikiran dan menyampaikan pendapat dengan teman sekelas untuk memperdalam pengetahuan, memecahkan masalah, dan menjawab pertanyaan.

Ayo Berdiskusi

Diskusikan bersama kelompok masing-masing untuk mencari hubungan dari persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan pusat lingkaran $P(a, b)$ dan jari-jari r .

Ayo Mengomunikasikan

Kegiatan mengomunikasikan pendapat atau hasil diskusi kelompok di bawah bimbingan guru. Kamu dapat menerapkan etika berkomunikasi dan sikap menghargai teman yang sedang presentasi di depan kelas.

Ayo Mengomunikasikan

Setelah menggambar lingkaran tersebut, kamu dapat menceritakan kepada teman sekelompok dengan mengacu pada kedua pertanyaan berikut.

- Manakah yang disebut pusat lingkaran?
- Manakah yang disebut jari-jari lingkaran?

Ayo Berpikir Kreatif

Fitur ini memotivasimu untuk menyelesaikan soal secara kreatif. Kamu dapat menghasilkan gagasan, karya, atau tindakan yang orisinal berkaitan dengan soal yang diberikan.

Ayo Berpikir Kreatif

Kamu sudah mengetahui hubungan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan titik pusat lingkaran $P(a, b)$ dan jari-jari r . Cobalah mendiskusikan beberapa permasalahan berikut bersama kelompok masing-masing.

1. Jika $A = 0$, tunjukkan bahwa pusat lingkaran berada pada sumbu- y .
2. Jika $B = 0$, tunjukkan bahwa pusat lingkaran berada pada sumbu- x .
3. Jika $C = 0$, tunjukkan bahwa pusat lingkaran terletak pada pusat koordinat.
4. Jika $B - C = 0$, tunjukkan bahwa lingkaran berpusat pada sumbu- x dan melalui titik pusat koordinat.
5. Jika $A - C = 0$, tunjukkan bahwa lingkaran berpusat pada sumbu- y dan melalui titik pusat koordinat.

Selanjutnya, presentasikanlah hasil diskusi kelompokmu di depan kelas!

Ayo Berpikir Kritis

Fitur yang menyajikan soal untuk ditemukan solusinya secara mandiri atau berkelompok. Dalam menyelesaikan soal ini, kamu dapat memproses informasi dan gagasan, menganalisis dan mengevaluasi penalaran, merefleksikan pemikiran, serta mengambil keputusan dengan cermat.

Ayo Berpikir Kritis

Berikanlah alasan dari setiap kondisi berikut!

1. Jika nilai diskriminan pada fungsi kuadrat $(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai positif ($D > 0$), maka kedudukan garis g memotong lingkaran L .

Tahukah Kamu

Pengetahuan umum yang berkaitan dengan materi dalam subbab tertentu. Fitur ini dapat menambah pengetahuanmu mengenai bumi yang kita pijak dan tokoh-tokoh matematika yang berjasa besar dalam menyebarkan ilmu matematika.

Ayo Menggunakan Teknologi

Kamu dapat mengecek jawabanmu menggunakan kalkulator, aplikasi. Kamu juga dapat membuat grafik fungsi menggunakan situs web. Kamu dapat menggunakan teknologi tersebut untuk mendukungmu memahami materi matematika, bukan untuk menemukan jawaban instan.

Video Pembelajaran

Fitur ini memandumu mempelajari materi melalui video daring. Kamu dapat mengunjungi tautan yang diberikan atau mengarahkan ponsel pintarmu (setelah mengaktifkan pemindai kode QR) pada gambar kode yang tersaji.

Latihan Soal

Latihan yang terdapat pada setiap akhir subbab untuk menguji pemahamanmu terhadap materi matematika yang sudah dipelajari dalam satu subbab. Kamu diminta mengerjakan soal-soal dengan tiga jenis kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi.

Tahukah Kamu

Planet-planet yang berada di tata surya memiliki lintasan berbentuk elips dan mengelilingi Matahari, termasuk orbit dari Bumi (Gambar 1.19). Hal ini sesuai dengan tiga Hukum Kepler, yaitu (1) planet bergerak dalam orbit elips dengan Matahari sebagai fokusnya, (2) sebuah planet menempuh area ruang yang sama dalam jumlah waktu yang sama di mana pun ia berada dalam orbitnya, dan (3) periode orbit sebuah planet sebanding dengan ukuran orbitnya.

Ayo Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan aplikasi GeoGebra untuk mengecek apakah jawabanmu terhadap soal-soal pada buku ini sudah benar atau belum. GeoGebra adalah perangkat lunak matematika dinamis yang menggabungkan geometri, aljabar, dan kalkulus (Lestari, 2018). Aplikasi ini dikembangkan oleh Markus Hohenwarter di Universitas Florida Atlantic. Aplikasi ini dapat digunakan sebagai alat bantu untuk belajar matematika (Ekawati, 2016).



Video Pembelajaran

Kamu dapat mencermati penjelasan mengenai integrasi substitusi dengan menggunakan contoh lain. Kamu dapat memindai kode respons cepat di samping atau mengunjungi tautan berikut:

<https://youtu.be/CuPR8e5POps> dan <https://youtu.be/AJp8va780j0>.



Latihan Soal Elips

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar!

- Tentukan titik pusat, titik fokus, dan titik puncak elips untuk setiap persamaan berikut:
 - $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$
 - $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$
 - $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
 - $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
- Tentukan persamaan elips jika diketahui unsur-unsur berikut:
 - titik fokus $(0, \pm 6)$ dan titik puncak $(0, \pm 7)$
 - titik puncak $(\pm 5, 0)$ dan *latus rectum* $\frac{4}{5}$

Uji Kompetensi

Soal-soal yang berkaitan dengan seluruh materi dalam satu bab untuk menguji apakah kamu sudah mencapai tujuan pembelajaran atau belum. Bentuk soal yang tersaji bervariasi, berupa pilihan ganda, pilihan ganda kompleks, isian singkat, dan uraian.

Pengayaan

Fitur ini berupa pendalaman materi, soal-soal, penerapan dalam bidang teknologi, atau kegiatan eksplorasi berupa proyek. Pengayaan dapat memperluas wawasan dan pemahamanmu mengenai konsep yang sudah dipelajari dalam suatu bab.

Refleksi

Pada bagian ini, kamu diajak untuk merenungkan perasaanmu setelah mempelajari materi dalam satu bab dan manfaat yang kamu peroleh setelah memahami materi tersebut.

Uji Kompetensi Bab 1

Selesaikanlah soal-soal berikut ini dengan benar!

1. Misalkan $a < 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 - ax + 2ay + 1 = 0$ mempunyai jari-jari 2. Tentukan koordinat titik pusat lingkaran tersebut.
2. Diketahui $P(h, k)$ dan r berturut-turut menyatakan titik pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$. Tentukan nilai dari $r + k - h$.
3. Diketahui lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3py - 30 = 0$ melalui titik $(-2, 1)$. Tentukan persamaan lingkaran yang sepusat, tetapi panjang jari-jarinya dua kali panjang jari-jari lingkaran tersebut.
4. Diketahui sebuah elips memiliki titik pusat $O(0, 0)$, salah satu fokusnya terletak pada titik $(0, 3)$, dan panjang sumbu mayornya adalah 10. Tentukan persamaan elips tersebut.

Pengayaan

1. Parabola

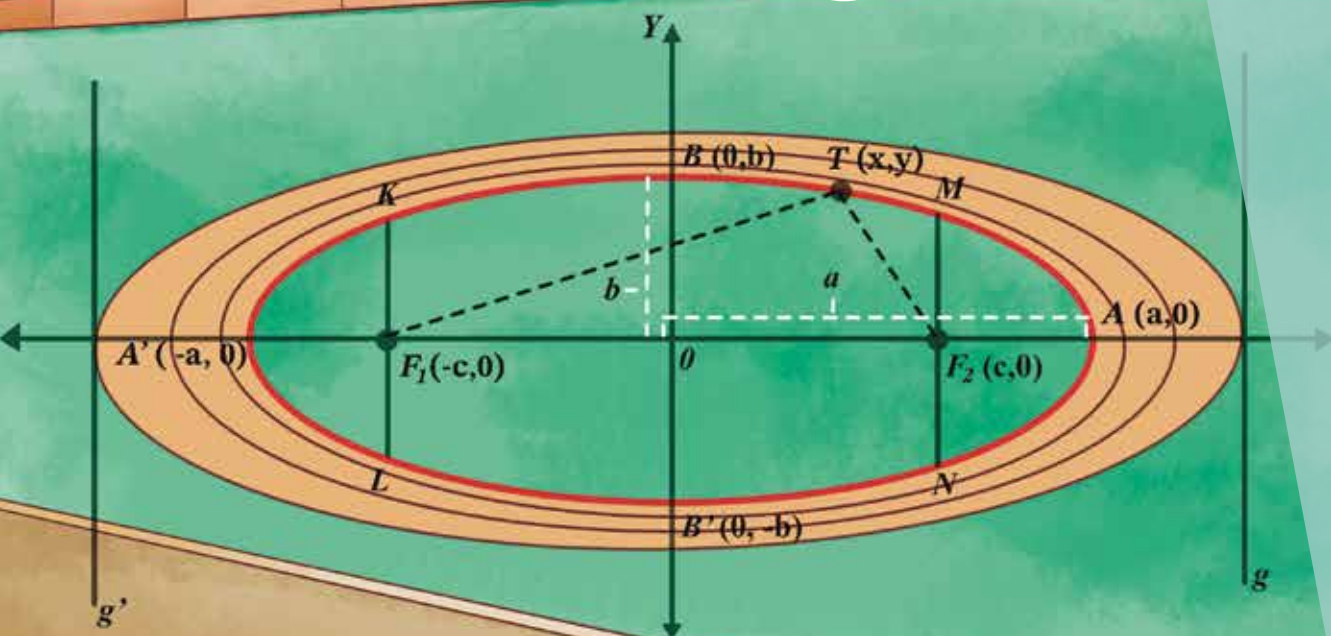
Pada buku *Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)* terdapat pembahasan tentang fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + x^2 + c$ dengan kurva simetris berbentuk $\cap$ atau $\cup$. Kedua bentuk tersebut dikenal dengan istilah *parabola*. Tentunya ada bentuk lain yang juga disebut parabola, yaitu kurva simetris berbentuk $\subset$ dan $\supset$.

Refleksi

Kamu sudah mempelajari materi lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran pada bab ini. Sebagai bahan perenungan, jawablah setiap pertanyaan berikut sesuai dengan pengalaman belajarmu.

Bab 1

Lingkaran, Elips, dan Garis Singgung Lingkaran



Bagaimana cara membedakan persamaan lingkaran dengan elips serta menentukan kedudukan titik atau garis terhadap lingkaran dan persamaan garis singgungnya?

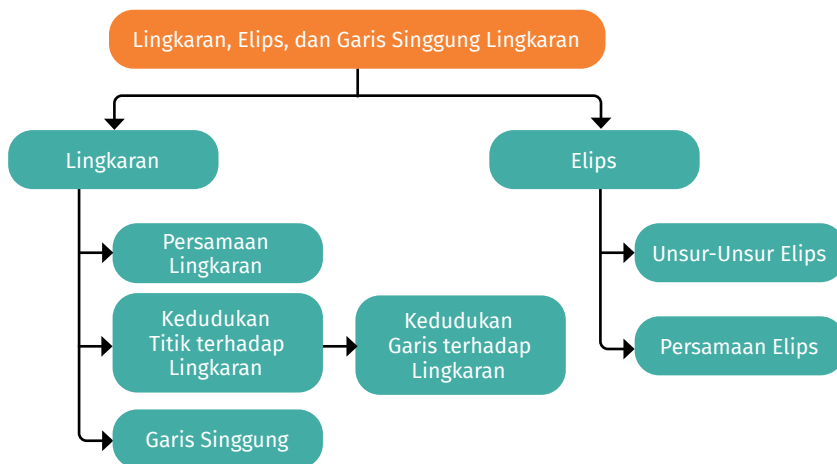
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan untuk menentukan persamaan lingkaran, persamaan elips, dan persamaan garis singgung lingkaran.

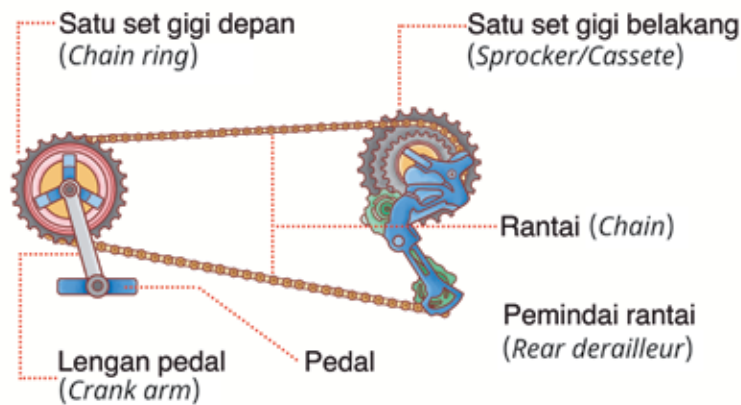
Kata Kunci

- ▶ lingkaran
- ▶ elips
- ▶ garis singgung lingkaran

Peta Konsep

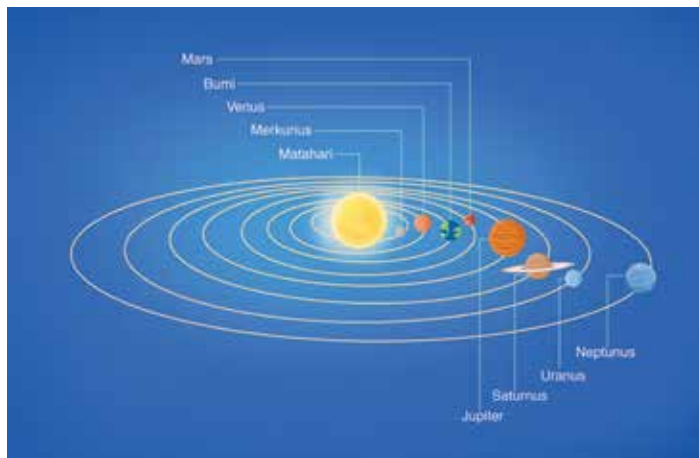


Dalam kehidupan sehari-hari, lingkaran merupakan salah satu bentuk bangun geometri yang sering dijumpai. Sejak lebih dari 2.500 tahun silam, bentuk lingkaran dianggap sebagai bentuk istimewa yang paling sempurna. Keistimewaan tersebut dapat dilihat pada bangun datar yang luasnya sama, tetapi lingkaran memiliki keliling yang minimum (Gunawan, 2015). Bentuk lingkaran banyak diaplikasikan pada benda sehari-hari, seperti pada jam, koin, ban, cincin, kancing baju, katrol, roda, *chain ring* (gigi depan sepeda), dan *sprocket* (gigi belakang sepeda). Bahkan, *chain ring* dan *sprocket* dapat digunakan untuk menjelaskan garis singgung lingkaran karena kedua benda tersebut merupakan bentuk aplikasi dari persamaan garis singgung lingkaran (Gambar 1.1).



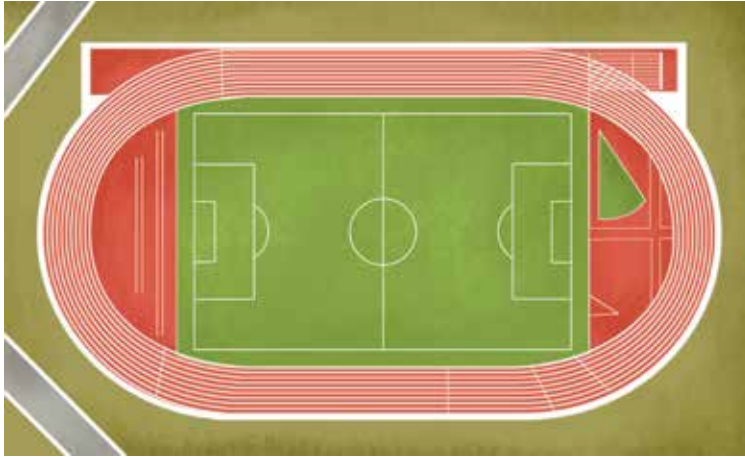
Gambar 1.1 Chain Ring dan Sprocket

Selain lingkaran, terdapat bangun datar yang memiliki bentuk menyerupai lingkaran yang telah dipanjangkan satu arah, yaitu elips. Bangun tersebut memiliki nama lain, di antaranya sepadan, lonjong, dan oval beraturan. Planet-planet di Galaksi Bimasakti memiliki lintasan berbentuk elips dengan matahari sebagai pusat elipsnya (Gambar 1.2).



Gambar 1.2 Orbit Planet Berbentuk Elips (NASA)

Selain orbit planet, trek pacuan kuda biasanya berbentuk elips. Desain ini bertujuan mengurangi sudut tajam pada belokan sehingga memungkinkan terjadinya perubahan yang lebih halus antara lintasan lurus dan tikungan. Dengan perubahan halus tersebut, gaya sentrifugal yang terjadi pada joki dapat didistribusikan secara merata sehingga peluang terjadinya kecelakaan pada pacuan kuda dapat dikurangi.



Gambar 1.3 Trek Pacuan Kuda Berbentuk Elips

Sumber: digambar ulang dari [GeeksforGeeks/geeksforgeeks.org](https://www.geeksforgeeks.org) (2025)

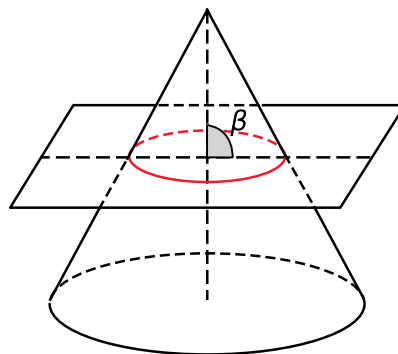


Ayo Mengingat Kembali

Untuk mempelajari materi bab ini, kamu perlu mengingat kembali teorema Pythagoras, persamaan linear, jarak antartitik, jarak titik ke garis, trigonometri (terutama pada sinus, kosinus, dan tangen), serta fungsi kuadrat.

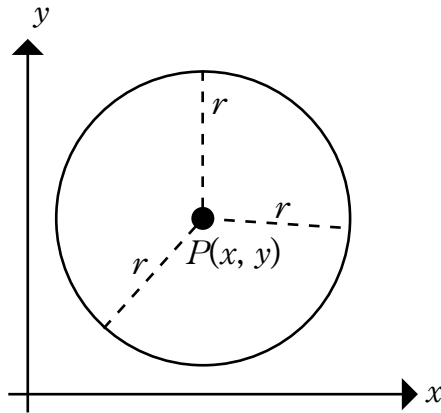
A. Lingkaran

Lingkaran pada irisan kerucut dapat terbentuk dari kerucut yang dipotong oleh bidang dengan sudut $\beta = \frac{\pi}{2}$ atau 90° terhadap garis tinggi kerucut dan tidak melalui puncak kerucut (Gambar 1.4).



Gambar 1.4 Irisan Kerucut dan Bidang Berupa Lingkaran

1. Definisi Lingkaran



Gambar 1.5 Lingkaran dengan Titik Pusat $P(x, y)$ dan Jari-Jari r

Lingkaran adalah kurva tertutup sederhana dengan ciri semua titik pada kurva tersebut memiliki jarak yang sama dengan titik pusat. Kurva tertutup sederhana berupa garis melengkung yang kedua ujungnya saling berimpit. Beberapa ahli mendefinisikan lingkaran sebagai lintasan suatu titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu dan terletak pada bidang datar. Dari beberapa definisi lingkaran tersebut, kata kunci yang berkaitan dengan pengertian lingkaran adalah *jarak yang selalu sama dari titik tertentu*. Jarak yang sama disebut *jari-jari* dan titik tertentu disebut *titik pusat*. Pada Gambar 1.5, jari-jari adalah r dan titik pusat lingkaran terletak pada $P(x, y)$.



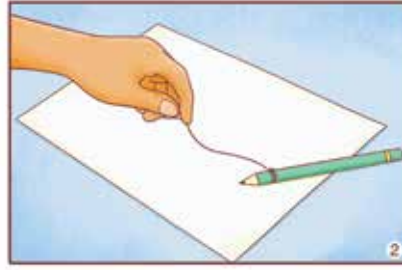
Ayo Bereksplorasi 1.1

Kamu dapat menggambar lingkaran tanpa menggunakan jangka. Siapkan alat dan bahan, seperti benang, pensil/bolpoin, dan kertas. Ikuti langkah-langkah berikut ini.

- Ambil sehelai benang, kemudian ikatkan pada ujung pensil atau bolpoin (Gambar 1.6).
- Tahan ujung benang menggunakan jari tanganmu sehingga ujung benang tersebut tidak dapat bergerak (Gambar 1.7).
- Tarik benang sampai kencang, kemudian gerakkan pensil atau bolpoin secara melingkar pada kertas (Gambar 1.8). Kalau benang dijaga tetap kencang selama menggambar, kamu akan memperoleh lingkaran sempurna.



Gambar 1.6 Langkah ke-1 Menggambar Lingkaran



Gambar 1.7 Langkah ke-2 Menggambar Lingkaran



Gambar 1.8 Langkah ke-3 Menggambar Lingkaran



Ayo Mengomunikasikan

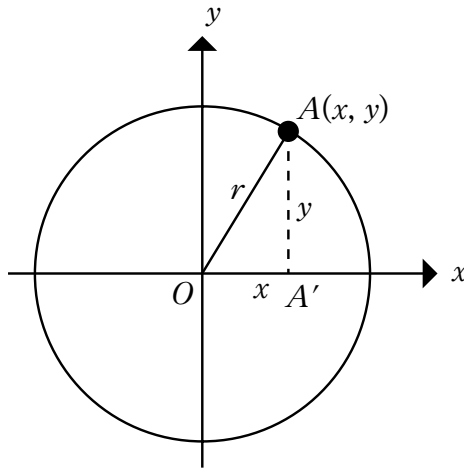
Setelah menggambar lingkaran tersebut, kamu dapat menceritakan kepada temanmu dengan mengacu pada kedua pertanyaan berikut.

- ▶ Manakah yang disebut pusat lingkaran?
- ▶ Manakah yang disebut jari-jari lingkaran?

2. Persamaan Lingkaran

a. Persamaan Lingkaran dengan Pusat $O(0, 0)$

Titik O adalah titik asal koordinat Kartesius. Pada Gambar 1.9 tampak lingkaran berpusat di $O(0, 0)$ dengan jari-jari r . Misalkan $A(x, y)$ adalah sebarang titik yang terletak pada lingkaran. Titik A tersebut diproyeksikan pada sumbu- x sehingga diperoleh A' pada koordinat $(x, 0)$.



Gambar 1.9 Lingkaran dengan Titik Pusat $O(0, 0)$ dan Jari-Jari r

Dari segitiga $\triangle OAA'$, diperoleh bahwa $(OA)^2 = (OA')^2 + (A'A)^2$. Berdasarkan Gambar 1.9, panjang OA adalah jari-jari atau r , panjang OA' adalah x , dan panjang AA' adalah y sehingga $(OA)^2 = (OA')^2 + (A'A)^2$ dapat dinyatakan dengan $r^2 = x^2 + y^2$. Karena A adalah sebarang titik yang diambil pada lingkaran, persamaan $r^2 = x^2 + y^2$ dapat digeneralisasi untuk semua titik pada lingkaran. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa persamaan lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r adalah

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Contoh Soal 1.1

Misalkan suatu lingkaran berpusat di O dan berjari-jari $r = 4$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lingkaran memiliki pusat O dan jari-jari $r = 4$ sehingga persamaan lingkaran dapat ditulis

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dengan menyubstitusi $r = 4$ ke persamaan di atas, diperoleh persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 16$.



Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Diketahui suatu lingkaran memiliki titik pusat O dan diameter lingkaran $d = 4\sqrt{3}$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut.



Petunjuk

Diameter adalah tali busur terpanjang yang melalui titik pusat. Panjang diameter dua kali jari-jarinya. Diameter membagi lingkaran menjadi dua bagian dengan luas yang sama.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lingkaran memiliki titik pusat O dan diameter $d = \dots$

Untuk menentukan jari-jari lingkaran, kamu harus membagi diameter menjadi dua bagian terlebih dahulu sehingga

$$r = \frac{\text{diameter}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = \dots$$

Substitusikan jari-jari r yang diperoleh pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Dengan demikian, lingkaran yang berpusat di titik O dengan diameter $d = 4\sqrt{3}$ memiliki persamaan

2. Kenzie memperoleh tugas dari guru Matematika untuk menggambar sebuah lingkaran yang melalui titik $T(6, -8)$. Lingkaran tersebut memiliki titik pusat lingkaran $O(0, 0)$. Karena Kenzie memiliki sifat rasa ingin tahu yang tinggi, ia berencana untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut. Bantulah Kenzie untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui pusat lingkaran berada di titik

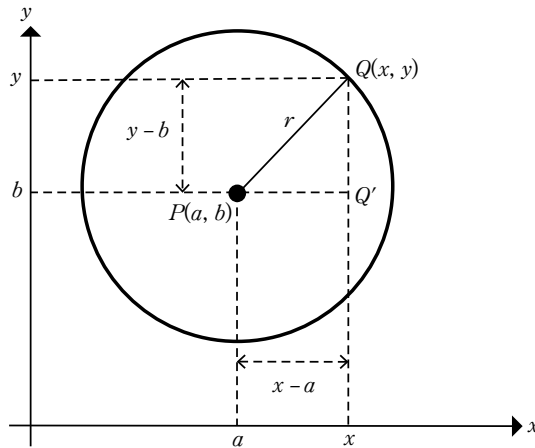
Untuk menentukan jari-jari lingkaran dari titik pusat $O(0, 0)$, kamu dapat menggunakan titik $T(6, -8)$ dan Teorema Pythagoras sehingga

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= 6^2 + (\dots)^2 \\ &= \dots \end{aligned}$$

Jadi, persamaan lingkaran tersebut adalah

b. Persamaan Lingkaran dengan Pusat $P(a, b)$

Kamu telah mempelajari cara menentukan suatu persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ dan jari-jari r . Pada sistem koordinat Kartesius, apakah mungkin menggambar suatu lingkaran dengan pusat lingkaran yang tidak berada pada titik $O(0, 0)$, atau pusat koordinat Kartesius? Untuk menjawab hal ini, kamu dapat memperhatikan Gambar 1.10. Lingkaran pada gambar tersebut memiliki jari-jari r dan pusat lingkaran pada titik $P(a, b)$.



Gambar 1.10 Lingkaran dengan Pusat $P(a, b)$ dan jari-jari r

Dengan menggunakan langkah seperti pada persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$, kamu perlu memperhatikan segitiga $\Delta PQ'Q$. Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, diperoleh persamaan $PQ^2 = (PQ')^2 + (QQ')^2$. Pada Gambar 1.10, diketahui PQ adalah jari-jari atau r , PQ' adalah $(x - a)$, dan QQ' adalah $(y - b)$ sehingga persamaan tersebut dapat dinyatakan dengan

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

atau

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Persamaan di atas merupakan *bentuk baku persamaan lingkaran* yang berpusat di $P(a, b)$ dengan jari-jari r .

Contoh Soal 1.2

Diketahui sebuah lingkaran berpusat di titik $P(1, 2)$ dan berjari-jari $r = 6$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lingkaran tersebut memiliki titik pusat $P(1, 2)$, artinya nilai $a = 1$ dan $b = 2$. Diketahui pula jari-jari lingkaran adalah $r = 6$. Dengan menyubstitusi nilai a , b , dan r ke persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ maka diperoleh persamaan lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$.

Contoh Soal 1.3

Misalkan pusat suatu lingkaran berada pada titik $P(-5, 2)$ dan memiliki diameter $d = 6$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lingkaran tersebut memiliki titik pusat $P(-5, 2)$, artinya nilai $a = -5$ dan $b = 2$. Selain itu, diketahui diameter lingkaran adalah 6 sehingga jari-jarinya (r) adalah 3. Dengan menyubstitusi nilai a , b , dan r ke persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ diperoleh bahwa persamaan lingkaran tersebut adalah $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

**Ayo Mencoba 1.2**

Selesaikan setiap soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Suatu lingkaran berpusat di titik $P(2, -4)$ dan berjari-jari $r = 4\sqrt{3}$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lingkaran tersebut memiliki titik pusat $P(2, -4)$, berarti

$$a = \dots \text{ dan } b = \dots$$

Selain itu, diketahui jari-jari lingkaran (r) sepanjang $4\sqrt{3}$. Dengan menyubstitusi nilai a , b , dan r ke persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, diperoleh bahwa persamaan lingkaran tersebut adalah

2. Tentukan persamaan lingkaran L yang melalui titik $M(-5, 6)$ dan $N(3, 2)$ dengan MN adalah diameter lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lingkaran L melalui titik $M(-5, 6)$ dan $N(3, 2)$. Karena MN adalah diameter lingkaran, pusat lingkaran tersebut $[P(a, b)]$ berada di tengah-tengah diameter MN dengan

$$a = \left(\frac{x_M + x_N}{2} \right) = \dots$$

$$b = \left(\frac{y_M + y_N}{2} \right) = \dots$$

Dari pusat lingkaran yang diperoleh, jari-jari lingkaran L adalah

$$\begin{aligned} r &= |NP| = \sqrt{(x_a - x_N)^2 + (y_a - y_N)^2} \\ &= \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Dengan menyubstitusi nilai a , b , dan r ke persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, diperoleh

c. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran



Ayo Mengomunikasikan

Dapatkan kamu menyatakan persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ menjadi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, dengan A , B , dan C adalah bilangan real?

Kamu telah memiliki dua bentuk persamaan lingkaran, yaitu persamaan lingkaran yang berpusat di titik $O(0, 0)$ dengan jari-jari r dan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(a, b)$ dengan jari-jari r . Pada kasus persamaan lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$, penjabarannya sebagai berikut:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$$

$$((x - 1)(x - 1)) + ((y - 2)(y - 2)) = 36$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 36$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0.$$

Dari penjabaran tersebut, persamaan lingkaran $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 36$ identik dengan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$. Sesuai dengan Contoh Soal 1.2, persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$ juga memiliki titik pusat $P(1, 2)$ dan jari-jari $r = 6$.

Begitu pula pada persamaan lingkaran $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 9$ yang diperoleh pada Contoh Soal 1.3. Persamaan tersebut identik dengan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$. Kedua persamaan lingkaran tersebut memiliki titik pusat $P(-5, 2)$ dan jari-jari $r = 3$.

Berdasarkan dua contoh penulisan persamaan lingkaran berbentuk $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$, dapat disimpulkan bahwa persamaan lingkaran dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

dengan A , B , dan C adalah bilangan real. Persamaan di atas disebut *bentuk umum persamaan lingkaran*.



Ayo Berdiskusi

Diskusikan bersama kelompok masing-masing untuk mencari hubungan dari persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan pusat lingkaran $P(a, b)$ dan jari-jari r .

Contoh Soal 1.4

Tentukan persamaan umum lingkaran apabila lingkaran memiliki jari-jari $r = 3$ dan berpusat di titik $P(-1, 2)$.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lingkaran tersebut memiliki jari-jari $r = 3$ dan titik pusat $P(-1, 2)$ sehingga nilai $a = -1$ dan $b = 2$. Dengan menyubstitusi nilai r , a , dan b ke persamaan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, diperoleh bentuk baku persamaan lingkaran $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Untuk memperoleh persamaan umum lingkaran, persamaan tersebut dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-2)^2 &= 9 \\(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) &= 9 \\x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 &= 9 \\x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 &= 0\end{aligned}$$

Jadi, bentuk persamaan umum lingkaran tersebut adalah $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.



Ayo Mencoba 1.3

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

Misalkan sebuah lingkaran memiliki jari-jari $r = 4\sqrt{3}$ dan berpusat di titik $P(2, -4)$. Tentukan persamaan umum lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lingkaran tersebut memiliki jari-jari $r = 4\sqrt{3}$ dan berpusat di titik $P(2, -4)$, berarti

$$a = \dots \text{ dan } b = \dots$$

Dengan menyubstitusi nilai r , a , dan b ke persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, diperoleh bentuk baku persamaan lingkaran berikut:

Apabila persamaan di atas dijabarkan, diperoleh

Jadi, persamaan umum lingkaran tersebut adalah

Contoh Soal 1.5

Misalkan titik pusat suatu lingkaran adalah $(2, 3)$ dengan diameter 8 cm. Tentukanlah persamaan lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Titik pusat lingkaran $(2, 3)$, berarti nilai $a = 2$ dan $b = 3$ sehingga

$$A = -2a = -4 \text{ dan } B = -2b = -6.$$

Diameter lingkaran adalah 8 cm maka jari-jarinya (r) adalah 4 cm. Dengan menyubstitusi nilai $a = 2$, $b = 3$, dan $r = 4$ ke persamaan $C = a^2 + b^2 - r^2$, diperoleh

$$C = 2^2 + 3^2 - 4^2 = -3.$$

Sampai di sini kamu telah memperoleh nilai $A = -4$, $B = -6$, dan $C = -3$. Dengan menyubstitusi nilai-nilai tersebut ke bentuk umum persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, diperoleh persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$.



Ayo Berpikir Kreatif

Dari Contoh Soal 1.5, dapatkan kamu mencari alternatif jawaban yang lain?

Contoh Soal 1.6

Sebuah lingkaran memiliki persamaan $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$. Tentukanlah titik pusat dan jari-jari lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Dari persamaan $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$, diperoleh

$$A = -4, B = -8, \text{ dan } C = -5.$$

Misalkan titik pusat lingkaran adalah $P(a, b)$, maka

$$a = -\frac{A}{2} = -\frac{(-4)}{2} = 2 \text{ dan } b = \frac{B}{2} = -\frac{(-8)}{2} = 4$$

sehingga pusat lingkaran pada titik $P(2, 4)$.

Misalkan jari-jari lingkaran adalah r , nilai r dapat ditentukan menggunakan rumus berikut:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-8}{2}\right)^2 - C} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 5} \\ &= \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Berdasarkan langkah-langkah tersebut maka lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ berpusat di titik $P(2, 4)$ dan berjari-jari 5.



Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Dari persamaan $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$, diperoleh

$$A = \dots, B = \dots, \text{ dan } C = \dots$$

Misalkan pusat lingkaran L adalah $P(a, b)$, maka

$$a = \dots$$

$$b = \dots$$

sehingga pusat lingkaran pada titik

Misalkan jari-jari lingkaran L adalah r , nilai r dapat ditentukan menggunakan rumus berikut:

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$$

Jadi, lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ berpusat di titik ... dan berjari-jari

2. Sebuah lingkaran L memiliki persamaan $L \equiv 2x^2 + 2y^2 + 20x - 16y + 16 = 0$. Tentukanlah titik pusat dan jari-jari lingkaran L tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Persamaan $L \equiv 2x^2 + 2y^2 + 20x - 16y + 16 = 0$ merupakan persamaan lingkaran karena dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, yaitu

$$L \equiv x^2 + y^2 + 10x - 8y + 8 = 0.$$

Dari persamaan di atas, diperoleh

$$A = \dots, B = \dots, \text{ dan } C = \dots$$

Misalkan pusat lingkaran L adalah $P(a, b)$, maka

$$a = \dots$$

$$b = \dots$$

sehingga pusat lingkaran pada titik

Misalkan jari-jari lingkaran L adalah r , nilai r dapat ditentukan menggunakan rumus berikut:

$$r = \dots$$

Jadi, lingkaran $L \equiv 2x^2 + 2y^2 + 20x - 16y + 16 = 0$ berpusat di titik ... dan berjari-jari



Ayo Berpikir Kreatif

Kamu sudah mengetahui hubungan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan titik pusat lingkaran $P(a, b)$ dan jari-jari r . Cobalah mendiskusikan beberapa permasalahan berikut bersama kelompok masing-masing.

1. Jika $A = 0$, tunjukkan bahwa pusat lingkaran berada pada sumbu- y .
2. Jika $B = 0$, tunjukkan bahwa pusat lingkaran berada pada sumbu- x .
3. Jika $C = 0$, tunjukkan bahwa pusat lingkaran terletak pada pusat koordinat.
4. Jika $B = C = 0$, tunjukkan bahwa lingkaran berpusat pada sumbu- x dan melalui titik pusat koordinat.
5. Jika $A = C = 0$, tunjukkan bahwa lingkaran berpusat pada sumbu- y dan melalui titik pusat koordinat.

Selanjutnya, presentasikanlah hasil diskusi kelompokmu di depan kelas.

Latihan Soal Lingkaran

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar.

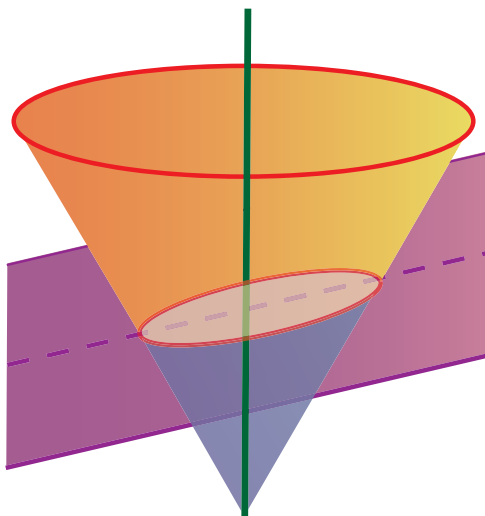
1. Diketahui pusat lingkaran terletak pada titik pusat $O(0,0)$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut jika:

- a. jari-jari $r = \sqrt{15}$
 - b. diameter $d = \frac{4}{5}\sqrt{5}$
 - c. melalui titik $A(1, 2)$
 - d. melalui titik $B\left(1\frac{1}{2}, 5\right)$
2. Tentukan unsur lingkaran (pusat dan jari-jari) jika persamaan lingkarannya sebagai berikut.
 - a. $(x - 1)^2 + (x + 5)^2 = 9$
 - b. $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 39 = 0$
 - c. $x^2 + y^2 = 15$
 3. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $A(-5, 6)$ dan titik $B(3, 2)$ dengan AB adalah diameter lingkaran tersebut.
 4. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik $P(2, -4)$, $Q(5, -1)$, dan $R(2, 2)$.
 5. Sebuah persegi $ABCD$ secara berturut-turut terletak pada titik $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 4)$, dan $D(1, 4)$. Tentukanlah persamaan lingkaran yang menyinggung keempat sisi persegi $ABCD$ tersebut.
 6. Diketahui sebuah persegi $ABCD$. Garis AB memiliki persamaan $x - y = 1$, garis BC memiliki persamaan $x + y = 0$, garis CD memiliki persamaan $x - y = 0$, dan garis AD memiliki persamaan $x + y = 1$. Tentukan persamaan lingkaran dalam dan luarnya.
 7. Tentukan batas nilai p agar persamaan $x^2 + y^2 + px + 2y + 26 = 0$ menunjukkan sebuah lingkaran.
 8. Diketahui sebuah lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y - 39 = 0$. Akan dibuat lingkaran kedua L_2 dengan titik pusat lingkaran L_1 dicerminkan terhadap sumbu- x dan jari-jarinya diperbesar tiga kali dari jari-jari L_1 . Tentukan persamaan lingkaran L_2 tersebut.
 9. Diketahui lingkaran L berpusat di titik $(-2, 3)$ dan melalui titik $(1, 5)$. Misalkan lingkaran L diputar 90° searah jarum jam terhadap titik $O(0, 0)$, kemudian digeser ke bawah sejauh 5 satuan. Tentukan persamaan lingkaran yang dihasilkan.

10. Sebuah kapal penyelamat bersandar di pelabuhan. Kapal penyelamat tersebut memiliki radar dengan jangkauan 45 km ke segala arah. Suatu ketika diperoleh informasi bahwa kapal motor penumpang mengalami kerusakan mesin dan terombang-ambing di tengah laut. Kapal tersebut diduga berada pada koordinat $(30, 25)$. Apakah kapal motor penumpang tersebut dapat terdeteksi oleh radar kapal penyelamat?

B. Elips

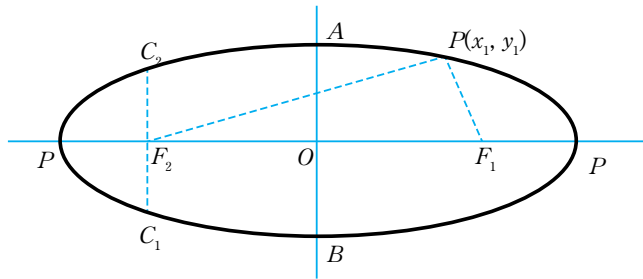
Elips merupakan salah satu bangun yang dapat dibentuk oleh bidang irisan yang memotong kerucut, tetapi tidak tegak lurus sumbu dan tidak sejajar garis pembangun kerucut, seperti yang dapat kamu lihat pada Gambar 1.11 (Sunardi dan Yudianto, 2015).



Gambar 1.11 Irisan Kerucut Berbentuk Elips

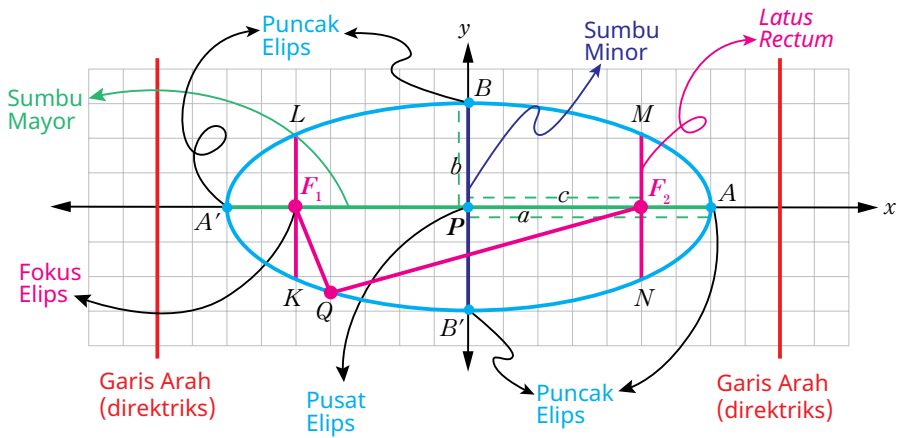
1. Definisi Elips

Elips adalah kumpulan titik-titik pada bidang datar yang jumlah jarak kedua titik tertentu selalu sama. Kedua titik tersebut dinamakan *titik fokus*. Pada Gambar 1.12, titik fokus ditunjukkan oleh titik F_1 dan titik F_2 .



Gambar 1.12 Elips

2. Unsur-Unsur Elips



Gambar 1.13 Unsur-Unsur Elips

Berdasarkan Gambar 1.13, diketahui unsur-unsur pembentukan elips sebagai berikut.

1. Dua sumbu elips, yaitu sumbu utama (garis yang sejajar dengan sumbu- x) dan sumbu sekawan (garis yang sejajar dengan sumbu- y).
2. Titik fokus elips terletak pada F_1 dan F_2 dan keduanya berjarak sebesar c dari titik pusat elips.
3. Titik pusat elips adalah titik P karena terletak di tengah-tengah kedua fokus elips.
4. Sumbu fokal (*focal axis*) adalah garis lurus yang menghubungkan kedua titik fokus elips, yaitu garis F_1F_2 .

- Titik puncak elips adalah dua titik pada perpanjangan sumbu fokus yang membentuk elips, yaitu A, A', B , dan B' .
- Sumbu mayor adalah diameter terpanjang dari elips, yang melalui kedua titik fokus dan dua titik terluar pada elips, yaitu ruas garis AA' dengan panjang $2a$.
- Sumbu minor adalah garis lurus yang melalui pusat elips dan tegak lurus sumbu mayor. Sumbu minor lebih pendek daripada sumbu mayor, yaitu ruas garis BB' dengan panjang $2b$.
- AA' selalu lebih besar daripada BB' , artinya $2a > 2b$ sehingga $a > b$.
- Latus rectum* atau *focal chord* adalah garis yang melalui salah satu titik fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor, yaitu ruas garis KL dan MN . Panjang *latus rectum* adalah

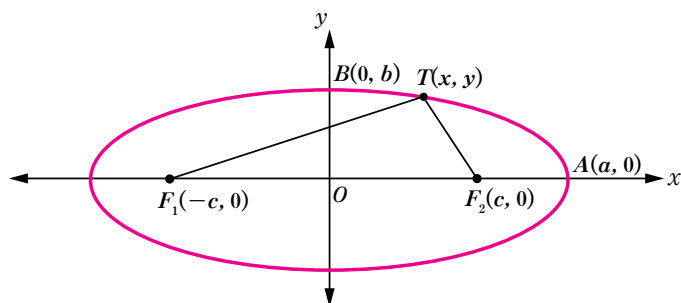
$$|KL| = |MN| = \frac{2b^2}{a}$$

dengan koordinat titik-titik $K(-c, -\frac{b^2}{a})$, $L(-c, \frac{b^2}{a})$, $M(c, \frac{b^2}{a})$, dan $N(c, -\frac{b^2}{a})$.

3. Persamaan Elips

a. Elips Horizontal

Elips horizontal adalah elips dengan sumbu mayor yang sejajar dengan sumbu- x . Pada bagian ini kamu akan mempelajari persamaan elips horizontal dengan pusat $O(0, 0)$ dan pusat $P(m, n)$. Dengan memperhatikan Gambar 1.14, terlihat titik fokus $F_1(-c, 0)$, titik fokus $F_2(c, 0)$, sumbu mayor yang terletak pada sumbu- x , pusat elips yang terletak pada $O(0, 0)$, dan jumlah jarak titik sebarang $T(x, y)$ terhadap kedua fokus sama dengan $2a$.



Gambar 1.14 Elips Horizontal dengan Titik Pusat $O(0, 0)$

Dari Gambar 1.14, diperoleh panjang ruas garis F_1T adalah

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

dan panjang ruas garis F_2T adalah

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}.$$

Karena titik $T(x,y)$ terletak pada elips, diperoleh

$$F_1T + F_2T = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Dengan mengkuadratkan persamaan di atas, diperoleh

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2$$

$$-4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (\text{dikali } -1)$$

$$4a^2 + 4xc = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (\text{dibagi } 4)$$

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Dengan mengkuadratkan persamaan di atas, diperoleh

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2((x+c)^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.$$

Perhatikan bahwa B adalah titik pada elips. Sesuai dengan definisi elips, diperoleh $F_1B + F_2B = 2a$. Segitiga ΔF_1BF_2 adalah segitiga sama kaki sehingga $F_1B = F_2B = a$. Dengan menerapkan Teorema Pythagoras pada segitiga ΔF_1OB atau segitiga ΔF_2OB , diperoleh $a^2 = b^2 + c^2$ atau $a^2 - c^2 = b^2$. Dengan demikian, persamaan $a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$ menjadi

$$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$$

dapat ditulis

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Berikutnya, persamaan di atas dibagi a^2b^2 sehingga menjadi

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

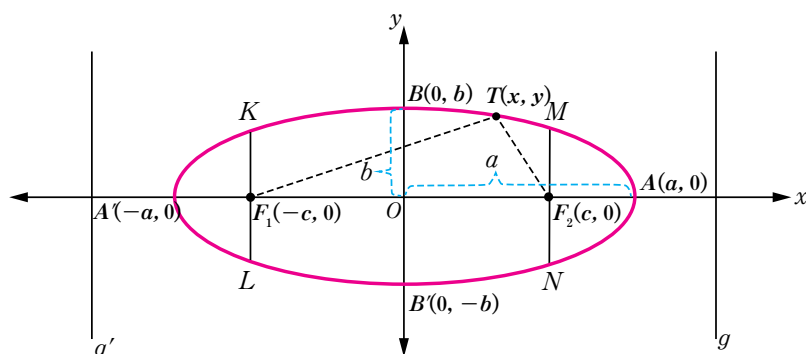
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Persamaan elips berbentuk

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ atau } x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

disebut *bentuk baku persamaan elips horizontal*.

Perhatikan Gambar 1.15 di bawah ini.



Gambar 1.15 Unsur-Unsur Elips Horizontal dengan Titik Pusat $O(0, 0)$

Gambar 1.15 merupakan elips dengan persamaan $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ atau $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Adapun unsur-unsur elips tersebut sebagai berikut.

1. Titik fokus elips adalah $F_1(-c, 0)$ dan $F_2(c, 0)$ dengan $c^2 = a^2 - b^2$.
2. Pusat elips terletak pada titik pusat koordinat yaitu $O(0, 0)$.
3. Puncak elips adalah titik-titik $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $B'(0, -b)$, dan $B(0, b)$.
4. Panjang sumbu mayor adalah $2a$ dan panjang sumbu minor adalah $2b$.
5. Eksentrisitas (e) adalah suatu ukuran untuk menentukan seberapa melengkungnya sebuah elips. Nilai eksentrisitas berada pada rentang 0 hingga 1. Eksentrisitas dapat ditentukan dengan rumus:

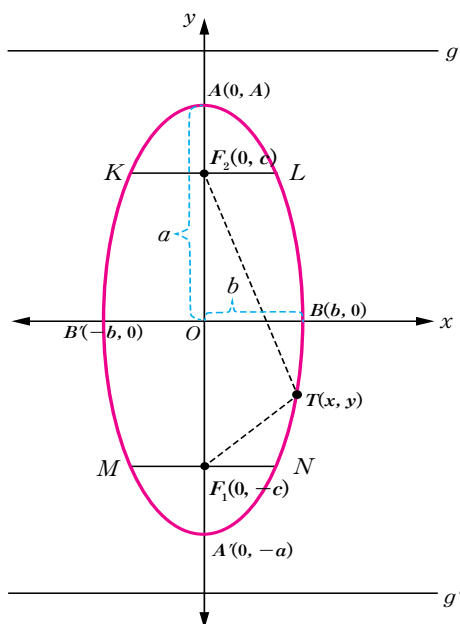
Dari Gambar 1.16, persamaan elips adalah $(x-m)^2 b^2 + (y-n)^2 a^2 = a^2 b^2$ atau $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$. Adapun unsur-unsur elips sebagai berikut.

- ▶ Titik fokus elips adalah $F_1(m-c, n)$ dan $F_2(m+c, n)$.
- ▶ Pusat elips terletak pada titik $P(m, n)$.
- ▶ Puncak elips adalah titik-titik $A(m+a, n)$, $A'(m-a, n)$, $B(m, n+b)$, dan $B'(m, n-b)$.

Untuk unsur lainnya, seperti panjang sumbu mayor, panjang sumbu minor, eksentrisitas, dan persamaan direktriks dapat dilihat pada unsur-unsur elips horizontal yang berpusat pada titik $O(0, 0)$.

b. Elips Vertikal

Elips vertikal adalah elips dengan sumbu mayor yang sejajar dengan sumbu- y . Pada bagian ini kamu akan mempelajari persamaan elips horizontal dengan titik pusat $O(0, 0)$ dan titik pusat $P(m, n)$. Pada Gambar 1.17 terlihat titik fokus $F_1(0, -c)$, titik fokus $F_2(0, c)$, sumbu mayor yang terletak pada sumbu- y , pusat elips yang terletak pada titik $O(0, 0)$, dan jumlah jarak titik sebarang $T(x, y)$ terhadap kedua fokus sama dengan $2a$.



Gambar 1.17 Elips Vertikal dengan Titik Pusat $O(0, 0)$



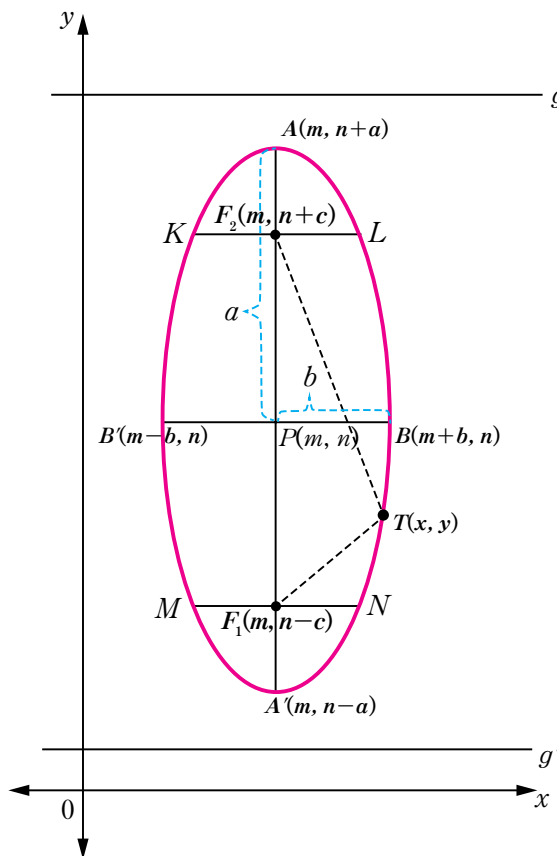
Ayo Mengomunikasikan

Dengan menggunakan proses seperti saat menentukan persamaan elips horizontal dengan titik pusat $O(0, 0)$, coba tunjukkan bahwa persamaan elips vertikal dengan titik pusat $O(0, 0)$ adalah

$$b^2 y^2 + a^2 x^2 = a^2 b^2 \text{ atau } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Diskusikan dengan kelompokmu, kemudian presentasikan hasilnya di depan kelas.

Dengan memperhatikan Gambar 1.18, terlihat titik fokus $F_1(m, n - c)$, titik fokus $F_2(m, n + c)$, sumbu mayor yang sejajar dengan sumbu- y , pusat elips yang terletak pada titik $P(m, n)$, dan jumlah jarak titik sebarang $T(x, y)$ terhadap kedua fokus sama dengan $2a$.



Gambar 1.18 Elips Vertikal dengan Titik Pusat $P(m, n)$



Ayo Berdiskusi

Dengan menggunakan proses seperti saat menentukan persamaan elips horizontal dengan titik pusat $P(m, n)$, coba kamu tunjukkan bahwa persamaan elips vertikal dengan titik pusat $P(m, n)$ adalah

$$b^2(y - n)^2 + a^2(x - m)^2 = a^2b^2 \text{ atau } \frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1.$$

Diskusikan dengan kelompokmu.



Ayo Bereksplorasi 1.2

Kamu telah memperoleh empat kondisi elips, yaitu elips horizontal dengan titik pusat $O(0, 0)$, elips horizontal dengan titik pusat $P(m, n)$, sumbu mayor elips tersebut berada pada titik pusat $O(0, 0)$, dan elips vertikal dengan titik pusat $P(m, n)$. Diskusikanlah dalam kelompokmu untuk melengkapi unsur-unsur elips pada Tabel 1.1 berikut.

Tabel 1.1 Rangkuman Unsur-Unsur Elips

Indikator	Elips Horizontal		Elips Vertikal	
	Pusat $O(0, 0)$	Pusat $P(m, n)$	Pusat $O(0, 0)$	Pusat $P(m, n)$
Titik pusat	$O(0, 0)$	$P(m, n)$	$O(0, 0)$	$P(m, n)$
Persamaan	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	...	...	...
Titik puncak	...	...	...	...
Ciri khas	$a > b$ dan $c^2 = a^2 - b^2$	...	...	...
Titik fokus	...	...	...	...
Persamaan direktriks	...	...	...	...
Eksentrisitas	...	...	...	...
Panjang <i>latus rectum</i>	...	...	...	...



Ayo Mengomunikasikan

Presentasikan hasil diskusi kelompok untuk mengisi Tabel 1.1 di depan kelas.

Contoh Soal 1.7

Tentukan persamaan elips dengan titik pusat $O(0,0)$, titik-titik fokus $(4,0)$ dan $(-4,0)$, serta panjang sumbu mayor 12.

Alternatif penyelesaian:

Fokus terletak pada titik $(4,0)$ dan titik $(-4,0)$ sehingga sumbu mayor elips tersebut berada pada sumbu- x . Kamu dapat menggunakan persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Karena titik-titik fokus $(4,0)$ dan $(-4,0)$, nilai $c = 4$. Diketahui pula bahwa panjang sumbu mayornya adalah 12 sehingga

$$2a = 12 \text{ atau } a = 6.$$

Selanjutnya, substitusikan nilai $a = 6$ dan $c = 4$ ke persamaan $b^2 = a^2 - c^2$ sehingga diperoleh

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Contoh Soal 1.8

Tentukan persamaan elips dengan titik pusat $(1, -2)$ jika salah satu titik fokusnya adalah $(1, 1\frac{1}{2})$ dan panjang sumbu minornya adalah 1.

Alternatif penyelesaian:

Absis pada titik pusat $(1, -2)$ dan titik fokus $(1, 1\frac{1}{2})$ sama, yaitu 1, sehingga sumbu mayor elips tersebut sejajar dengan sumbu- y (elips vertikal). Oleh karena itu, persamaan elips tersebut dapat ditentukan menggunakan rumus

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

Pusat elips terletak pada titik $(1, -2)$ sehingga

$$m = 1 \text{ dan } n = -2.$$

Fokus terletak pada titik $(1, 1\frac{1}{2})$ di atas pusat elips sehingga

$$m = 1 \text{ dan } n + c = 1\frac{1}{2}.$$

Dengan menyubstitusi nilai $n = -2$ ke persamaan $n + c = 1\frac{1}{2}$, diperoleh

$$(-2) + c = 1\frac{1}{2}$$

maka

$$c = 3\frac{1}{2} \text{ atau } c = \frac{7}{2}.$$

Panjang sumbu minor adalah 1 sehingga $b = \frac{1}{2}$.

Dengan menyubstitusi nilai $b = \frac{1}{2}$ dan $c = \frac{7}{2}$ ke persamaan $a^2 = b^2 + c^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{49}{4} = \frac{50}{4}. \end{aligned}$$

Dengan menyubstitusi $a^2 = \frac{50}{4}$ dan $b^2 = \frac{1}{4}$ ke rumus $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, diperoleh persamaan elips sebagai berikut:

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{50}{4}} = 1 \text{ atau } 4(x-1)^2 + \frac{4(y+2)^2}{50} = 1.$$

Contoh Soal 1.9

Diketahui persamaan suatu elips $9x^2 + 4y^2 = 36$. Tentukan unsur-unsur elips berikut:

- titik pusat,
- titik fokus,
- titik puncak,
- panjang sumbu mayor,
- panjang sumbu minor,
- panjang *latus rectum*,

- g. persamaan direktriks, dan
- h. nilai eksentrisitas dari elips tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Bentuk persamaan elips $9x^2 + 4y^2 = 36$ harus diubah ke bentuk $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ sehingga

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh

$$a^2 = 9 \text{ dan } b^2 = 4.$$

Dengan menyubstitusi nilai $a^2 = 9$ dan $b^2 = 4$ ke persamaan $c^2 = a^2 - b^2$, diperoleh

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

Dengan demikian, unsur-unsur elips dengan persamaan $9x^2 + 4y^2 = 36$ adalah sebagai berikut.

- a. Titik pusat berada pada koordinat $O(0,0)$.
- b. Titik fokus terletak sejajar dengan sumbu- y , yaitu titik $(0, -\sqrt{5})$ dan titik $(0, \sqrt{5})$.
- c. Titik puncak sejajar sumbu- y , yaitu $(0, -3)$ dan $(0, 3)$.
Titik puncak sejajar sumbu- x , yaitu $(2, 0)$ dan $(-2, 0)$.
- d. $a^2 = 9$ sehingga panjang sumbu mayor adalah $2a = 6$.
- e. $b^2 = 4$ sehingga panjang sumbu minor adalah $2b = 4$.
- f. Panjang latus rectum adalah $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$.
- g. Karena $y = -\frac{a^2}{c} = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ atau $y = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}}$, persamaan direktriksnya adalah $y = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ atau $y = \frac{9}{\sqrt{5}}$.
- h. Nilai eksentrisitasnya adalah $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Contoh Soal 1.10

Tentukan persamaan elips jika kedua titik fokusnya adalah $(-2,1)$ dan $(4,1)$ serta kedua titik puncaknya adalah $(-4,1)$ dan $(6,1)$.

Alternatif penyelesaian:

Fokus terletak pada titik $(-2,1)$ dan titik $(4,1)$. Karena ordinatnya sama, yaitu 1, sumbu mayor elips sejajar dengan sumbu- x (elips horizontal). Dengan demikian, persamaan elips dapat ditentukan menggunakan rumus

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Titik pusat elips berada di tengah-tengah titik fokus sehingga

$$(m,n) = \left(\frac{(-2+4)}{2}, \frac{(1+1)}{2} \right) = (1,1).$$

Sebelum mencari nilai a dan b , tentukan terlebih dahulu nilai c yang dapat diperoleh dari jarak dua titik fokus.

$$2c = \sqrt{(4 - (-2))^2 - (1 - 1)^2} = 6.$$

Karena $2c = 6$ maka $c = 3$.

Nilai a dapat diperoleh dari titik puncak $(-4,1)$ dan $(6,1)$. Jarak titik puncak ini merupakan sumbu mayor karena elips sejajar dengan sumbu- x sehingga

$$2a = \sqrt{(6 - (-4))^2 - (1 - 1)^2} = 10.$$

Karena $2a = 10$ maka $a = 5$.

Untuk menentukan nilai b , kamu dapat menyubstitusi nilai $a = 5$ dan $c = 3$ ke persamaan

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ atau } b^2 = a^2 - c^2$$

sehingga

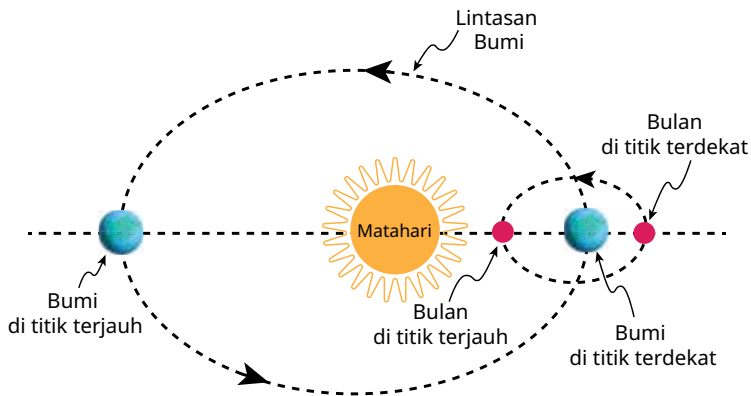
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Karena $a = 5$ maka $a^2 = 25$, dan $b = 4$ maka $b^2 = 16$, sehingga persamaan elipsnya adalah $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$.



Tahukah Kamu

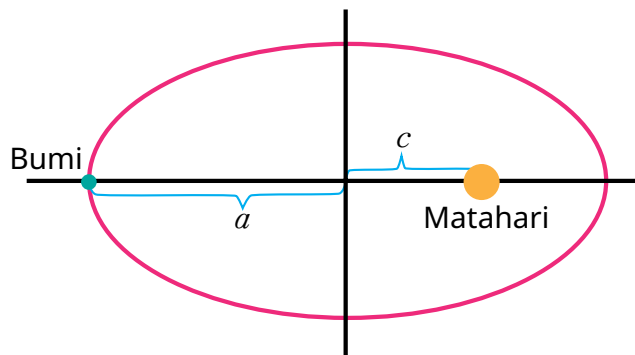
Planet-planet yang berada di tata surya memiliki lintasan berbentuk elips dan mengelilingi Matahari, termasuk orbit dari Bumi (Gambar 1.19). Hal ini sesuai dengan tiga Hukum Kepler, yaitu (1) planet bergerak dalam orbit elips dengan Matahari sebagai fokusnya, (2) sebuah planet menempuh area ruang yang sama dalam jumlah waktu yang sama di mana pun ia berada dalam orbitnya, dan (3) periode orbit sebuah planet sebanding dengan ukuran orbitnya.



Gambar 1.19 Orbit Bumi terhadap Matahari Berbentuk Elips

Misalkan jarak maksimum Bumi dari Matahari adalah 94,56 juta mil dan jarak minimumnya adalah 91,45 juta mil. Dapatkah kamu mengestimasi nilai eksentrisitas dari orbit bumi, panjang sumbu mayor, dan panjang sumbu minornya?

Dari Gambar 1.19 dapat dibuat sketsa seperti Gambar 1.20 berikut.



Gambar 1.20 Sketsa Orbit Bumi Mengelilingi Matahari

Jarak maksimum Bumi dari Matahari adalah 94,56 juta mil sehingga dapat dinyatakan dengan

$$a + c = 94,56.$$

Jarak minimum Bumi dari Matahari sebesar 91,45 juta mil sehingga dapat dinyatakan dengan

$$a - c = 91,45.$$

Dari kedua persamaan tersebut, dengan mengeliminasi peubah a , diperoleh

$$2c = 3,11 \text{ atau } c = 1,555.$$

Dengan menyubstitusi nilai $c = 1,555$ ke salah satu persamaan (misalkan persamaan $a + c = 94,56$), diperoleh

$$a + 1,555 = 94,56$$

$$a = 93,005.$$

Dari $a = 93,005$ dan $c = 1,555$, kamu dapat menentukan nilai eksentrisitas, yaitu

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1,555}{93,005} = 0,0167.$$

Panjang sumbu mayor dapat ditentukan dengan

$$2a = 2(93,005) = 186,01 \text{ juta mil.}$$

Panjang sumbu minor dapat ditentukan dengan menyubstitusi nilai $a = 93,005$ dan $c = 1,555$ ke persamaan $b^2 = a^2 - c^2$ sehingga

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a^2 - c^2} \\ &= \sqrt{(93,005)^2 - (1,555)^2} \\ &= 92,992. \end{aligned}$$

Dengan demikian, panjang sumbu minor adalah

$$2b = 2(92,992) = 185,984 \text{ juta mil.}$$



Ayo Mencoba 1.5

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Diketahui elips dengan persamaan $\frac{(x-4)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$. Tentukan:

- koordinat titik pusat, koordinat titik puncak, dan koordinat titik fokus;
- persamaan garis sumbu mayor, panjang sumbu mayor, persamaan garis sumbu minor, dan panjang sumbu minor;
- nilai eksentrisitas dan persamaan direktriks;
- panjang *latus rectum*.

Alternatif penyelesaian:

Dari persamaan elips $\frac{(x-4)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, diperoleh

$$m = \dots \text{ dan } n = \dots$$

$$a^2 = \dots \text{ sehingga } a = \dots$$

$$b^2 = \dots \text{ sehingga } b = \dots$$

$$c^2 = \dots \text{ sehingga } c = \dots$$

- Kamu menentukan koordinat titik pusat, koordinat titik puncak, dan koordinat titik fokus.

- Kamu menentukan persamaan garis sumbu mayor, panjang sumbu mayor, persamaan garis sumbu minor, dan panjang sumbu minor.



Ayo Mengingat Kembali

Ingat bahwa untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik, misalkan $A(x_a, y_a)$ dan $B(x_b, y_b)$, kamu dapat menggunakan

$$\frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{x - x_a}{x_b - x_a}.$$

Panjang ruas garis AB dapat ditentukan menggunakan

$$\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Untuk menentukan persamaan garis sumbu mayor, perhatikan fokus elips berada pada titik ... dan titik ... sehingga dengan menggunakan persamaan

$$\frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{x - x_a}{x_b - x_a}, \text{ diperoleh}$$

Untuk menentukan panjang sumbu mayor, kamu dapat menggunakan $\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$ sehingga panjang sumbu mayor adalah

Untuk menentukan persamaan garis sumbu minor, perhatikan titik pusat pada sumbu minor, yaitu titik ... dan titik ... sehingga

Panjang sumbu minornya adalah

- c. Kamu menentukan nilai eksentrisitas dan persamaan direktriks.
-
-

- d. Kamu menentukan panjang *latus rectum*.
-

2. Tentukan persamaan elips yang berpusat pada titik $O(0,0)$ jika nilai eksentrisitasnya sebesar $\frac{4}{5}$ dan jarak kedua fokusnya adalah 16.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $e = \frac{4}{5}$. Nilai eksentrisitas dapat diperoleh dari $e = \frac{c}{a}$ sehingga $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Jarak kedua fokus sebesar 16 sehingga $2c = 16$ atau $c = 8$.

Dengan menyubstitusi nilai $c = 8$ ke persamaan $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, diperoleh

Setelah kamu memperoleh nilai a , substitusikan nilai tersebut pada persamaan $b^2 = a^2 - c^2$ sehingga diperoleh

Kamu telah memperoleh nilai a dan b , selanjutnya substitusikan kedua nilai tersebut pada persamaan elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Jadi, persamaan elipsnya adalah

3. Tentukan persamaan elips jika titik fokus terletak pada sumbu x dan simetris terhadap titik pusat koordinat, panjang sumbu mayor sebesar 20, serta nilai eksentrisitas sebesar $\frac{3}{5}$.

Alternatif penyelesaian:

Panjang sumbu mayor sebesar 20 sehingga $2a = \dots$ atau $a = \dots$

Dengan menggunakan nilai eksentrisitas sebesar $\frac{3}{5}$ dan nilai a , diperoleh

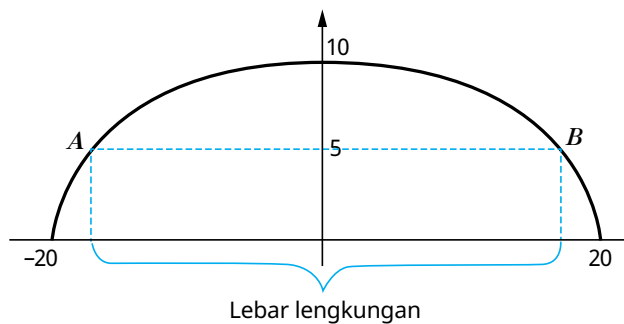
Setelah kamu memperoleh nilai a dan c , substitusikan kedua nilai tersebut pada persamaan $b^2 = a^2 - c^2$ sehingga

Dengan menyubstitusi nilai a dan b ke persamaan elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kamu memperoleh persamaan elips

-
4. Suatu lengkungan berbentuk setengah elips dengan lebar alas 40 meter dan tinggi 10 meter. Berapa lebar lengkungan itu pada ketinggian 5 meter dari alas?

Alternatif penyelesaian:

Diketahui lebar alas 40 meter sehingga panjang sumbu mayor adalah 40 meter. Karena tinggi lengkungan 10 meter, panjang sumbu minor adalah 20 meter. Kamu akan menentukan lebar lengkungan pada ketinggian 5 meter dari alas. Gambar 1.21 berikut menunjukkan sketsa lengkungan berdasarkan unsur-unsur yang diketahui.



Gambar 1.21 Sketsa Lengkungan dengan Panjang Sumbu Mayor 40 dan Panjang Sumbu Minor 20

Dari Gambar 1.21, pusat lengkungan dianggap berada pada titik pusat koordinat, yaitu ..., sehingga persamaannya adalah

Untuk menentukan lebar lengkungan pada ketinggian 5 meter, kamu dapat menganggap bahwa $y = 5$. Substitusikan nilai $y = 5$ ke persamaan yang diperoleh sehingga

Dari perhitungan tersebut, diperoleh nilai x sebesar Jadi, lebar lengkungan pada ketinggian 5 meter dari alas adalah



Ayo Berpikir Kreatif

Dari Soal Nomor 4 Ayo Mencoba 1.5, dapatkah kamu mencari alternatif jawaban yang lain?

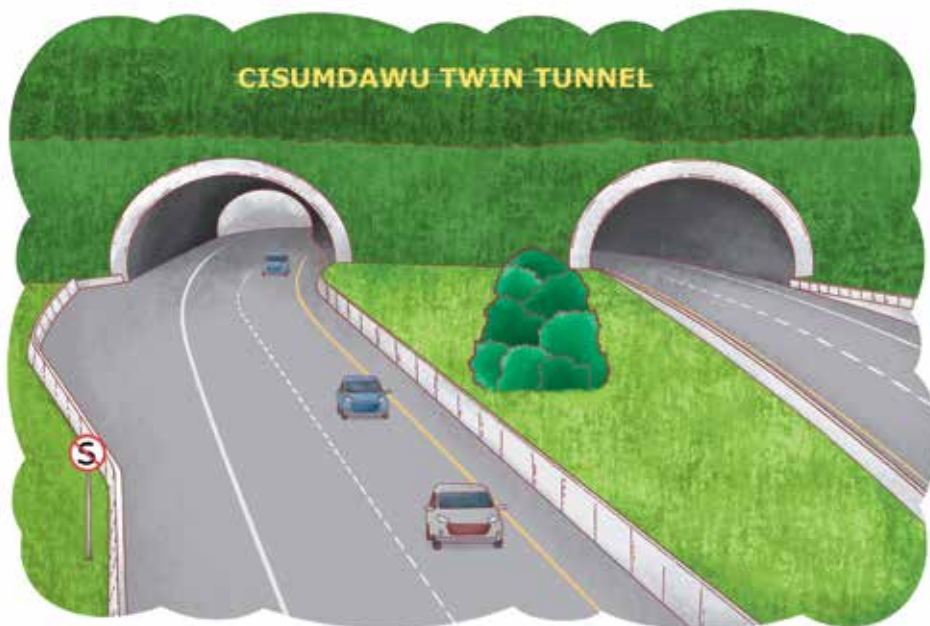
Latihan Soal Elips

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar.

1. Tentukan titik pusat, titik fokus, dan titik puncak elips untuk setiap persamaan berikut.
 - a. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$
 - b. $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$
 - c. $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
 - d. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
2. Tentukan persamaan elips jika diketahui unsur-unsur berikut.
 - a. titik fokus $(0, \pm 6)$ dan titik puncak $(0, \pm 7)$
 - b. titik puncak $(\pm 5, 0)$ dan *latus rectum* $\frac{4}{5}$

- c. titik fokus pada koordinat $(1, -1)$ dan $(1, -3)$ serta menyinggung sumbu- y
 - d. titik pusat $(4, -1)$, salah satu titik fokusnya adalah $(1, -1)$, dan melalui titik $(8, 0)$
3. Misalkan eksentrisitas suatu elips adalah $\frac{12}{13}$ dan jarak antartitik fokusnya adalah 36. Tentukan persamaan elips tersebut.
 4. Diketahui koordinat titik fokus suatu elips adalah $F_1(8, -1)$ dan $F_2(-4, -1)$ serta salah satu koordinat ujung sumbu minornya adalah $(2, 7)$. Tentukan persamaan elips tersebut.
 5. Suatu elips memiliki titik pusat $O(0, 0)$. Salah satu fokusnya terletak pada titik $(0, 3)$ dan panjang sumbu mayornya adalah 10. Tentukan persamaan elips tersebut.
 6. Sebuah satelit mengitari Bumi dengan lintasan berbentuk elips. Jarak terdekat satelit terhadap Bumi adalah 119 mil dan jarak terjauh 881 mil. Tentukan persamaan baku elips tersebut jika pusat lintasan satelit berada pada titik $(-2, 1)$.
 7. Bumi mengitari Matahari dengan lintasan berbentuk elips. Jarak Matahari terhadap Bumi yang terdekat adalah $9,3 \times 10^6$ mil, sedangkan jarak yang paling jauh adalah $9,6 \times 10^6$ mil. Tentukan persamaan lintasan Bumi tersebut jika Matahari terletak pada salah satu titik fokusnya dan menganggap titik pusat adalah $(0, 0)$.
 8. Komet Halley memiliki orbit berbentuk elips dengan Matahari sebagai salah satu fokusnya. Eksentrisitas dari orbit kira-kira 0,967. Panjang sumbu utama mendekati 35,88 satuan astronomis (satuan astronomis adalah sekitar 93 juta mil).
 - a. Temukan persamaan orbit. Tempatkan pusat orbit pada titik asal dan sumbu mayor pada sumbu- x .
 - b. Carilah jarak terpanjang (*aphelion*) dan jarak terpendek (*perihelion*) dari pusat Matahari ke pusat Komet.
 - c. Gunakan aplikasi seperti GeoGebra untuk membuat grafik persamaan orbit.

9. Sebuah terowongan dibangun berbentuk setengah elips dengan panjang elips dan ketinggian busur berturut-turut adalah 10 meter dan 6 meter. Jika seorang sopir membawa truk barang dengan lebar 5 meter dan tinggi 5 meter, apakah truk itu dapat melewati terowongan tersebut? Jelaskan.
10. Sebuah terowongan kembar yang terdapat di ruas Jalan Tol Cisumdawu Km. 169, sering disebut *Cisumdawu Twin Tunnel*, dibangun berbentuk elips sebagian (lihat Gambar 1.22).



Gambar 1.22 Terowongan Cisumdawu atau *Cisumdawu Twin Tunnel*

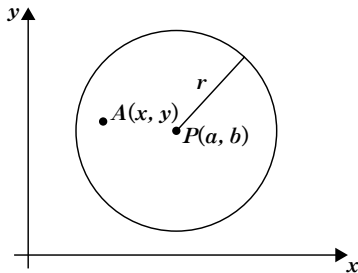
Setiap *Cisumdawu Twin Tunnel* memiliki panjang 472 meter dan diameter 14 meter. Tentukan persamaan elips utuh dari bentuk salah satu terowongan tersebut jika ketinggian elips penuh adalah sebesar 5 meter.

C. Kedudukan Titik dan Garis terhadap Lingkaran

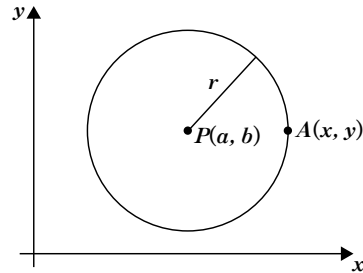
Sebelum mempelajari materi persamaan garis singgung lingkaran, kamu terlebih dahulu harus memahami materi kedudukan titik dan kedudukan garis terhadap lingkaran. Kedua materi tersebut menjadi materi prasyarat yang harus dikuasai selain persamaan lingkaran yang telah dipelajari pada Subbab A.

1. Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

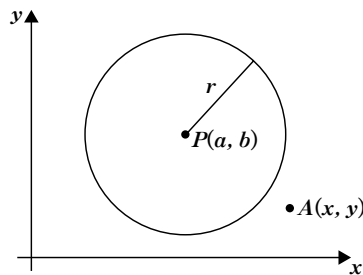
Kedudukan titik $A(x,y)$ terhadap suatu lingkaran ditentukan dengan cara menyubstitusikan titik $A(x,y)$ ke persamaan lingkaran, baik lingkaran dengan persamaan umum maupun persamaan baku. Dengan kondisi ini, ada tiga kemungkinan kedudukan titik $A(x,y)$ terhadap lingkaran (lihat Gambar 1.23), yaitu titik $A(x,y)$ di dalam lingkaran (Gambar a), titik $A(x,y)$ pada lingkaran (Gambar b), dan titik $A(x,y)$ di luar lingkaran (Gambar c).



(a) Titik $A(x,y)$ di Dalam Lingkaran



(b) Titik $A(x,y)$ pada Lingkaran



(c) Titik $A(x,y)$ di Luar Lingkaran

Gambar 1.23 Kedudukan Titik $A(x,y)$ terhadap Lingkaran

Kuasa titik dapat digunakan sebagai salah satu cara untuk menentukan kedudukan titik terhadap lingkaran. *Kuasa titik* adalah nilai yang diperoleh dari substitusi suatu titik (misalkan titik $A(x,y)$ jika menggunakan konteks Gambar 1.23) terhadap persamaan lingkaran. Terdapat tiga kemungkinan nilai kuasa titik, yaitu sebagai berikut.

- Kuasa titik bernilai negatif maka titik tersebut berada di dalam lingkaran.
- Kuasa titik bernilai nol maka titik tersebut berada pada lingkaran.
- Kuasa titik bernilai positif maka titik tersebut berada di luar lingkaran.

Contoh Soal 1.11

Selidiki apakah titik $A(5, -2)$ berada di dalam lingkaran

$$L \equiv (x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 16.$$

Alternatif penyelesaian:

Diketahui titik $A(5, -2)$ dan persamaan lingkaran

$$L \equiv (x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

sehingga nilai kuasa titik $A(5, -2)$ terhadap lingkaran tersebut adalah

$$\begin{aligned} K_{A(5, -2)} &= (5 - 6)^2 + (-2 + 5)^2 - 16 \\ &= (-1)^2 + (3)^2 - 16 = -6. \end{aligned}$$

Karena kuasa titik $A(5, -2)$ bernilai negatif, titik tersebut berada di dalam lingkaran $L \equiv (x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 16$.

Contoh Soal 1.12

Tentukan kedudukan titik $A(1, -2)$ terhadap lingkaran

$$L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0.$$

Alternatif penyelesaian:

Diketahui titik $A(1, -2)$ dan persamaan lingkaran

$$L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0.$$

Langkah pertama adalah menentukan nilai kuasa titik $A(1, -2)$, yaitu

$$K_{A(1, -2)} = 1^2 + (-2)^2 - 8(1) - 2(-2) - 8 = -7.$$

Karena kuasa titik $A(1, -2)$ bernilai negatif, titik tersebut berada di dalam lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$.

**Ayo Mencoba 1.6**

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

Selidiki apakah titik $A(8, 3)$ berada di dalam lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Nilai kuasa titik $K_{A(8,3)}$ adalah ... sehingga titik $A(8,3)$... lingkaran.

Contoh Soal 1.13

Selidiki apakah titik $A(8, -5)$ berada pada lingkaran $L \equiv (x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 4$.

Alternatif penyelesaian:

Syarat bahwa suatu titik berada pada lingkaran adalah kuasa titik bernilai nol. Pada contoh soal diketahui titik $A(8, -5)$ dan persamaan lingkaran $L \equiv (x - 6)^2 + (y + 5)^2 - 4 = 0$ sehingga

$$\begin{aligned}K_A(8, -5) &= (8 - 6)^2 + (-5 + 5)^2 - 4 \\&= 2^2 + 0 - 4 = 0.\end{aligned}$$

Jadi, titik $A(8, -5)$ terletak pada lingkaran $L \equiv (x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 4$ karena nilai kuasa titik $K_{A(8, -5)} = 0$.



Ayo Mencoba 1.7

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian!

1. Selidiki apakah titik $A(3, -3)$ berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$.

Alternatif penyelesaian:

Jadi, titik $A(3, -3)$ berada ... lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$ karena

2. Tentukan kedudukan titik $A(7, 5)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Jadi, titik $A(7, 5)$ berada ... lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ karena

Contoh Soal 1.14

Selidiki apakah titik $A(4, 3)$ berada di luar lingkaran $L \equiv (x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 16$.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui titik $A(4, 3)$ dan persamaan lingkaran

$$L \equiv (x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

sehingga

$$K_{A(4,3)} = (4 - 6)^2 + (3 + 5)^2 - 16 = 52.$$

Jadi, titik $A(4, 3)$ terletak di luar lingkaran $L \equiv (x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 16$, karena diperoleh nilai kuasa titik $K_{A(4,3)} > 0$.

Contoh Soal 1.15

Selidiki apakah titik $A(5, -3)$ berada di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$. Apabila berada di luar lingkaran, berapa jarak titik A terhadap pusat lingkaran?

Alternatif penyelesaian:

Diketahui titik $A(5, -3)$ dan persamaan lingkaran

$$L \equiv x^2 + y^2 - 18 = 0$$

sehingga

$$K_{A(5,-3)} = (5)^2 + (-3)^2 - 18 = 16.$$

Jadi, titik $A(5, -3)$ berada di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$ karena nilai kuasa titik $K_{A(5,-3)} > 0$.

Selanjutnya, kamu perlu menentukan jarak titik A terhadap lingkaran. Lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$ memiliki titik pusat $O(0, 0)$ sehingga jarak titik $A(5, -3)$ terhadap pusat lingkaran adalah

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{(5 - 0)^2 + (-3 - 0)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}. \end{aligned}$$

**Petunjuk**

Kamu dapat mengingat kembali materi vektor, yaitu cara menentukan jarak dua titik A dan B dapat menggunakan rumus

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Tentukan kedudukan titik $A(8,3)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

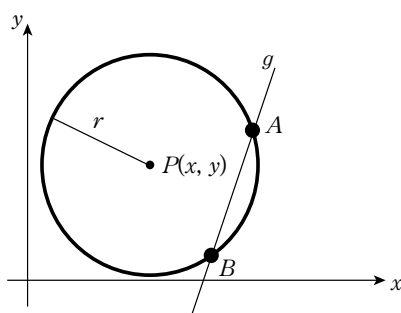
Jadi, titik $A(8,3)$ berada ... lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$ karena

2. Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

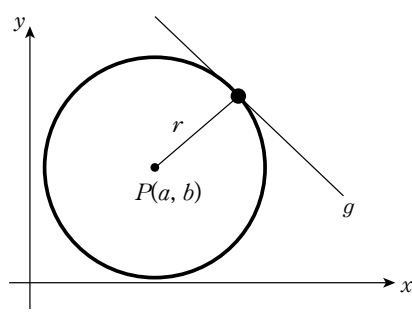
Seperti kedudukan titik pada lingkaran, terdapat pula tiga kedudukan garis terhadap lingkaran, di antaranya:

- garis memotong lingkaran,
- garis menyinggung lingkaran, dan
- garis tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran.

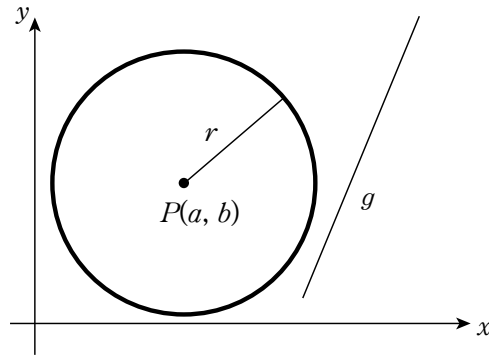
Secara geometris, ketiga kedudukan garis tersebut dapat dilihat pada Gambar 1.24.



(a) Garis g Memotong Lingkaran



(b) Garis g Menyinggung Lingkaran



(c) Garis g Tidak Memotong dan Tidak Menyentuh Lingkaran

Gambar 1.24 Hubungan Garis g terhadap Lingkaran

Secara aljabar, kedudukan garis g terhadap lingkaran dapat ditentukan dengan menyubstitusikan persamaan garis g ke persamaan garis lingkaran.

Misalkan diketahui persamaan garis g adalah $y = mx + k$ dan persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Dengan menyubstitusikan persamaan garis $y = mx + k$ ke persamaan lingkaran L , diperoleh

$$x^2 + (mx + k)^2 + Ax + B(mx + k) + C = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2m x k + k^2 + Ax + Bmx + Bk + C = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0.$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan $a = (1 + m^2)$, $b = (2mk + A + Bm)$, dan $c = k^2 + Bk + C$.



Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kamu tentang diskriminan saat mempelajari fungsi kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ pada jenjang sebelumnya?



Ayo Berpikir Kritis

Berikanlah alasan dari setiap kondisi berikut.

1. Jika nilai diskriminan pada fungsi kuadrat $(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai positif ($D > 0$), maka kedudukan garis g memotong lingkaran L .

2. Jika nilai diskriminan pada fungsi kuadrat $(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai nol ($D = 0$), maka garis g bersinggungan dengan lingkaran L .
3. Jika nilai diskriminan pada fungsi kuadrat $(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai negatif ($D < 0$), maka garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran L .

Contoh Soal 1.16

Selidikilah kedudukan garis $g: y = 3x - 2$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Dengan menyubstitusi $y = 3x - 2$ terhadap persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$, diperoleh

$$x^2 + (3x - 2)^2 - 6x - 8(3x - 2) + 21 = 0$$

$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 6x - 24x + 16 + 21 = 0$$

$$10x^2 - 42x + 41 = 0$$

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$a = 10, b = -42, \text{ dan } c = 41.$$

Selanjutnya, substitusikan nilai a , b , dan c ke rumus diskriminan sehingga diperoleh

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-42)^2 - 4(10)(41)$$

$$= 124.$$

Karena nilai diskriminan $D > 0$, berarti garis $g: y = 3x - 2$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

Contoh Soal 1.17

Selidikilah kedudukan garis $g: y + 3x - 2 = 0$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Dengan menyubstitusi $y = -3x + 2$ terhadap persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$, diperoleh

$$x^2 + (-3x + 2)^2 - 6x - 8(-3x + 2) + 21 = 0$$

$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 6x + 24x - 16 + 21 = 0$$

$$10x^2 + 6x + 9 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$a = 10, b = 6, \text{ dan } c = 9.$$

Selanjutnya, substitusikan nilai a , b , dan c ke rumus diskriminan sehingga diperoleh

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (6)^2 - 4(10)(9) = -324.$$

Karena nilai diskriminan $D < 0$, berarti garis $g: y + 3x - 2 = 0$ tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.



Ayo Berpikir Kreatif

Kasus pada buku ini adalah kasus untuk persamaan garis g dengan persamaan umum lingkaran. Dapatkah kamu mengkreasikan kasus persamaan lingkaran berbentuk $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dan persamaan lingkaran berbentuk $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$?

Contoh Soal 1.18

Tentukan titik potong lingkaran $L \equiv (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ dengan garis $y = 3$.

Alternatif penyelesaian:

Titik potong pada lingkaran L dengan garis $y = 3$ dapat ditentukan dengan menyubstitusikan $y = 3$ ke persamaan lingkaran $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$ sehingga

$$(x + 1)^2 + (3 - 3)^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Dengan memfaktorkan persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

sehingga $x_1 = -4$ atau $x_2 = 2$.

Jadi, garis $y = 3$ memotong lingkaran $L \equiv (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ pada titik $(-4, 3)$ dan $(2, 3)$.

Contoh Soal 1.19

Tunjukkan bahwa persamaan garis $g: 2x + y - 5 = 0$ menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Persamaan garis $g: 2x + y - 5 = 0$ ekuivalen dengan $y = 5 - 2x$. Dengan menyubstitusikan $y = 5 - 2x$ ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 5 = 0$, diperoleh

$$x^2 + (5 - 2x)^2 - 5 = 0$$

$$x^2 + (25 - 20x + 4x^2) - 5 = 0$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$a = 5, b = -20, \text{ dan } c = 20.$$

Untuk menunjukkan bahwa garis $g: 2x + y - 5 = 0$ menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 5 = 0$, nilai diskriminan pada fungsi kuadrat $5x^2 - 20x + 20 = 0$ harus bernilai 0.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-20)^2 - 4(5)(20)$$

$$= 400 - 400 = 0.$$

Diperoleh nilai diskriminan $D = 0$ sehingga dapat disimpulkan bahwa garis $g: 2x + y - 5 = 0$ menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 5 = 0$.



Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Selidiki apakah garis $h: x - y - 1 = 0$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$. Jika memotong, tentukan titik potong lingkaran tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Persamaan garis $h: x - y - 1 = 0$ ekuivalen dengan $y = x - 1$. Untuk menyelidiki apakah garis h dan lingkaran L berpotongan, perlu ditunjukkan bahwa persamaan kuadrat yang diperoleh dari substitusi persamaan garis h ke persamaan lingkaran L , memiliki diskriminan bernilai positif.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 4x - y - 2 &= 0 \\x^2 + (x - 1)^2 + 4x - (x - 1) - 2 &= 0 \\2x^2 + x &= 0.\end{aligned}$$

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$a = 2, b = 1, \text{ dan } c = 0$$

sehingga

$$\begin{aligned}D &= b^2 - 4ac \\&= 1^2 - 4(2)(0) = 1.\end{aligned}$$

Karena nilai diskriminan $D > 0$, berarti garis $h: x - y - 1 = 0$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$.

Faktorkan persamaan kuadrat $2x^2 + x = 0$ sehingga diperoleh

Substitusikan nilai x pada lingkaran L .

Untuk $x_1 = \dots$, diperoleh

$$x - y - 1 = 0$$

sehingga $y_1 = \dots$

Untuk $x_2 = \dots$, diperoleh

$$x - y - 1 = 0$$

sehingga $y_2 = \dots$

Dari proses ini, kamu memperoleh dua titik potong, yaitu ... dan ...

2. Diketahui garis $y = kx + 1$ dan lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Tentukan syarat k agar garis y tidak memotong lingkaran L .

Alternatif penyelesaian:

Untuk menyelidiki apakah garis $y = kx + 1$ dan lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ tidak berpotongan, perlu ditunjukkan bahwa persamaan kuadrat yang diperoleh dari substitusi persamaan garis y ke persamaan lingkaran L memiliki diskriminan bernilai negatif.

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

$$(x - 1)^2 + ((kx + 1) + 1)^2 = 4$$

$$(x - 1)^2 + (kx + 2)^2 = 4$$

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$a = \dots, b = \dots, \text{ dan } c = \dots$$

sehingga

$$D = b^2 - 4ac$$

Karena telah ditentukan pada soal bahwa garis $y = kx + 1$ tidak memotong lingkaran L , maka

Jadi, syarat k agar garis y tidak memotong lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ adalah

3. Tentukan nilai p agar garis $y = -x + p$ menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Garis $y = -x + p$ akan menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ apabila persamaan kuadrat yang diperoleh dari substitusi persamaan garis y ke persamaan lingkaran L memiliki diskriminan bernilai 0.

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$a = \dots, b = \dots, \text{ dan } c = \dots$$

sehingga

$$D = b^2 - 4ac$$

Karena telah ditentukan pada soal bahwa garis $y = -x + p$ menyinggung lingkaran L , maka

Latihan Soal Kedudukan Titik dan Garis terhadap Lingkaran

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar.

- Diketahui titik-titik $A(2,3)$, $B(2,8)$, $C(8,5)$, dan $D(5,3)$. Tentukan kedudukan titik-titik tersebut terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$.
- Tentukan batasan nilai a apabila diketahui
 - titik $P(a,1)$ terletak di dalam lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$
 - titik $P(a,1)$ terletak di luar lingkaran $L \equiv (x+3)^2 + (y-3)^2 = 13$.
- Tentukan nilai t yang memenuhi kedudukan titik $A(2t, -t)$ terletak pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y - 2 = 0$.

4. Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$. Tentukan kedudukan garis berikut terhadap lingkaran L .
 - a. $g: x + y = 2$
 - b. $k: x = 0$
5. Diketahui garis $y = kx + 1$ dan lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Tentukan syarat k agar garis y tidak memotong lingkaran L .
6. Tunjukkan bahwa persamaan garis $g: px + qy = r^2$ akan memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ pada dua titik berlainan apabila titik $N(p, q)$ berada di luar lingkaran.
7. Tentukan nilai p agar garis $y = -x + p$ menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$.

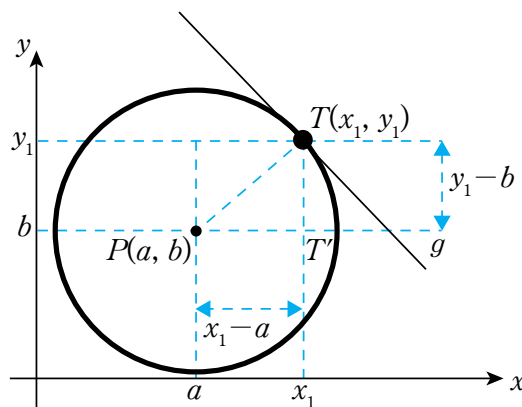
D. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Penentuan persamaan garis singgung lingkaran merupakan pengembangan dari permasalahan tentang kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran. Terdapat tiga cara yang dapat digunakan untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran, yaitu (1) titik singgung telah ditentukan, (2) kemiringan garis singgung lingkaran telah ditentukan, dan (3) sebuah titik di luar lingkaran yang telah ditentukan.

1. Titik Singgung pada Lingkaran Telah Ditentukan

Pada Gambar 1.25 tampak sebuah lingkaran dengan titik pusat $P(a, b)$ sehingga persamaan lingkaran dapat dinyatakan dalam bentuk

$$L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



Gambar 1.25 Garis Singgung g pada Lingkaran dan Titik Singgung $T(x_1, y_1)$

Misalkan titik $T(x_1, y_1)$ adalah titik singgung pada lingkaran L . Proses untuk menentukan persamaan garis singgung g pada lingkaran L dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut.

Langkah pertama

Perhatikan segitiga $PT'T$. Kemiringannya adalah $m_{PT} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$.



Langkah kedua

Karena garis PT dan garis g tegak lurus, berlaku $m_{PT}m_g = -1$, sehingga

$$\left(\frac{y_1 - b}{x_1 - a}\right)m_g = -1 \text{ atau } m_g = -\left(\frac{x_1 - a}{y_1 - b}\right).$$



Langkah ketiga

Persamaan garis g sendiri dapat ditentukan menggunakan persamaan $(y - y_1) = m_g(x - x_1)$ sehingga

$$\begin{aligned}(y - y_1) &= -\left(\frac{x_1 - a}{y_1 - b}\right)(x - x_1) \\ (y - y_1)(y_1 - b) &= -(x_1 - a)(x - x_1) \\ yy_1 - yb - y_1^2 + by_1 &= -xx_1 + x_1^2 + ax - ax_1.\end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan -1 , kemudian beberapa suku dipindah sehingga

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 &= yy_1 - yb + by_1 + xx_1 + ax_1 - ax \\ x_1^2 - ax_1 - ax_1 + y_1^2 - by_1 - by_1 &= yy_1 - yb + xx_1 - ax - ax_1 - by_1 \\ x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2 &= yy_1 - yb + xx_1 - ax - ax_1 - by_1 + a^2 + b^2 \\ (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &= xx_1 - ax + yy_1 - yb - ax_1 + a^2 - by_1 + b^2 \\ r^2 &= x(x_1 - a) + y(y_1 - b) - a(x_1 - a) - b(y_1 - b) \\ r^2 &= [x(x_1 - a) - a(x_1 - a)] + [y(y_1 - b) - b(y_1 - b)] \\ r^2 &= (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b).\end{aligned}$$

Persamaan terakhir inilah yang disebut *persamaan garis singgung g* pada lingkaran L di titik $T(x_1, y_1)$.

Perhatikanlah pola dari persamaan lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ menjadi persamaan garis singgung lingkaran di titik $T(x_1, y_1)$, yaitu

$$g: (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2.$$

Pola dapat dilihat juga dari $(x-a)^2$ menjadi $(x-a)(x_1-a)$ dan $(y-b)^2$ menjadi $(y-b)(y_1-b)$. Pola tersebut sering disebut *prinsip bagi adil* atau *prinsip pembagian adil* yang dapat digunakan untuk mencari persamaan garis singgung suatu lingkaran jika titik singgungnya diketahui.



Ayo Berdiskusi

Kamu telah mempelajari proses untuk menentukan garis singgung lingkaran g jika diketahui titik singgung dan lingkaran $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Diskusikanlah dengan kelompokmu apabila persamaan lingkarannya adalah $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ dan $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Contoh Soal 1.20

Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran tersebut yang melalui titik $A(-2, 7)$.

Alternatif penyelesaian:

Langkah pertama adalah memperhatikan bentuk persamaan lingkarannya. Pada contoh soal, persamaan lingkaran berbentuk

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $A(-2, 7)$ adalah

$$(x+2)(x_1+2) + (y-3)(y_1-3) = 16$$

$$(x+2)(-2+2) + (y-3)(7-3) = 16$$

$$4y = 28$$

$$y = 7.$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ yang melalui titik $A(-2, 7)$ adalah $y = 7$.

Contoh Soal 1.21

Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran tersebut yang melalui titik $A(8, -2)$.

Alternatif penyelesaian:

Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ yang melalui titik $A(8, -2)$ adalah

$$\begin{aligned}xx_a + yy_a - 8\frac{(x+x_a)}{2} - 2\frac{(y+y_a)}{2} - 8 &= 0 \\8x + (-2)y - 8\frac{(x+8)}{2} - 2\frac{(y+(-2))}{2} - 8 &= 0 \\8x - 2y - 4(x+8) - (y-2) - 8 &= 0 \\4x - 3y - 38 &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ yang melalui titik $A(8, -2)$ adalah $4x - 3y - 38 = 0$.



Ayo Mencoba 1.10

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1, -3)$ jika persamaan lingkarannya adalah $L \equiv x^2 + y^2 = 10$.

Alternatif penyelesaian:

Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1, -3)$ adalah

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 10$ yang melalui titik $Q(1, -3)$ adalah

2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1, -3)$ jika persamaan lingkarannya adalah $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Dengan menggunakan prinsip pembagian adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1, -3)$ adalah

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ yang melalui titik $Q(1, -3)$ adalah

3. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ yang melalui titik potong antara lingkaran L dengan garis $y = 3$.

Alternatif penyelesaian:

Langkah pertamamu adalah menentukan titik potong garis $y = 3$ terhadap lingkaran L . Adapun titik potong tersebut adalah

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

$$(x + 1) = \pm 3$$

sehingga

$$x_1 = 2 \text{ atau } x_2 = -4.$$

Untuk $x_1 = 2$, titik potongnya adalah $(2, 3)$ sehingga persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ melalui titik $(2, 3)$ dapat ditentukan menggunakan prinsip pembagian adil.

Untuk $x_2 = -4$,



Petunjuk

Kamu dapat menyelesaikan untuk kasus $x_2 = -4$ menggunakan cara yang sama untuk $x_1 = 2$.

2. Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Kemiringan m Diketahui

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang akan dicari adalah $y = mx + n$ dan persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$. Kamu dapat menyubstitusikan persamaan garis $y = mx + n$ ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ sehingga

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0.$$

Persamaan yang diperoleh merupakan bentuk persamaan kuadrat dengan $a = (1 + m^2)$, $b = 2mn$, dan $c = (n^2 - r^2)$.



Ayo Mengingat Kembali

Apakah kamu masih mengingat diskriminan saat mempelajari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ pada jenjang sebelumnya?

Apakah kamu juga masih mengingat bahwa jika nilai $D = 0$, berarti persamaan kuadrat memiliki satu akar real?

Dengan menyubstitusikan a , b , dan c pada rumus diskriminan, diperoleh

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (2mn)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - r^2) \\ &= 4m^2n^2 - 4n^2 + 4r^2 - 4m^2n^2 + 4m^2r^2 \\ &= -4n^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 \\ &= 4(m^2r^2 - n^2 + r^2). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan syarat bahwa “suatu garis menyinggung lingkaran jika nilai diskriminan persamaan kuadrat adalah nol”, maka

$$\begin{aligned}0 &= 4(m^2 r^2 - n^2 + r^2) \\0 &= m^2 r^2 - n^2 + r^2 \\n^2 &= r^2(m^2 + 1) \\n &= \pm \sqrt{r^2(m^2 + 1)} \\n &= \pm r \sqrt{(m^2 + 1)}\end{aligned}$$

Dengan menyubstitusikan nilai $n = \pm r \sqrt{(m^2 + 1)}$ ke persamaan garis $y = mx + n$, diperoleh persamaan garis singgung pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ dengan kemiringan m sebagai berikut:

$$y = mx \pm r \sqrt{(m^2 + 1)}.$$



Ayo Berdiskusi

Kamu telah mempelajari konsep menentukan garis singgung lingkaran jika diketahui kemiringan suatu garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$, yaitu

$$y = mx \pm r \sqrt{(m^2 + 1)}.$$

Diskusikanlah untuk menyelidiki pernyataan berikut dengan kelompokmu.

Jika kemiringan garis singgung lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ diketahui, persamaan garis singgungnya adalah

$$(y - b) = m(x - a) \pm r \sqrt{(m^2 + 1)}.$$

Contoh Soal 1.22

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ jika garis singgungnya mempunyai kemiringan 2.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan persamaan garis singgung yang akan dicari adalah $y = mx + n$. Nilai n dapat diperoleh dengan cara berikut:

$$\begin{aligned}n &= \pm r \sqrt{(m^2 + 1)} \\&= \pm 2 \sqrt{(2^2 + 1)} \\&= \pm 2 \sqrt{5}\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$n_1 = 2\sqrt{5} \text{ dan } n_2 = -2\sqrt{5}.$$

Dengan menyubstitusikan nilai n_1 dan n_2 pada persamaan $y = mx + n$, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ dengan kemiringan 2 adalah $y = 2x + 2\sqrt{5}$ dan $y = 2x - 2\sqrt{5}$.

Contoh Soal 1.23

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ jika garis singgungnya membentuk sudut 45° terhadap sumbu- x positif.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui garis singgung lingkaran membentuk sudut 45° terhadap sumbu- x positif. Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang akan kamu cari adalah

$$y = mx + n,$$

dengan m merupakan kemiringan garis yang dapat diperoleh dari tangen sudut 45° , yaitu

$$m = \tan 45^\circ = 1,$$

sehingga

$$\begin{aligned} y &= mx \pm r\sqrt{(m^2 + 1)} \\ &= (1)x \pm 2\sqrt{(1^2 + 1)} \\ &= x \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ yang membentuk sudut 45° terhadap sumbu- x positif adalah $y = x + 2\sqrt{2}$ dan $y = x - 2\sqrt{2}$.

Contoh Soal 1.24

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ jika garis singgungnya sejajar dengan garis $l: 2x - 3y + 4 = 0$.



Petunjuk

Dalam persamaan garis lurus, kemiringan berarti sama dengan tangen. Dengan demikian, kamu dapat menentukan kemiringan suatu garis lurus menggunakan definisi *tangen* pada trigonometri.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang kamu cari adalah $y = mx + n$. Garis singgung tersebut sejajar dengan garis $l: 2x - 3y + 4 = 0$ sehingga kemiringan garis singgung lingkaran dengan kemiringan garis l sama, yaitu $m = \frac{2}{3}$. Nilai n dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} n &= \pm r\sqrt{(m^2 + 1)} \\ &= \pm 2\sqrt{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1\right)} \\ &= \pm 2\sqrt{\frac{13}{9}} = \pm \frac{2}{3}\sqrt{13} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$n_1 = \frac{2}{3}\sqrt{13} \text{ dan } n_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{13}.$$

Jadi, garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ yang sejajar dengan garis $l: 2x - 3y + 4 = 0$ adalah

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{13} \text{ dan } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{13}.$$

Bentuk lain dari kedua persamaan garis singgung tersebut adalah

$$3y = 2x + 2\sqrt{13} \text{ dan } 3y = 2x - 2\sqrt{13}.$$

Contoh Soal 1.25

Diketahui suatu lingkaran $L \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran L yang tegak lurus dengan garis $l: -3x - y - 1 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Dari persamaan lingkaran $L \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$, diperoleh

$$a = -2, b = 1, \text{ dan } r = 2$$

Kemiringan garis $l: -3x - y - 1 = 0$ adalah $m_l = -3$. Misalkan kemiringan garis singgung yang akan dicari adalah m . Karena garis l tegak lurus dengan garis singgung yang dicari, maka

$$\begin{aligned} m \cdot m_l &= -1 \\ m \cdot (-3) &= -1 \\ m &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, kamu dapat menggunakan persamaan $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ untuk menyelesaikan masalah ini. Dengan menyubstitusikan nilai $a = 2$, $b = 1$, $r = 2$, dan $m = \frac{1}{3}$ pada persamaan tersebut, diperoleh

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x + 2) \pm 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1}$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \pm 2\sqrt{\frac{10}{9}} \quad (\text{kedua ruas dikali 3})$$

$$3y - 3 = x + 2 \pm 2\sqrt{10}$$

$$3y - x = 5 \pm 2\sqrt{10}.$$

Jadi, persamaan garis singgung $L \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ yang tegak lurus terhadap garis $l: -3x - y - 1 = 0$ adalah $3y - x = 5 + 2\sqrt{10}$ dan $3y - x = 5 - 2\sqrt{10}$.



Ayo Mencoba 1.11

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

Diberikan persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang tegak lurus terhadap garis $g: y - 2x - 3 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

Lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12$ memiliki titik pusat $(2, -3)$ dan jari-jarinya 5. Dengan demikian, persamaan lingkaran tersebut ekuivalen dengan

$$L \equiv (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang dicari adalah $y = mx + n$. Garis singgung tersebut tegak lurus dengan garis $g: y - 2x - 3 = 0$ sehingga kemiringan garis singgung lingkaran memenuhi $m \cdot m_g = -1$.

Berdasarkan perhitungan tersebut, diperoleh nilai kemiringan garis singgung $y = mx + n$ adalah

Untuk menentukan nilai n , kamu dapat menggunakan

$$n = \pm \sqrt{r^2(m^2 + 1)}$$

sehingga diperoleh

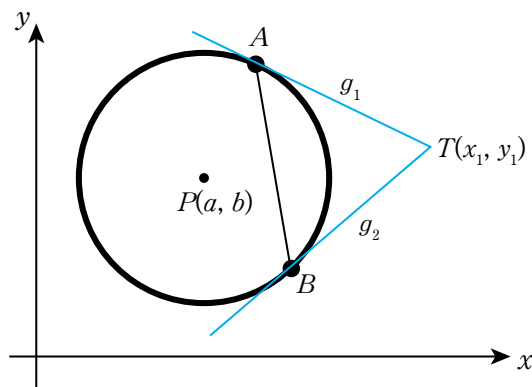
$$n_1 = \dots \text{ dan } n_2 = \dots$$

Selanjutnya, kamu substitusikan nilai m dan n ke persamaan garis singgung $y = mx + n$.

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12$ yang tegak lurus terhadap garis $g: y - 2x - 3 = 0$ adalah

3. Sebuah Titik di Luar Lingkaran Telah Ditentukan

Persamaan garis singgung lingkaran yang titik di luar lingkarannya diketahui, dapat ditentukan menggunakan pertolongan garis polar atau garis kutub. Pada Gambar 1.26, dari titik $T(x_1, y_1)$ yang terletak di luar lingkaran dapat dibuat dua buah garis yang menyinggung lingkaran.



Gambar 1.26 Lingkaran, Garis Singgung Lingkaran, dan Titik Singgung

Misalkan kedua garis singgung tersebut adalah g_1 dan g_2 . Pada gambar tampak garis g_1 menyinggung lingkaran di titik A dan garis g_2 menyinggung lingkaran di titik B . Garis yang menghubungkan titik A dengan titik B disebut *garis polar* atau *garis kutub*. Adapun titik A dan titik B disebut *titik polar* atau *titik kutub*. Penentuan garis polar pada lingkaran dapat dilihat pada Tabel 1.2.

Tabel 1.2 Persamaan Lingkaran dan Persamaan Garis Polar

Persamaan Lingkaran	Persamaan Garis Polar
$x^2 + y^2 = r^2$	$xx_1 + yy_1 = r^2$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$xx_1 + yy_1 + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$

Untuk memahami materi yang berkaitan dengan penentuan persamaan garis singgung lingkaran yang titik di luar garisnya diketahui, kamu dapat memperhatikan contoh-contoh soal berikut ini.

Contoh Soal 1.26

Tentukan persamaan garis singgung suatu lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ yang melalui titik $T(3, 2)$.

Alternatif penyelesaian:

Titik $T(3, 2)$ berada di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$. Misalkan sebuah garis melalui titik $T(3, 2)$ dan menyinggung lingkaran L di titik $A(x_a, y_a)$. Dengan demikian, persamaan garis polar yang melalui titik $A(x_a, y_a)$ adalah

$$xx_a + yy_a = r^2.$$

Karena titik $T(3, 2)$ melalui garis polar, persamaan garis polarnya adalah

$$3x + 2y = 4.$$

Persamaan garis polar di atas ekuivalen dengan persamaan

$$y = \frac{(4 - 3x)}{2}.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan di atas ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 x^2 + \left(\frac{(4-3x)}{2} \right)^2 &= 4 \\
 x^2 + \left(\frac{16-24x+9x^2}{4} \right) &= 4 \quad (\text{kedua ruas dikali 4}) \\
 4x^2 + 16 - 24x + 9x^2 &= 16 \\
 13x^2 - 24x &= 0.
 \end{aligned}$$

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh

$$x = 0 \text{ atau } x = \frac{24}{13}.$$

► **Untuk** $x = 0$

Substitusikan nilai $x = 0$ ke persamaan $y = \frac{(4-3x)}{2}$ sehingga diperoleh

$$y = \frac{(4-3x)}{2} = \frac{(4-3(0))}{2} = 2.$$

Kamu telah memperoleh salah satu titik polar, yaitu $(0, 2)$. Persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ yang melalui $(0, 2)$ adalah

$$\begin{aligned}
 xx_a + yy_a &= 4 \\
 (0)x + (2)y &= 4 \\
 2y &= 4 \\
 y &= 2.
 \end{aligned}$$



Ayo Mencoba 1.12

Lanjutkan proses penyelesaian pada Contoh Soal 1.26. Kamu dapat menggunakan konsep $x = 0$.

► **Untuk** $x = \frac{24}{13}$

Kamu dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik $x = \frac{24}{13}$ seperti langkah-langkah sebelumnya.

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ melalui titik $T(3, 2)$ adalah $y = 2$ dan

Contoh Soal 1.27

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ yang melalui titik $T(1, 6)$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan kemiringan garis singgung adalah m dan garis tersebut melalui titik $T(1, 6)$ sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = m(x - 1)$$

$$y = mx - m + 6.$$

Persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ dapat juga dinyatakan dengan

$$x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 19 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 + (y - 0)^2 - 19 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 0)^2 = 20.$$

Dari persamaan lingkaran di atas diperoleh $r^2 = 20$ sehingga persamaan garis singgung lingkaran $(x + 1)^2 + (y - 0)^2 = 20$ dengan gradien m adalah

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{(m^2 + 1)}$$

$$y - 0 = m(x + 1) \pm \sqrt{20}\sqrt{(m^2 + 1)}$$

$$y = mx + m \pm \sqrt{20m^2 + 20}.$$

Dengan demikian, diperoleh dua persamaan, yaitu

$$y = mx - m + 6$$

dan

$$y = mx + m \pm \sqrt{20m^2 + 20}$$

sehingga

$$mx - m + 6 = mx + m \pm \sqrt{20m^2 + 20}$$

$$-m + 6 = m \pm \sqrt{20m^2 + 20}$$

(pertukaran ruas)

$$m \pm \sqrt{20m^2 + 20} = -m + 6$$

$$\pm \sqrt{20m^2 + 20} = -2m + 6 \quad (\text{dikudratkan})$$

$$20m^2 + 20 = (-2m + 6)^2$$

$$20m^2 + 20 = 4m^2 - 24m + 36$$

$$16m^2 + 24m = 16.$$

Dengan memfaktorkan persamaan kuadrat $16m^2 + 24m = 16$, diperoleh

$$m = \frac{1}{2} \text{ atau } m = -2.$$

Dengan menyubstitusikan nilai m ke persamaan $y = mx - m + 6$, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ yang melalui titik $T(1, 6)$ adalah $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ dan $y = -2x + 8$.



Ayo Berpikir Kreatif

Dari Contoh Soal 1.26 dan 1.27, dapatkah kamu mencari alternatif jawaban yang lain?



Ayo Mencoba 1.13

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ yang melalui titik $T(3, 2)$.

Alternatif penyelesaian:

Titik $T(3, 2)$ berada di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ karena

$$L \equiv (3)^2 + (2)^2 - 2(3) + 4(2) - 5 = 10 > 0.$$

Misalkan sebuah garis melalui titik $T(3, 2)$ dan menyinggung lingkaran L di titik $A(x_a, y_a)$. Dengan demikian, persamaan garis polarnya yang melalui titik $A(x_a, y_a)$ adalah

Selanjutnya, substitusikan persamaan ini ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ sehingga diperoleh

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ yang melalui titik $T(3, 2)$ adalah

2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 16 = 0$ yang melalui titik $A(5, 4)$.

Alternatif penyelesaian:

Titik $A(5, 4)$ berada di luar lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 16 = 0$ karena

$$L \equiv (5 - 1)^2 + (4 - 2)^2 - 16 = 4 > 0.$$

Misalkan sebuah garis melalui titik $A(5, 4)$ dan menyinggung lingkaran L di titik $P(x_a, y_a)$. Dengan demikian, persamaan garis polarnya yang melalui titik $A(x_a, y_a)$ adalah

Selanjutnya, substitusikan persamaan ini ke persamaan lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 16 = 0$ sehingga diperoleh

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 16 = 0$ yang melalui titik $A(5, 4)$ adalah

Latihan Soal Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar.

- Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 3x + 4y - 10 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran L yang melalui titik:
 - $A(2, 2)$
 - $D(5, -2)$
- Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + 1\frac{1}{2}\right)^2 - 16 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung suatu lingkaran L jika
 - kemiringannya 2,
 - garis singgung membentuk sudut 60° terhadap sumbu- y positif.

3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(2, -3)$ dan menyinggung garis $l: 3x - 4y + 7 = 0$.
4. Tentukan nilai c agar garis $y + 2x = c$ menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$.
5. Diketahui lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - Ax - 10y + 4 = 0$. Tentukan nilai A yang memenuhi persamaan lingkaran tersebut menyinggung sumbu- x .
6. Diketahui titik $A(6, -8)$ dan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 100$. Tunjukkan bahwa titik A terletak pada lingkaran L , kemudian tentukan persamaan garis singgungnya.
7. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$ di titik berabsis 2.
8. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 34$ di titik yang berordinat 4.
9. Tentukan nilai q agar lingkaran $L \equiv (x - 2q)^2 + (y + 5)^2 - 4q^2 = 13$ menyinggung sumbu- x . Selanjutnya, carilah titik singgung antara lingkaran L dan sumbu- x .
10. Tentukan nilai p jika sebuah lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2px + q = 0$ berjari-jari 2 dan menyinggung garis $x - y = 0$.

Uji Kompetensi Bab 1

Selesaikanlah soal-soal berikut ini dengan benar.

1. Misalkan $a < 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 - ax + 2ay + 1 = 0$ mempunyai jari-jari 2. Tentukan koordinat titik pusat lingkaran tersebut.
2. Diketahui $P(h, k)$ dan r berturut-turut menyatakan titik pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$. Tentukan nilai dari $r + k - h$.
3. Diketahui lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3py - 30 = 0$ melalui titik $(-2, 1)$. Tentukan persamaan lingkaran yang sepusat, tetapi panjang jari-jarinya dua kali panjang jari-jari lingkaran tersebut.
4. Diketahui sebuah elips memiliki titik pusat $O(0, 0)$, salah satu fokusnya terletak pada titik $(0, 3)$, dan panjang sumbu mayornya adalah 10. Tentukan persamaan elips tersebut.

5. Tentukan panjang sumbu mayor dan sumbu minor pada persamaan elips $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
6. Diketahui lingkaran $L \equiv (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$ memotong garis $y = 4$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik potong lingkaran dan garis tersebut.
7. Tentukan persamaan garis yang sejajar dengan $x + 2y - 5 = 0$ dan membagi lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ menjadi dua bagian dengan luas yang sama.
8. Misalkan titik A dan titik B berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$ serta garis-garis singgung lingkaran yang melalui kedua titik tersebut berpotongan di titik $C(8, 1)$. Jika luas layang-layang yang melalui titik A , titik B , titik C , dan pusat lingkaran adalah 12, tentukanlah nilai k .
9. Diketahui dua fokus elips terletak pada sumbu- x . Panjang sumbu mayor dan sumbu minor secara berturut-turut adalah 10 dan 8. Tentukan persamaan elips yang menyinggung sumbu- y .
10. Di Kota Yogyakarta terdapat stasiun radio A yang memiliki daerah siaran yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ (dalam kilometer) dan stasiun radio B yang memiliki jangkauan siaran yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$ (dalam kilometer). Pemerintah Kota Yogyakarta memiliki kebijakan bahwa stasiun radio tidak boleh memiliki daerah siaran yang saling tumpang tindih pada frekuensi yang sama. Analisislah apakah kedua stasiun radio harus menggunakan frekuensi yang berbeda.

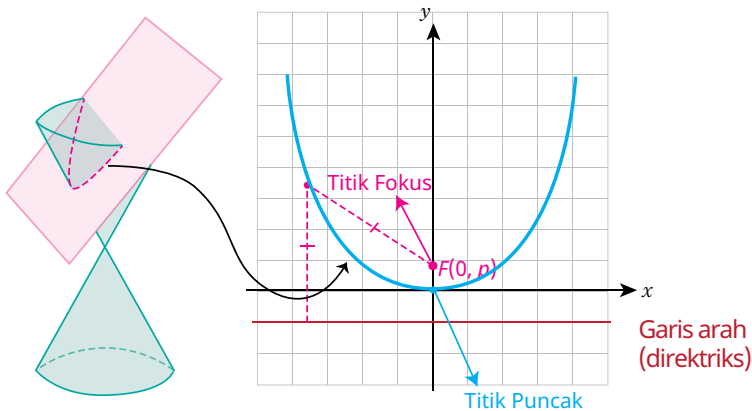
Pengayaan

1. Parabola

Pada buku *Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)* terdapat pembahasan tentang fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + x^2 + c$ dengan kurva simetris berbentuk $\cap$ atau $\cup$. Kedua bentuk tersebut dikenal dengan istilah *parabola*. Tentunya ada bentuk lain yang juga disebut parabola, yaitu kurva simetris berbentuk $\subset$ dan $\supset$.

a. Definisi Parabola

Parabola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap titik tertentu dan garis tertentu selalu sama. Titik tertentu pada parabola disebut *titik fokus* (F), sedangkan garis tertentu dinyatakan dengan *garis direktri* (d). Pada Gambar 1.27, titik fokusnya adalah titik $F(0, p)$ dengan persamaan garis direktri $y = -p$.



Gambar 1.27 Irisan Kerucut Berbentuk Parabola



Ayo Mengingat Kembali

Apakah kamu masih mengingat unsur-unsur pada grafik fungsi parabola? Kamu dapat membuka kembali buku *Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)* pada subbab “Fungsi Kuadrat”.

b. Persamaan Parabola

Kamu harus mengetahui unsur-unsur parabola untuk menentukan persamaan parabola, di antaranya sumbu simetri, titik puncak, titik fokus, dan persamaan garis direktri.



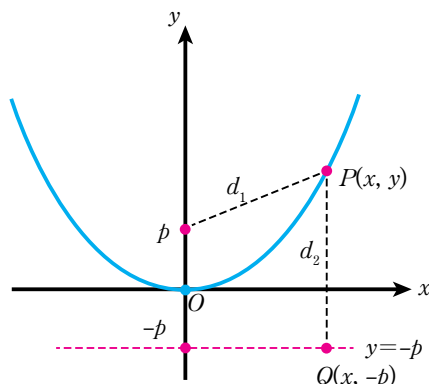
Ayo Mengingat Kembali

Beberapa konsep dasar yang dibutuhkan untuk menentukan persamaan parabola, antara lain:

- (1) jarak di antara dua titik,
- (2) jarak titik terhadap garis, dan
- (3) titik tengah dari dua titik yang diketahui.

1) **Persamaan parabola dengan titik puncak $O(0,0)$ dan sumbu simetri adalah sumbu- y ($x = 0$)**

Kamu dapat memperhatikan Gambar 1.28 berikut.



Gambar 1.28 Parabola dengan Titik Puncak $O(0,0)$ dan Sumbu Simetri adalah Sumbu- y

Misalkan d_1 adalah jarak titik $P(x, y)$ terhadap titik fokus $(0, p)$. Jarak antartitik dapat ditentukan dengan Teorema Pythagoras sehingga

$$d_1 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}.$$

Misalkan d_2 adalah jarak titik $P(x, y)$ terhadap garis direktri $y = -p$. Jarak suatu titik (x_1, y_1) terhadap garis $Ax + By + C = 0$ dapat ditentukan dengan rumus $\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Dengan mengubah bentuk persamaan garis direktri maka

$$y = -p$$

$$y + p = 0,$$

diperoleh

$$A = 0, B = 1, \text{ dan } C = p,$$

sehingga

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y + p|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \\ &= y + p = p + y. \end{aligned}$$

Dari definisi parabola bahwa jarak suatu titik ke titik fokus dan ke garis direktri sama, maka

$$d_1 = d_2,$$

sehingga

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = p + y.$$

Dengan menguadratkan persamaan di atas, diperoleh

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (p+y)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = p^2 + 2py + y^2.$$

Jadi, persamaan parabola untuk kurva terbuka ke atas adalah

$$x^2 = 4py,$$

dengan titik fokus $(0, p)$ dan persamaan direktriks $y = -p$. Titik puncak parabola tersebut merupakan titik tengah antara titik fokus dan titik potong sumbu simetri dengan garis direktriksnya. Dengan kata lain,

$$\text{titik puncak } O(x, y) = \left(0, \frac{p + (-p)}{2}\right) = (0, 0).$$

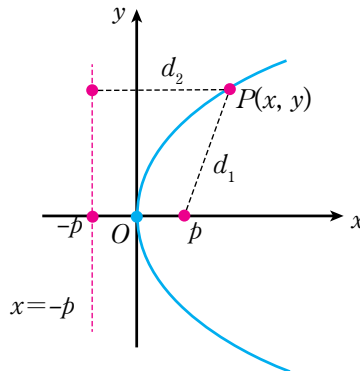
Adapun persamaan parabola untuk kurva terbuka ke bawah adalah

$$x^2 = -4py,$$

dengan titik fokus $(0, -p)$ dan persamaan direktriks $y = p$.

2) **Persamaan parabola dengan titik puncak $O(0,0)$ dan sumbu simetri adalah sumbu- x ($y = 0$)**

Perhatikanlah Gambar 1.29. Persamaan sumbu simetri adalah $x \equiv y = 0$, puncak di titik $O(0,0)$, fokus pada titik $(p, 0)$, dan persamaan garis direktriksnya adalah $l \equiv x = -p$ atau $l \equiv x + p = 0$.



Gambar 1.29 Parabola dengan Titik Puncak $O(0,0)$ dan Sumbu Simetri adalah Sumbu- x

Berdasarkan definisi parabola maka

$$d_1 = d_2,$$

sehingga

$$(\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}) = \frac{|1 \cdot x + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$(\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2})^2 = \left| \frac{x+p}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \right|^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2.$$

Jadi, persamaan parabola untuk kurva terbuka ke kanan adalah

$$y^2 = 4px,$$

dengan titik fokus di $(p, 0)$ dan persamaan direktriks $x = -p$.

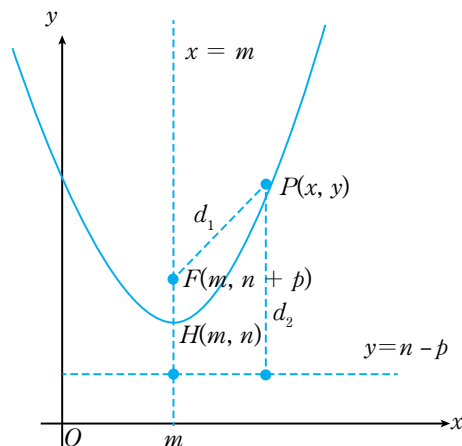
Adapun persamaan parabola untuk kurva terbuka ke kiri adalah

$$y^2 = -4px,$$

dengan titik fokus $(-p, 0)$ dan persamaan direktriks $x = p$.

3) **Persamaan parabola dengan titik puncak $H(m, n)$ dan sumbu simetri adalah garis $x = m$**

Pada Gambar 1.30 terlihat puncak berada di titik $H(m, n)$, sumbu simetri adalah $y \equiv x = m$, persamaan direktriksnya adalah $y = n - p$ atau $y - n + p = 0$, dan fokus pada titik $F(m, n + p)$.



Gambar 1.30 Parabola dengan Titik Puncak $H(m, n)$ dan Sumbu Simetri Sejajar Sumbu- y

Berdasarkan definisi parabola maka

$$d_1 = d_2,$$

sehingga

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-(n+p))^2} = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y - n + p|}{\sqrt{0^2 + (-1)^2}}$$

$$(\sqrt{(x-m)^2 + (y-(n+p))^2})^2 = ((y-n) + p)^2$$

$$(x-m)^2 + (y-(n+p))^2 = ((y-n) + p)^2$$

$$(x-m)^2 + ((y-n) - p)^2 = ((y-n) + p)^2$$

dengan melakukan pemindahan ruas, diperoleh

$$(x-m)^2 = ((y-n) + p)^2 - ((y-n) - p)^2$$

$$(x-m)^2 = ((y-n)^2 + 2(y-n)p + p^2) - ((y-n)^2 - 2(y-n)p + p^2)$$

$$(x-m)^2 = 2p(y-n) + 2p(y-n)$$

Jadi, persamaan parabola untuk kurva terbuka ke atas adalah

$$(x-m)^2 = 4p(y-n),$$

dengan titik fokus $(m, n+p)$ dan persamaan direktriks $y = n - p$.

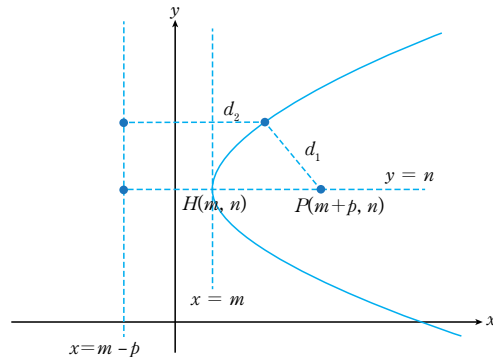
Adapun persamaan parabola untuk kurva terbuka ke bawah adalah

$$(x-m)^2 = -4p(y-n),$$

dengan titik fokus $(m, n-p)$ dan persamaan direktriks $y = n + p$.

4) **Persamaan parabola dengan titik puncak $H(m, n)$ dan sumbu simetri adalah garis $y = n$**

Dengan memperhatikan Gambar 1.31, dapat dilihat bahwa puncak berada di titik $H(m, n)$, sumbu simetri adalah $x \equiv y = n$, persamaan direktriksnya adalah $x = m - p$ atau $x - m + p = 0$, dan fokus pada titik $F(m + p, n)$.



Gambar 1.31 Parabola dengan Titik Puncak $H(m, n)$ dan Sumbu Simetri Sejajar Sumbu- x

Berdasarkan definisi parabola maka

$$d_1 = d_2,$$

sehingga

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-(m+p))^2 + (y-n)^2} &= \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y - m + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \\ (\sqrt{(x-(m+p))^2 + (y-n)^2})^2 &= (x-m+p)^2 \\ (x-(m+p))^2 + (y-n)^2 &= (x-m+p)^2 \\ ((x-m)-p)^2 + (y-n)^2 &= ((x-m)+p)^2\end{aligned}$$

dengan melakukan pemindahan ruas, diperoleh

$$\begin{aligned}(y-n)^2 &= ((x-m)+p)^2 - ((x-m)-p)^2 \\ (y-n)^2 &= ((x-m)^2 + 2(x-m)p + p^2) - ((x-m)^2 - 2(x-m)p + p^2) \\ (y-n)^2 &= 2p(x-m) + 2p(x-m)\end{aligned}$$

Jadi, persamaan parabola untuk kurva terbuka ke kanan adalah

$$(y-n)^2 = 4p(x-m),$$

dengan titik fokus $(m+p, n)$ dan persamaan direktriks $x = m-p$.

Adapun persamaan parabola untuk kurva terbuka ke kiri adalah

$$(y-n)^2 = -4p(x-m),$$

dengan titik fokus $(m-p, n)$ dan persamaan direktriks $x = m+p$.

Contoh Soal 1.28

Misalkan sebuah parabola memiliki titik puncak $(2, 3)$ dan titik fokus $(1, 3)$. Tentukan persamaan parabola tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Posisi titik puncak $(2, 3)$ dan titik fokus $(1, 3)$ sehingga kita dapat menentukan persamaan parabola terbuka ke kiri.

Titik puncak $(2, 3)$, berarti $m = 2$ dan $n = 3$.

Titik fokus $(1, 3)$ sehingga

$$\begin{aligned}m-p &= 1 \\ p &= 2-1 = 1\end{aligned}$$

Ingat bahwa p merupakan jarak titik puncak ke fokus atau jarak dari titik puncak ke direktriks.

Dengan menyubstitusikan nilai m, n , dan p ke persamaan $(y - n)^2 = -4p(x - m)$, diperoleh

$$(y - 3)^2 = (-4)(1)(x - 2)$$

$$y^2 - 6y + 9 = -4x + 8$$

$$y^2 - 6y + 4x + 1 = 0.$$

Jadi, persamaan parabolanya adalah $y^2 - 6y + 4x + 1 = 0$.

Contoh Soal 1.29

Diketahui sebuah parabola dengan persamaan $y^2 - 6y - 20x - 31 = 0$. Tentukan titik puncak dan titik fokusnya.

Alternatif penyelesaian:

Persamaan $y^2 - 6y - 20x - 31 = 0$ menunjukkan bahwa parabola ini memiliki sumbu simetri yang sejajar dengan sumbu- x karena dapat dinyatakan dalam persamaan kuadrat dengan variabel y , yaitu

$$x = \frac{1}{20}y^2 - \frac{6}{20}y - 31 = 0,$$

yang grafik fungsinya simetris terhadap sumbu $y = n$, dengan n anggota bilangan real.

Dengan mengingat bahwa $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, koefisien 6 pada $6y$ dapat dimodifikasi menjadi $(2 \cdot 3)$ sehingga

$$y^2 - 6y - 20x - 31 = 0$$

$$y^2 - (2 \cdot 3)y + 9 - 9 - 20x - 31 = 0$$

$$(y^2 - (2 \cdot 3)y + 9) - 20x - 40 = 0$$

$$(y - 3)^2 - 20(x + 2) = 0$$

$$(y - 3)^2 - (4)(5)(x + 2) = 0$$

$$(y - 3)^2 = 4(5)(x + 2).$$

Dari persamaan di atas diperoleh bahwa puncak parabola berada pada titik $(-2, 3)$ dengan $p = 5$.

Dari titik puncak $(-2, 3)$, diperoleh

$$m = -2 \text{ dan } n = 3$$

Titik fokus $(m + p, n) = (-2 + 5, 3) = (3, 3)$.

Jadi, parabola $y^2 - 6y - 20x - 31 = 0$ memiliki titik puncak $(-2, 3)$ dan titik fokus $(3, 3)$.

Contoh Soal 1.30

Diketahui sebuah parabola memiliki sumbu simetri $y = 1$ dan jarak titik fokus dengan direktriks adalah 2. Parabola tersebut terbuka ke kanan dengan titik puncak berada pada garis $x - y = 1$. Tentukan persamaan parabola tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Parabola sejajar sumbu- x dan terbuka ke kanan sehingga persamaannya berbentuk $(y - n)^2 = 4p(x - m)$. Karena jarak titik fokus ke direktriks adalah 2, maka $2p = 2$ atau $p = 1$.

Sumbu simetri $y = 1$ sehingga $n = 1$.

Karena puncak parabola melalui garis $x - y = 1$, kamu dapat menyubstitusikan $y = 1$ ke $x - y = 1$ sehingga

$$x = 2, \text{ berarti } m = 2.$$

Jadi, persamaan parabola adalah

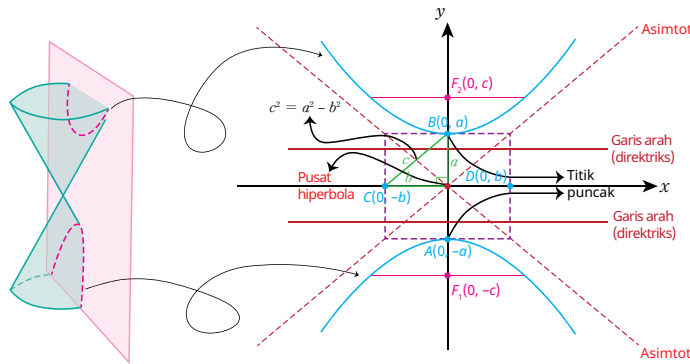
$$(y - 1)^2 = (4)(1)(x - 2)$$

$$(y - 1)^2 = 4(x - 2).$$

2. Hiperbola

a. Definisi Hiperbola

Ketika sebuah bidang datar memotong sebagian dari dua kerucut yang berlawanan, terbentuklah kurva yang bernama hiperbola. (Kamu dapat memperhatikan Gambar 1.32 sebelah kiri.) *Hiperbola* adalah tempat lintasan titik-titik dengan eksentrisitas lebih besar dari satu. Ada pula ilmuwan yang mendefinisikan bahwa hiperbola adalah himpunan titik-titik yang selisih jarak terhadap dua titik tertentu pada suatu bidang selalu sama. Kedua titik tertentu yang dimaksud adalah *titik fokus* hiperbola. Jarak suatu titik pada hiperbola dengan titik fokus pertama dan jaraknya dengan titik fokus kedua memiliki selisih $2a$.



Gambar 1.32 Unsur-Unsur pada Hiperbola

Sumber: digambar ulang dari Alwin Mulyanto/StudioBelajar.com (2025)

Dari Gambar 1.32, dapat disimpulkan bahwa unsur-unsur pembentuk hiperbola sebagai berikut.

- ▶ Sumbu simetri yang melalui kedua titik fokus disebut *sumbu utama* (sumbu transversal) atau *sumbu mayor*.
- ▶ Sumbu simetri yang melalui pertengahan dan tegak lurus dengan sumbu utama disebut *sumbu sekawan* (sumbu konjugasi) atau *sumbu minor*.
- ▶ Titik potong sumbu utama dan sumbu sekawan disebut *titik pusat hiperbola*.
- ▶ Titik potong hiperbola dengan sumbu utama disebut *titik puncak hiperbola*.
- ▶ Terdiri atas dua kurva yang masing-masing kurva disebut *cabang* (berbeda dengan parabola yang hanya memiliki satu kurva).
- ▶ Dua asintot berupa garis lurus. Semakin jauh asintot dari titik pusat, semakin dekat dengan garis lengkung (kurva hiperbola), namun tidak pernah berpotongan di suatu titik.

Kamu sudah memperkaya pengetahuanmu tentang parabola. Selanjutnya, kamu dapat menambah pengetahuanmu dengan mempelajari selengkapnya mengenai hiperbola dan kedudukan dua lingkaran melalui tautan <https://bukupusbuk.id/s/mtl12pengayaan1> atau dengan memindai kode respons cepat di samping.



Refleksi

Kamu sudah mempelajari materi lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran pada bab ini. Sebagai bahan perenungan, jawablah setiap pertanyaan berikut sesuai dengan pengalaman belajarmu.

1. Bagaimana perasaanmu setelah mempelajari materi pada bab ini?
Apakah kamu merasa lebih tertantang atau semakin percaya diri dengan kemampuan matematikamu?
2. Setelah memahami persamaan lingkaran, elips, dan garis singgung lingkaran, apa manfaat yang kamu rasakan dalam kehidupan sehari-hari?



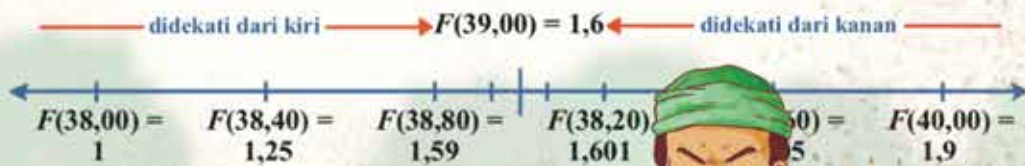
Ayo Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan aplikasi GeoGebra untuk mengecek apakah jawabanmu terhadap soal-soal pada buku ini sudah benar atau belum.



Bab 2

Turunan Fungsi



Bagaimana kamu menggunakan turunan fungsi untuk memprediksi tingkat penjualan suatu produk?

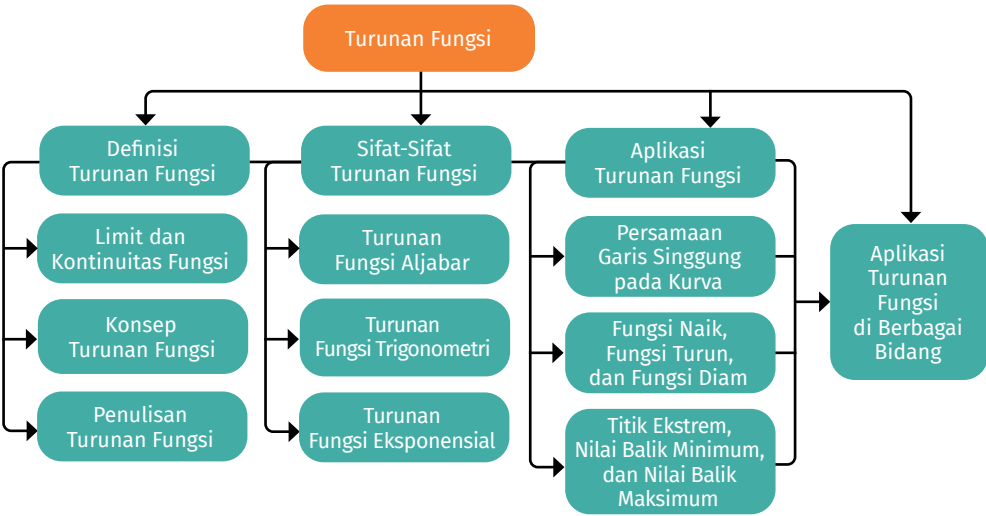
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan untuk menentukan limit dan turunan fungsi, serta menggunakan konsepnya dalam aplikasi turunan.

Kata Kunci

- ▶ limit
- ▶ turunan fungsi
- ▶ aplikasi turunan fungsi

Peta Konsep



Apakah kamu mengetahui bahwa pada tahun 2024, Indonesia termasuk empat besar produsen sepatu di dunia? Pabrik pembuatan sepatu di Indonesia, seperti terlihat pada Gambar 2.1, tercatat minimal memproduksi 1,41 miliar pasang sepatu per tahun.

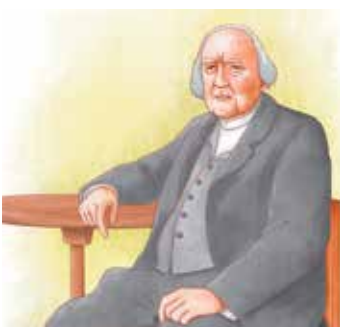


Gambar 2.1 Karyawan Pabrik Sepatu

Setiap perusahaan sepatu dapat mengelola besarnya produksi dengan merancang Rencana Anggaran Pendapatan dan Belanja (RAPB). Adanya RAPB bertujuan melakukan estimasi keuntungan atau kerugian. Dalam RAPB tersebut terdapat rencana produksi, meliputi banyaknya produksi, bahan produksi, anggaran biaya produksi, pendapatan minimal, dan sebagainya. Beberapa rancangan tersebut biasanya dinyatakan dalam suatu fungsi yang dapat digunakan untuk memprediksi RAPB dalam jangka waktu panjang.

Bagaimanakah fungsi tersebut dapat memprediksi elemen-elemen dalam RAPB? Kamu dapat menjawabnya setelah mempelajari materi pada bab ini. Turunan fungsi sangat bermanfaat untuk menentukan pendapatan maksimum dalam suatu produksi. Selain itu, konsep turunan fungsi dapat digunakan untuk memprediksi produksi barang yang telah disesuaikan dengan pajak dan subsidi.

A. Definisi Turunan Fungsi



Gambar 2.2 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Sumber: digambar ulang dari Conrad Fehr/
commons.wikimedia.org (1895)

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815—1897) adalah seorang matematikawan terkemuka Jerman yang lahir pada 31 Oktober 1815 di Ostenfelde, Bavaria, Jerman dan meninggal pada 19 Februari 1897, Berlin. Weierstrass merupakan salah satu pendiri teori fungsi modern dan sering disebut sebagai Bapak Analisis Modern. Kontribusi utamanya terhadap kalkulus mencakup pendekatan ketat yang meletakkan dasar yang kokoh bagi disiplin ilmu tersebut. Kontribusinya secara signifikan memajukan pemahaman tentang fungsi dan konvergensi melalui konsep-konsep seperti fungsi Weierstrass dan uji-M.

Sebelum Weierstrass, konsep-konsep kalkulus seperti limit dan turunan seringkali didasarkan pada intuisi geometris atau argumen yang kurang formal. Hal tersebut menyebabkan ambiguitas dan kesulitan dalam membuktikan teorema-teorema penting. Weierstrass, bersama matematikawan lain pada masanya, berusaha untuk membangun analisis di atas fondasi yang lebih kokoh dan aritmetis. Weierstrass melakukan pendefinisian ulang dalam turunan dengan fondasi limit yang ketat sesuai dengan yang kita pelajari sampai saat ini.

1. Limit dan Kontinuitas Fungsi

Kegiatan Ayo Bereksplorasi 2.1 berikut dapat membantumu untuk lebih memahami materi limit.



Ayo Bereksplorasi 2.1

Pacu Jawi merupakan tradisi di Kabupaten Tanah Datar, Sumatra Barat, Indonesia. Pacu Jawi adalah kegiatan berbalut budaya yang melibatkan seorang penunggang yang memacu sepasang sapi agar berlari dengan kecepatan tinggi dan harus bergerak lurus sejauh kurang lebih 100 m di sawah. Pacu Jawi dilaksanakan pada akhir panen padi sebagai bentuk rasa syukur rakyat kepada Tuhan.



Gambar 2.3 Tradisi Pacu Jawi di Kabupaten Tanah Datar Sumatra Barat

Penunggang pada Pacu Jawi (sering disebut joki) perlu memperkirakan kecepatan yang tepat agar mampu mengendalikan arah lari sepasang sapi tersebut hingga dapat bergerak lurus. Oleh karena itu, terdapat batas atau limit kecepatan yang dapat ditoleransi oleh joki. Menurutmu, bagaimanakah cara memperkirakan batas atau limit kecepatan tersebut? Adakah suatu cara matematis untuk memperkirakannya?

Dalam Pacu Jawi, joki mengendalikan sapi dengan cara menggenggam ekornya. Semakin kuat genggamannya, semakin cepat laju sapi tersebut. Hal ini berarti bahwa besarnya kekuatan genggamannya pada ekor sapi memengaruhi kecepatan, sedangkan besar kecilnya kecepatan berpengaruh terhadap arah gerakan sapi. Oleh karena itu, joki perlu menentukan besarnya kekuatan genggamannya yang tepat pada ekor sapi agar kecepatannya tidak mengakibatkan arah lari sapi menyimpang.

Misalkan seorang joki Pacu Jawi menggenggam kedua ekor sapi dengan kekuatan sebesar 38 kg. Ternyata kedua sapi tersebut dapat bergerak lurus dengan kecepatan 1 meter per detik (m/s). Kekuatan genggamannya terus dinaikkan sehingga kecepatan semakin tinggi, namun sapi masih bergerak lurus. Saat joki menaikkan kekuatan genggamannya menjadi sebesar 40 kg, kecepatan sapi mencapai 1,9 m/s, namun sapi bergerak menyimpang. Kekuatan genggamannya kemudian diturunkan secara perlahan hingga arah gerak sapi berangsur mulai lurus. Perubahan kekuatan genggamannya joki dan kecepatan sapi tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Kecepatan Sapi dalam Pacu Jawi

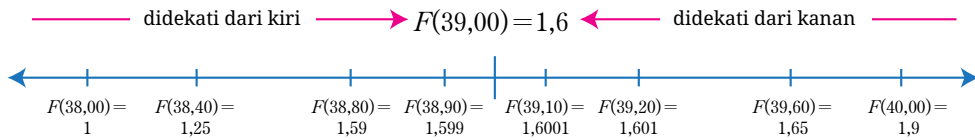
Kekuatan Genggamannya (kg)	38	38,40	38,80	38,90	...	39	...	39,10	39,20	39,60	40
Kecepatannya (m/s)	1	1,25	1,59	1,599	...	?	...	1,6001	1,601	1,65	1,9

Diskusikan dengan temanmu untuk menjawab pertanyaan berikut.

1. Taksirlah kecepatan sapi saat kekuatan genggamannya joki mendekati 39 kg.
2. Apakah besar kecepatan sapi yang kalian taksir merupakan nilai yang tepat?
3. Misalkan kecepatan sapi dinyatakan dalam sebuah fungsi $f(x)$ dengan x menyatakan kekuatan genggamannya penunggang. Jika nilai x mendekati 39, maka nilai $f(x)$ akan mendekati ke nilai berapa?

a. Definisi Limit Fungsi secara Intuitif

Pada kegiatan Ayo Bereksplorasi 2.1, kamu dapat menyatakan kecepatan sapi sebagai suatu fungsi $f(x)$ dengan x menyatakan kekuatan genggamannya joki dalam Pacu Jawi. Nilai fungsi $f(x)$ tersebut secara sederhana dapat diilustrasikan dalam sebuah garis bilangan pada Gambar 2.4 berikut.



Gambar 2.4 Nilai Fungsi $f(x)$ dalam Garis Bilangan

Berdasarkan Gambar 2.4, diperoleh

- nilai $f(x)$ untuk $x = 38,00$ adalah 1;
- nilai $f(x)$ untuk $x = 38,40$ adalah 1,25;
- nilai $f(x)$ untuk $x = 38,80$ adalah 1,59;
- nilai $f(x)$ untuk $x = 38,90$ adalah 1,599; dan
- nilai $f(x)$ untuk $x = 39,00$ bernilai 1,6.

Ini berarti bahwa limit $f(x)$ untuk x mendekati 39 dari arah kiri bernilai 1,6. Apabila kamu melihat dari sisi kanan, diperoleh

- nilai $f(x)$ untuk $x = 40,00$ adalah 1,9;
- nilai $f(x)$ untuk $x = 39,60$ adalah 1,65;
- nilai $f(x)$ untuk $x = 39,20$ adalah 1,601; dan
- nilai $f(x)$ untuk $x = 39,10$ adalah 1,6001.

Dari penjelasan tersebut, limit $f(x)$ untuk x mendekati 39 dari arah kiri bernilai 1,6. Begitu juga dengan limit $f(x)$ untuk x mendekati 39 dari arah kanan juga bernilai 1,6. Hal ini berarti bahwa limit $f(x)$, untuk x mendekati 39 bernilai 1,6. Kesimpulan ini menjadi dasar dalam memformulasikan definisi limit fungsi berikut.

Definisi 2.1

Misalkan $f(x)$ sebuah fungsi $f(x): R \rightarrow R$. Ketika x mendekati c , limit $f(x)$ adalah L , ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L,$$

berarti untuk x mendekati c dari kiri dan kanan, maka $f(x)$ mendekati L .

Catatan: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dibaca limit $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L .

b. Sifat-Sifat Limit Fungsi

Pada kegiatan sebelumnya, kamu telah mempelajari definisi limit fungsi. Selanjutnya, kamu akan mempelajari sifat-sifat limit fungsi melalui pemahaman intuitif. Sifat-sifat tersebut akan menjadi dasar dalam menentukan limit fungsi aljabar dan trigonometri. Kamu dapat mengerjakan kegiatan pada Ayo Beresplorasi 2.2 berikut.



Ayo Beresplorasi 2.2

Misalkan fungsi $f(x): R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = 4$. Gantilah tanda tanya (?) pada Tabel 2.2 dengan nilai $f(x)$ yang tepat, kemudian tentukan nilai limitnya.

Tabel 2.2 Nilai $f(x)$ untuk x Mendekati 1

x	0	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x)$	4	?	4	?	...	?	...	4	?	4	4

Misalkan fungsi $g(x): R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $g(x) = x$. Gantilah tanda tanya (?) pada Tabel 2.3 dengan nilai $g(x)$ yang tepat, kemudian tentukan nilai limitnya.

Tabel 2.3 Nilai $g(x)$ untuk x Mendekati 1

x	0	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,2
$g(x)$	?	?	0,99	?	...	?	...	1,001	?	1,1	?



Ayo Berpikir Kritis

Berdasarkan kegiatan Ayo Beresplorasi 2.2, jika $f(x) = k$ dan $g(x) = x$, berapakah nilai $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ untuk c dan k anggota bilangan real?

Sifat-Sifat

Sifat Limit 1: Misalkan $f(x) = k$ dan $g(x) = x$ adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi di R dan mempunyai limit di c dengan k konstanta, maka berlaku

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c.$$

Sifat Limit 1 merupakan jawaban dari kegiatan Ayo Berpikir Kritis. Melalui kegiatan yang serupa, kamu dapat menemukan beberapa sifat limit fungsi lainnya seperti berikut ini.

Sifat-Sifat

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi di R dan mempunyai limit di c , k konstanta, dan $n > 0$, maka berlaku

Sifat Limit 2: $\lim_{x \rightarrow c} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

Sifat Limit 3: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

Sifat Limit 4: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right)$

Sifat Limit 5: $\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ dengan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

Sifat Limit 6: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right)^n$ untuk setiap n bilangan asli

Sifat Limit 7: $\lim_{x \rightarrow c} (\sqrt[n]{f(x)}) = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, untuk setiap n bilangan asli. Jika n genap, maka $L \geq 0$ untuk $L = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$.



Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana caramu menunjukkan Sifat Limit 2 hingga Sifat Limit 7? Buatlah kegiatan untuk menemukan jawabannya dengan berkolaborasi bersama temanmu.

Contoh Soal 2.1

1. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 3}\right)$ dengan menerapkan sifat-sifat limit.

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 3}\right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} (x\sqrt{x})}{\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + 3)} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 4} x)(\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x})}{(\lim_{x \rightarrow 4} x^2) + (\lim_{x \rightarrow 4} 3)} \quad (\text{Sifat Limit 5, 4, 3}) \\ &= \frac{(\lim_{x \rightarrow 4} x)(\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} x})}{(\lim_{x \rightarrow 4} x^2) + (\lim_{x \rightarrow 4} 3)} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 4} x)(\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} x})}{(\lim_{x \rightarrow 4} x)^2 + (\lim_{x \rightarrow 4} 3)} \quad (\text{Sifat Limit 7, 6}) \end{aligned}$$

$$= \frac{4(\sqrt{4})}{4^2 + 3} = \frac{4(2)}{16 + 3} = \frac{8}{19} \quad (\text{Sifat Limit 1}).$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 3} \right) = \frac{8}{19}.$$

2. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ dengan menerapkan sifat-sifat limit.

Alternatif penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 2)} \quad (\text{Sifat Limit 7})$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2) - \lim_{x \rightarrow 0} (3x) + \lim_{x \rightarrow 0} (2)} \quad (\text{Sifat Limit 3})$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2) - 3 \lim_{x \rightarrow 0} (x) + \lim_{x \rightarrow 0} (2)} \quad (\text{Sifat Limit 2})$$

$$= \sqrt{(\lim_{x \rightarrow 0} x)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 0} (x) + \lim_{x \rightarrow 0} (2)} \quad (\text{Sifat Limit 6})$$

$$= \sqrt{0^2 - 3(0) + 2} = \sqrt{2} \quad (\text{Sifat Limit 1}).$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{2}.$$



Ayo Mencoba 2.1

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Dengan menggunakan sifat-sifat limit fungsi, tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 8}{x\sqrt{3x}} \right)$.

Alternatif penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 8}{x\sqrt{3x}} \right) = \underline{\hspace{10cm}} \quad (\text{Sifat Limit 7})$$

$$= \underline{\hspace{10cm}} \quad (\text{Sifat Limit 5})$$

$$= \underline{\hspace{10cm}}$$

$$= \underline{\hspace{10cm}}$$

2. Dengan menggunakan sifat-sifat limit fungsi, tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 16x}$.

Alternatif penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 16x} = \underline{\hspace{10cm}} \quad (\text{Sifat Limit 5})$$

$$= \underline{\hspace{10cm}} \quad (\text{Sifat Limit 3})$$

$$= \underline{\hspace{10cm}}$$

$$= \underline{\hspace{10cm}}$$

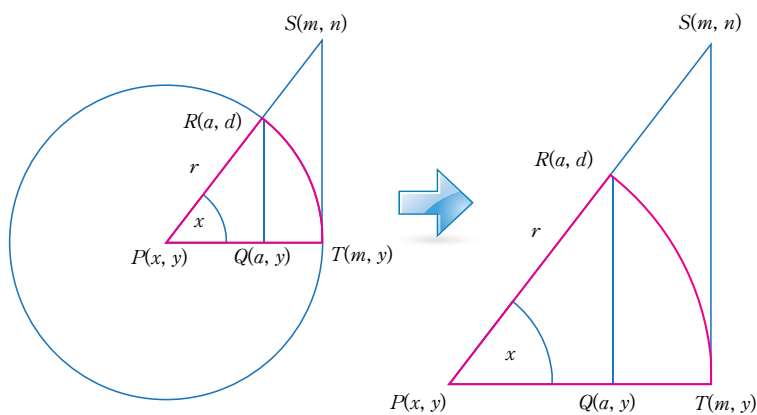
c. Limit Fungsi Trigonometri

Kamu sudah memahami sifat-sifat limit fungsi aljabar. Pada kegiatan Ayo Bereksplorasi 2.3 berikut, kamu akan mempelajari limit fungsi trigonometri.



Ayo Bereksplorasi 2.3

Perhatikan Gambar 2.5, kemudian lengkapi bagian titik-titik pada proses perhitungan.



Gambar 2.5 Interpretasi Geometri Sudut Pusat Lingkaran

Berdasarkan Gambar 2.5, titik $P(x, y)$ adalah pusat lingkaran yang berjari-jari $PR = PT = r$. Sudut TPR ($\angle TPR$) adalah sudut lancip dengan besar sudut x (dalam radian). Garis singgung di titik $T(m, y)$ memotong sinar garis PR di titik $S(m, n)$. Titik $Q(a, y)$ adalah proyeksi titik $R(a, d)$ pada garis PT . Dari pernyataan tersebut, diperoleh beberapa informasi berikut.

- Terdapat dua buah segitiga, yaitu $\triangle PQR$ dan $\triangle PTS$.
- Terdapat juring lingkaran yaitu juring PTR .
- Luas $\triangle PQR$ adalah

$$\begin{aligned}
 L_{\triangle PQR} &= \frac{1}{2}(PQ)(QR) \\
 &= \frac{1}{2}(\dots \cos x)(\dots \sin x) \\
 &= \frac{1}{2}(\dots)^2 \cos x \sin x.
 \end{aligned}$$

- Luas ΔPTS adalah

$$\begin{aligned} L_{\Delta PTS} &= \frac{1}{2}(PT)(TS) \\ &= \frac{1}{2}(\dots)(\dots \tan x) \\ &= \frac{1}{2}(\dots)^2 \tan x. \end{aligned}$$

- Luas juring $PTR = \frac{x}{2\pi} \times (\text{luas lingkaran})$
 $= \frac{x}{2\pi} \times (\dots) = \frac{1}{2}x(\dots)^2.$

Dari luas ΔPQR , luas ΔPTS , dan luas juring PTR (lihat Gambar 2.5), diperoleh hubungan berikut:

$$\text{Luas } \Delta PQR < \text{Luas Juring } PTR < \text{Luas } \Delta PTS,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r^2 \cos x \sin x &< \frac{1}{2}x r^2 < \frac{1}{2}r^2 \tan x \\ \cos x \sin x &< x < \tan x \\ \cos x &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

Dari kegiatan Ayo Bereksplorasi 2.3 ini, kamu memperoleh bahwa hubungan antara luas ΔPQR , luas juring PTR , dan luas ΔPTS adalah

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Jika x mendekati 0, maka $\cos x = 1$. Hal ini berarti bahwa

$$1 < \frac{x}{\sin x} < 1.$$

Jadi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Bentuk $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ dapat pula dinyatakan dalam

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Jika x mendekati 0, maka $\cos x = 1$. Hal ini berarti bahwa

$$1 < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jadi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Ayo Berdiskusi

Kamu telah memperoleh sifat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Diskusikanlah dengan kelompokmu untuk menunjukkan sifat:

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

► $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

Kamu telah mengeksplorasi dan mendiskusikan lima sifat limit fungsi trigonometri. Berikut ini sifat-sifat limit fungsi trigonometri lainnya yang dapat kamu pelajari.

Sifat-Sifat

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\tan ax} = \frac{b}{a}$

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

Contoh Soal 2.2

Tentukan nilai dari:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

3. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cot 5t}{\cot 10t}$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$

4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x - \frac{\pi}{2})}{x(x - \frac{\pi}{2})}$

Alternatif penyelesaian:

1. Dengan menggunakan sifat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$, diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ adalah $\frac{2}{3}$.

2. Dengan menggunakan sifat-sifat limit fungsi, diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} &= \frac{\sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 2.$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ adalah 2.

3. Apabila kamu menyubstitusikan $t = 0$ ke $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cot 5t}{\cot 10t}$, kamu akan memperoleh nilai limit tak tentu karena hasilnya $\frac{0}{0}$.



Ayo Mengingat Kembali

Pada materi limit fungsi aljabar, jika kamu memperoleh nilai limit tak tentu, kamu dapat

- menggunakan kaidah sifat-sifat limit fungsi;
- mengubah fungsi dengan cara memfaktorkan;
- mengubah fungsi dengan cara mengalikan antara fungsi dan sekawannya; atau
- membagi fungsi dengan pangkat tertingginya.

Pada limit fungsi trigonometri, selain menggunakan sifat-sifat limit fungsi aljabar, kamu juga harus mengingat kembali definisi sinus sudut (sin), kosinus sudut (cos), tangen sudut (tan), dan identitas trigonometri.

Dengan menggunakan definisi $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, maka $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cot 5t}{\cot 10t}$ menjadi

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cot 5t}{\cot 10t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tan 5t}}{\frac{1}{\tan 10t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 10t}{\tan 5t}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$, maka

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 10t}{\tan 5t} = \frac{10}{5} = 2.$$

Jadi, nilai $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cot 5t}{\cot 10t} = \frac{10}{5} = 2$ adalah 2.

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x - \frac{\pi}{2})}{x(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x(x - \frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} \right) \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} \right) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Karena hasil dari $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right)$ tak tentu $\left(\frac{0}{0} \right)$, kita dapat memisalkan

$u = x - \frac{\pi}{2}$. Jika $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, maka $u \rightarrow 0$ sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = 1$$

maka

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} \right) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \right) (1) \\
 &= \frac{0}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} (1) = 0.
 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$ adalah 0.



Ayo Mencoba 2.2

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

1. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x}$.

Alternatif penyelesaian:

Kamu dapat mengalikan pembilang dan penyebut dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x}$ dengan $\frac{1}{x}$ sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x} \right) \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) \right)$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x}$ adalah

2. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

Alternatif penyelesaian:

Kamu dapat mengalikan pembilang dan penyebut dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ dengan $\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$ sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) \right)$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ adalah

3. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 - \pi^2}$.

Alternatif penyelesaian:

Kamu dapat memfaktorkan penyebut dari $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 - \pi^2}$ sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 - \pi^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{(x - \pi)(x + \pi)}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 - \pi^2}$ adalah

d. Kontinuitas Fungsi

Pada kegiatan Ayo Bereskplorasi 2.4 berikut, kamu akan mempelajari kontinuitas fungsi dengan mencermati suatu wahana di salah satu taman hiburan Indonesia.



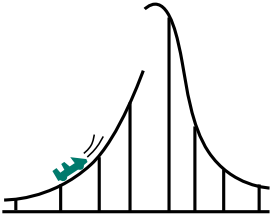
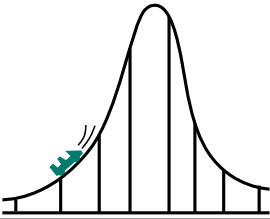
Gambar 2.6 Wahana Halilintar di Taman Hiburan Indonesia

Pernahkah kamu membayangkan bagaimana insinyur dan perancang memastikan bahwa wahana *roller coaster* seperti Halilintar dapat dinikmati dengan aman? Misalkan kamu sedang menaiki Halilintar. Dari saat kereta mulai bergerak, melaju di sepanjang rel, menanjak ke puncak, lalu meluncur turun dengan kecepatan tinggi, perjalanan terasa mulus dan tanpa jeda tiba-tiba. Kamu tidak akan mengharapkan kereta tiba-tiba menghilang dari rel, lalu muncul lagi di titik lain tanpa melewati bagian antaranya, bukan? Atau, mendadak ada lubang kosong di tengah rel yang membuat kereta terjun bebas tidak sesuai jalur.

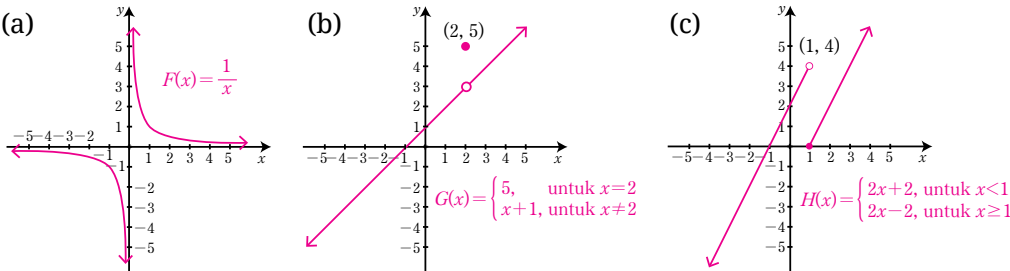
Kehalusan dan kelancaran gerak kereta inilah yang secara intuitif menggambarkan konsep kekontinuan dalam matematika. Di balik setiap turunan tajam, tanjakan, dan lintasan melingkar yang mendebarkan, terdapat

prinsip matematika mendalam yang memastikan semuanya berjalan tanpa hambatan, yaitu kekontinuan fungsi. Untuk memahaminya, perhatikan gambar pada Tabel 2.4. Kemudian, isilah pada tabel tersebut yang menggambarkan dampak kereta melalui lintasan pada gambar dan tuliskan juga penyebabnya.

Tabel 2.4 Hasil Pengamatan Lintasan *Roller Coaster*

Situasi Lintasan	Dampak dan Penyebab
	
	

Hasil pada Tabel 2.4 menunjukkan bahwa dengan kekontinuan fungsi dari lintasan *roller coaster* memberikan dampak pada keselamatan penumpang dan keamanan wahana tersebut. Secara intuitif, dapat dikatakan bahwa suatu fungsi kontinu pada titik tertentu atau pada suatu interval garis bilangan real jika grafiknya dapat digambar tanpa mengangkat pensil dari kertas. Jika terdapat titik dalam suatu interval dengan loncatan, lubang, atau terputus, artinya fungsi tersebut tidak kontinu pada interval tersebut. Grafik fungsi $F(x)$, $G(x)$, dan $H(x)$ pada Gambar 2.7, menunjukkan bahwa fungsi-fungsi ini tidak kontinu pada seluruh garis bilangan real.



Gambar 2.7 Grafik Fungsi $F(x)$, $G(x)$, dan $H(x)$

Berdasarkan Gambar 2.7, diperoleh situasi fungsi $F(x)$, $G(x)$, dan $H(x)$ berikut ini.

- ▶ Gambar 2.7(a) menunjukkan $F(x)$ tidak kontinu pada $(-\infty, \infty)$ karena titik $x = 0$ bukan bagian dari domain dan nilai $F(0)$ tidak terdefinisi. Jadi, tidak ada titik untuk ditelusuri pada $x = 0$. Perhatikan bahwa $F(x)$ kontinu pada interval $(-\infty, 0)$ dan $(0, \infty)$.
- ▶ Gambar 2.7(b) menunjukkan $G(x)$ tidak kontinu pada $(-\infty, \infty)$ karena tidak kontinu pada $x = 2$. Untuk melihat ini, telusuri grafik $G(x)$ mulai dari kiri $x = 2$. Saat x mendekati 2 dari kiri dan kanan, $G(x)$ mendekati 3 yang artinya $\lim_{x \rightarrow 2} G(x) = 3$. Namun, pada saat $x = 2$, $G(2) = 5$ atau $G(x)$ melompat ke 5. Perhatikan bahwa $G(x)$ kontinu pada $(-\infty, 2)$ dan $(2, \infty)$.
- ▶ Gambar 2.7(c) menunjukkan $H(x)$ tidak kontinu pada $(-\infty, \infty)$ karena tidak kontinu pada $x = 1$. Untuk melihat ini, telusuri grafik $H(x)$ mulai dari kiri $x = 1$. Saat x mendekati 1 dari kiri, $H(x)$ mendekati 4. Namun, saat x mendekati 1 dari kanan, $H(x)$ mendekati 0. Perhatikan bahwa $H(x)$ kontinu pada $(-\infty, 1)$ dan $(1, \infty)$.

Setiap grafik pada Gambar 2.7 memiliki titik diskontinuitas (titik fungsi tidak kontinu). Grafik $F(x)$ diskontinu di 0 karena $F(0)$ tidak terdefinisi; grafik $G(x)$ diskontinu di 2 karena $\lim_{x \rightarrow 2} G(x) \neq G(2)$; dan grafik $H(x)$ diskontinu di 1 karena $H(x)$ mendekati nilai berbeda saat x mendekati 1 dari kiri dan dari kanan yang artinya $H(x)$ tidak memiliki limit saat x mendekati 1. Berdasarkan ketiga kondisi tersebut, diperoleh definisi berikut.

Definisi 2.2

Sebuah fungsi $f(x)$ kontinu di $x = c$ jika:

- ▶ $f(x)$ ada;
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada;
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Suatu fungsi kontinu pada suatu interval I jika fungsi tersebut kontinu pada setiap titik di I .

Contoh Soal 2.3

Tentukan apakah fungsi di bawah ini kontinu di $x = -2$.

1. $f(x) = x^2 - 5$
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3, & \text{untuk } x < -2 \\ x - 1, & \text{untuk } x \geq -2 \end{cases}$

Alternatif penyelesaian:

1. $f(x) = x^2 - 5$.
 - ▶ $f(-2) = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1$.
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 5 = (-2)^2 - 5 = -1$.
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$.

Berdasarkan Definisi 2.2, disimpulkan $f(x)$ kontinu di $x = -2$.

2. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3, & \text{untuk } x < -2 \\ x - 1, & \text{untuk } x \geq -2 \end{cases}$
 - ▶ $g(-2) = -2 - 1 = -3$.
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ didekati dari kiri diperoleh
$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}(-2) + 3 = 2.$$
$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$$
 didekati dari kanan diperoleh
$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x - 1 = (-2) - 1 = -3.$$

Karena nilai $g(x)$ mendekati nilai berbeda saat x mendekati -2 dari kiri dan dari kanan, artinya $g(x)$ tidak memiliki limit saat x mendekati -2 .

Berdasarkan Definisi 2.2, disimpulkan $g(x)$ tidak kontinu di $x = -2$.

2. Konsep Turunan Fungsi

Misalkan sebuah mobil menempuh jarak 110 km dalam 2 jam. Rata-rata laju perubahannya (kecepatan) adalah 110 km/2 jam atau 55 km/jam. Ketika kamu sedang naik mobil yang berada di jalan tol dan mencermati spidometer, kamu melihat bahwa pada saat itu laju perubahan (kecepatan) adalah 55 km/jam.

Dua keadaan tersebut memiliki konsep yang sangat berbeda. Keadaan pertama dikenal dengan *kecepatan rata-rata*, sedangkan keadaan kedua merupakan *kecepatan sesaat*. Untuk memahami laju perubahan atau

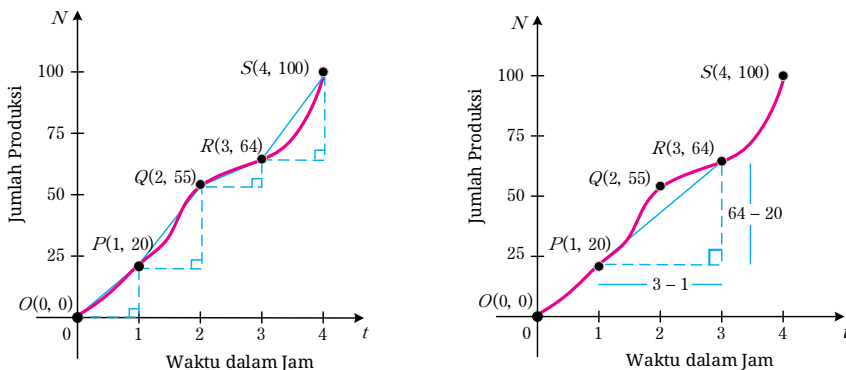
kecepatan sesaat, kamu perlu mengembangkan pemahaman yang kuat tentang laju perubahan rata-rata atau kecepatan rata-rata. Ayo, bereksplorasi dengan konteks yang berbeda.

a. Garis Sekan, Garis Tangen, dan Turunan



Ayo Bereksplorasi 2.5

Dalam proses produksi sepatu, terdapat kurva produksi yang merupakan ciri khas produksi pekerja pabrik. Kurva tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Kurva Laju Produksi Sepatu

Kurva pada Gambar 2.8 adalah kurva produksi yang menjadi ciri khas produksi pekerja pabrik per jam. Produksi tersebut dilakukan dari pukul 08.00 WIB hingga pukul 12.00 WIB. Dapatkah kamu menentukan rata-rata produksi sepatu dari pukul 09.00 WIB sampai pukul 11.00 WIB? Kamu dapat menjawab pertanyaan tersebut setelah melakukan kegiatan berikut ini.



Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kamu bagaimana menentukan kemiringan suatu garis lurus yang melalui dua buah titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$? Kemiringan garis yang melalui dua buah titik tersebut dapat ditentukan menggunakan rumus $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Ayo Berdiskusi

Diskusikan dengan temanmu untuk menjawab pertanyaan berikut.

1. Pada Gambar 2.8 terdapat garis lurus $\overrightarrow{PR}$. Tentukan kemiringan garis tersebut.

- Isilah titik-titik di bawah ini untuk menentukan rata-rata laju produksi sepatu dari pukul 09.00 WIB sampai pukul 11.00 WIB.

Produksi pukul 09.00—11.00 WIB = $64 - 20 = 44$ buah sepatu.

Selang waktu = $\dots - \dots = \dots$ jam.

Rata-rata laju produksi = $\frac{\text{Jumlah produksi}}{\text{Waktu produksi}} = \frac{44}{\dots} = \dots$ buah sepatu per jam.

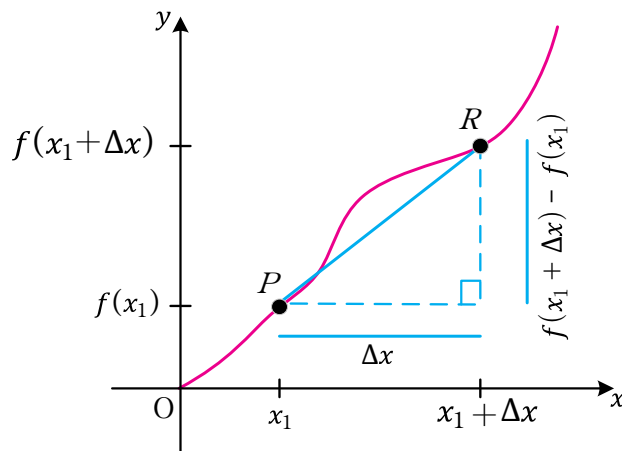
- Apakah perhitungan pada nomor 1 dan 2 sama?



Ayo Berpikir Kritis

Cobalah simpulkan hasil dari membandingkan perhitungan pada kegiatan Ayo Berdiskusi.

Pada kegiatan ini, kamu menemukan bahwa laju perubahan produksi sepatu sama dengan kemiringan garis $\overrightarrow{PR}$. Apabila kita misalkan koordinat titik P adalah $(x_1, f(x_1))$, akan diperoleh hubungan seperti pada Gambar 2.9.



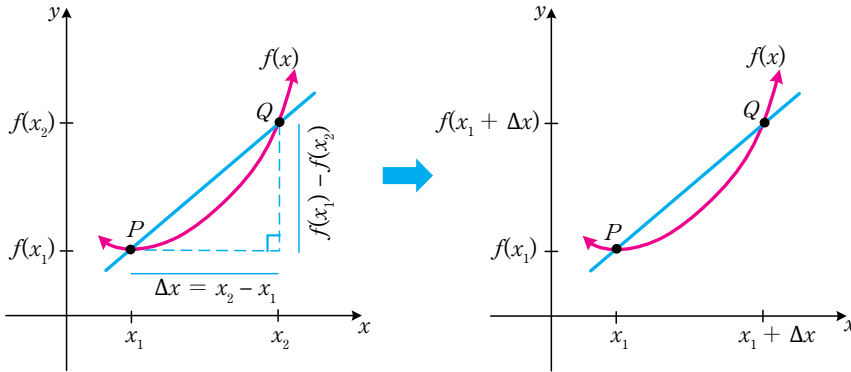
Gambar 2.9 Bentuk Lain Kurva Laju Produksi Sepatu

Pada Gambar 2.9, garis $\overrightarrow{PR}$ merupakan garis lurus yang melalui titik $P(x_1, f(x_1))$ dan $R((x_1 + \Delta x), f(x_1 + \Delta x))$. Dengan demikian, kemiringan atau gradien garis $\overrightarrow{PR}$ adalah.

$$m_{PR} = \frac{y_R - y_P}{x_R - x_P}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1} \\
 &= \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.
 \end{aligned}$$

Apabila fungsi diperumum untuk sembarang kurva $f(x)$, akan didapatkan bentuk kurva yang dapat kamu cermati pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Bentuk Diperumum Garis Sekan dalam Kurva $f(x)$

Garis $\overrightarrow{PQ}$ pada Gambar 2.10 disebut sebagai garis sekan dengan kemiringan

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Garis $\overrightarrow{PR}$ pada gambar di atas merupakan garis sekan yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3

Misalkan $f: R \rightarrow R$ adalah *fungsi kontinu*, titik $P(x_1, f(x_1))$ dan $R((x_1 + \Delta x), f(x_1 + \Delta x))$ pada kurva f . *Garis sekan* menghubungkan titik P dan R dengan kemiringan

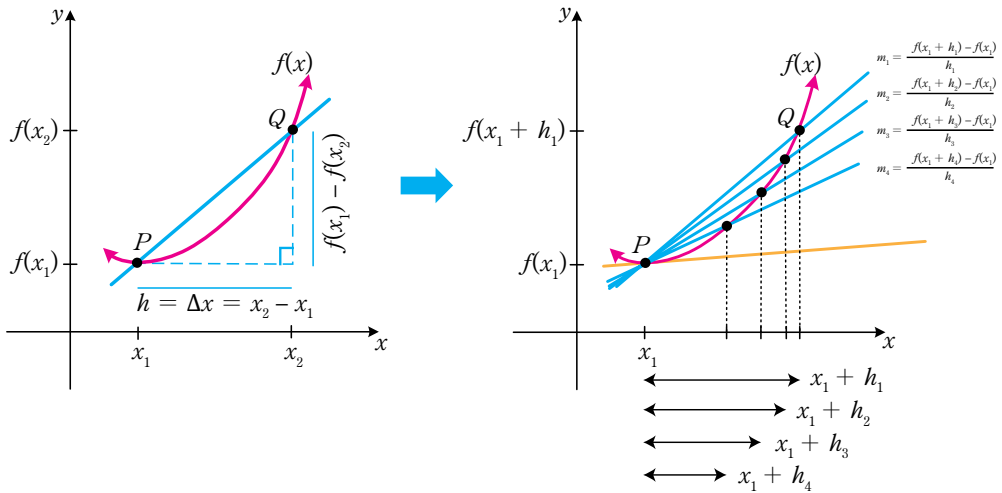
$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$



Ayo Berpikir Kritis

Pada Gambar 2.10, jika titik Q bergerak mendekati titik P , dapatkah kamu menentukan kemiringan garis sekan?

Misalkan Δx diasumsikan sebagai nilai tertentu h , maka pergerakan titik Q mendekati titik P mengakibatkan $\Delta x = h$ mendekati 0. Proses pendekatan ini dapat dilihat pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Pergerakan Titik Q Mendekati Titik P

Pada Gambar 2.11 terdapat beberapa garis lurus, yaitu garis sekan berwarna biru yang terdiri atas $\overrightarrow{PQ}_1$, $\overrightarrow{PQ}_2$, $\overrightarrow{PQ}_3$, dan $\overrightarrow{PQ}_4$ akan terus berlanjut hingga $Q = P$. Setiap garis sekan akan memiliki kemiringan m_1 , m_2 , m_3 , dan m_4 . Ketika $Q = P$, akan terbentuk garis tangen yang digambarkan dengan garis kuning. Pergerakan Q menuju titik P mengakibatkan h mendekati 0 sehingga kemiringan garis tangen dapat dicari menggunakan rumus

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Rumus inilah yang disebut laju perubahan sesaat pada P dan menjadi dasar dalam pendefinisian turunan. Dengan memperumum rumus tersebut, diperoleh definisi berikut.

Definisi 2.4

Turunan fungsi $f(x)$ di x yang dinotasikan $f'(x)$ adalah

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

jika limitnya ada.

3. Penulisan Turunan Fungsi

Penulisan simbol turunan berbeda-beda. Beberapa simbol penulisan turunan yang sering digunakan adalah sebagai berikut.

- Notasi Newton, berbentuk $f'(x)$ atau y' , dikatakan turunan pertama fungsi $f(x)$.
- Notasi Leibniz, berbentuk $\frac{df(x)}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$, dikatakan turunan pertama fungsi $f(x)$.

Latihan Soal Definisi Turunan Fungsi

Gunakanlah sifat-sifat limit untuk menyelesaikan masalah berikut.

1. Tentukan nilai dari:

a. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2)$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{5x+4} - \sqrt{16-7x})$

c. $\lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{\frac{y^2}{2y^2 + 7y + 3}}$

d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} \right)$

e. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x - \pi}{\cos x} \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$, tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} \left(g(x) \frac{-3}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \right)$.

3. Diberikan fungsi $g(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{untuk } x \leq 2 \\ x^2 - 3, & \text{untuk } x > 2 \end{cases}$. Apakah $g(x)$ kontinu di R ?

4. Tentukan nilai $f'(-2)$ dan $f'(0)$ jika

a. $f(x) = -2x^2$

b. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

c. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

B. Sifat-Sifat Turunan Fungsi

1. Menemukan Sifat Turunan Fungsi

Pada bagian sebelumnya, kamu telah mengetahui definisi turunan fungsi. Bentuk suatu fungsi beragam sehingga dalam menurunkan suatu fungsi, kamu perlu menggunakan kaidah yang sesuai dengan jenis fungsinya. Oleh karena itu, terdapat beberapa sifat dalam menurunkan suatu fungsi. Kamu akan memahami sifat-sifat tersebut setelah melakukan beberapa kegiatan pada Ayo Bereksplorasi.

a. Aturan Pangkat dan Sifat Turunan Fungsi

Pada kegiatan berikut, kamu akan menentukan turunan beberapa fungsi.



Ayo Bereksplorasi 2.6

Misalkan terdapat fungsi $f(x) = x^2$. Dapatkah kamu mencari turunan fungsi tersebut? Untuk menentukan turunannya, cermatilah langkah-langkah berikut.

Langkah I: tuliskan turunan sesuai dengan definisi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$



Langkah II: uraikan dan sederhanakan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \left(\frac{2x + h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h). \end{aligned}$$



Langkah III: substitusi $h = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x = 2x^1.$$

Dengan cara yang sama, cobalah untuk melengkapi Tabel 2.5 berikut.

Tabel 2.5 Menentukan Turunan Beberapa Fungsi

Fungsi	Turunannya
x^2	$2x^1$
x^3	...
x^4	...
$\vdots$	$\vdots$
ax^n	...

Kamu dapat memahami temuan pada tabel di atas secara aljabar melalui uraian berikut.

Misalkan fungsi $g(x)$ kontinu pada R dan didefinisikan oleh $g(x) = ax^n$, $a, n \in R$, dan $n \neq 0$, maka

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^n - ax^n}{h} && (\text{gunakan Binomial Newton}) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a(x^n + nx^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + \dots + h^n)) - ax^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax^n + anx^{n-1}h + aC_2^n x^{n-2}h^2 + \dots + ah^n - ax^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{anx^{n-1}h + aC_2^n x^{n-2}h^2 + \dots + ah^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(anx^{n-1} + aC_2^n x^{n-2}h + \dots + ah^{n-1})}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (anx^{n-1} + aC_2^n x^{n-2}h + \dots + ah^{n-1}) \\
 &= anx^{n-1} + aC_2^n x^{n-2}(0) + \dots + a(0)^{n-1} \\
 &= anx^{n-1} + 0 = anx^{n-1}.
 \end{aligned}$$

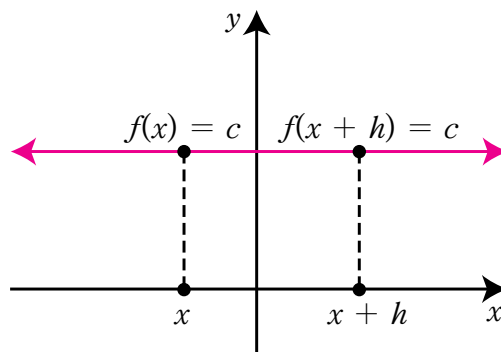
Sifat-Sifat

Aturan Pangkat

Misalkan $f(x) = ax^n$ adalah fungsi yang kontinu di R , $a, n \in R$, dan $n \neq 0$, maka

$$f'(x) = anx^{n-1}.$$

Selanjutnya, bagaimana jika $f(x)$ adalah fungsi konstan? Apakah kamu dapat menentukan turunannya? Untuk menjawab pertanyaan ini, cobalah cermati Gambar 2.12 berikut.



Gambar 2.12 Turunan Fungsi Konstan

Fungsi konstan pada Gambar 2.12 adalah $f(x) = c$ dan ditunjukkan oleh sinar garis berwarna merah muda. Pada gambar tersebut, terlihat bahwa untuk setiap x , maka $f(x) = c$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Sifat-Sifat

Turunan Fungsi Konstan (TFK)

Misalkan $f(x) = c$ adalah fungsi yang kontinu di R , maka $f'(x) = 0$.

Melalui kegiatan yang sama, kamu dapat menemukan beberapa sifat turunan fungsi berikut.

Sifat-Sifat

Sifat Turunan Fungsi

Misalkan fungsi $f(x)$ kontinu di R , maka berlaku

Sifat Turunan 1: fungsi $f(x) = k u(x)$, maka

$$f'(x) = k u'(x).$$

Sifat Turunan 2: fungsi $f(x) = u(x) \pm v(x)$, maka

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

Sifat Turunan 3: fungsi $f(x) = u(x)v(x)$, maka

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Sifat Turunan 4: fungsi $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ dengan $v(x) \neq 0$, maka

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$



Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana caramu menunjukkan Sifat Turunan 1 hingga Sifat Turunan 4? Buatlah kegiatan untuk menemukan jawabannya dengan berkolaborasi bersama temanmu.

Selain sifat-sifat yang baru saja dipelajari, Contoh Soal 2.4 melibatkan Sifat Eksponen dalam penyelesaiannya. Kamu dapat mengingat kembali Sifat Eksponen berikut ini.



Ayo Mengingat Kembali

Sifat Eksponen

Jika a, b, m, n bilangan real, $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, serta m dan n terdefinisi, maka berlaku

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $(ab)^n = a^n \times b^n$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, dengan $a > 0$, n bilangan asli, dan $n \geq 2$
- $a^0 = 1$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Contoh Soal 2.4

Tentukan turunan pertama fungsi berikut ini.

1. $y = 2$
2. $y = \frac{1}{2}x^2$
3. $y = x^3 + 3x^2 - 5x$
4. $y = \frac{6\sqrt{x}}{x^2}$
5. $y = x\sqrt{x}$

Alternatif penyelesaian:

1. $y = 2$ maka $y' = 0$ (TFK).
2. $y = \frac{1}{2}x^2$ maka $y' = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right)x^{2-1} = 1x^1 = x$ (Aturan Pangkat).
3. Dengan menggunakan Aturan Pangkat dan Sifat Turunan 2 pada $y = x^3 + 3x^2 - 5x$, diperoleh

$$\begin{aligned} y' &= (3 \times 1)x^{3-1} + (2 \times 3)x^{2-1} - (1 \times 5)x^{1-1} \\ &= 3x^2 + 6x^1 - 5x^0 \\ &= 3x^2 + 6x - 5 \end{aligned}$$

(Sifat Eksponen).

Jadi, turunan pertama dari $y = x^3 + 3x^2 - 5x$ adalah $y' = 3x^2 + 6x - 5$.

4. **Cara I:** menggunakan Sifat Turunan 4

Misalkan $u(x) = 6\sqrt{x} = 6x^{\frac{1}{2}}$ dan $v(x) = x^2$.

Dengan menerapkan Aturan Pangkat dan Sifat Eksponen, diperoleh

$$u'(x) = \left(\frac{1}{2} \times 6\right)x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = 3x^{-\frac{1}{2}} \text{ dan } v'(x) = 2x.$$

$$y' = \frac{(3x^{-\frac{1}{2}})x^2 - 2x(6x^{\frac{1}{2}})}{(x^2)^2} \quad (\text{Sifat Turunan 4})$$

$$= \frac{3x^{(-\frac{1}{2}+2)} - 12x^{(1+\frac{1}{2})}}{x^4} \quad (\text{Sifat Eksponen})$$

$$= \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 12x^{\frac{3}{2}}}{x^4} = -\frac{9x^{\frac{3}{2}}}{x^4} \quad (\text{operasi aljabar})$$

$$= -9x^{(\frac{3}{2}-4)} = -9x^{-\frac{5}{2}} \quad (\text{Sifat Eksponen})$$

$$= -\frac{9}{x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{9}{x^2\sqrt{x}} \quad (\text{Sifat Eksponen}).$$

Cara II: tanpa menggunakan Sifat Turunan 4

$$y = \frac{6\sqrt{x}}{x^2} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = 6x^{(\frac{1}{2}-2)} = 6x^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{Sifat Eksponen})$$

$$y' = \left(\left(-\frac{3}{2}\right) \times 6\right)x^{-\frac{3}{2}-1} \\ = -9x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{9}{x^2\sqrt{x}} \quad (\text{Aturan Pangkat dan Sifat Eksponen}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \frac{6\sqrt{x}}{x^2}$ adalah $y' = -\frac{9}{x^2\sqrt{x}}$

5. **Cara I:** menggunakan Sifat Turunan 3

Misalkan $u(x) = x$ dan $v(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, maka

$$u'(x) = 1 \text{ dan } v'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

$$y' = 1\sqrt{x} + x\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (\text{Sifat Turunan 3})$$

$$= 1\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{(-\frac{1}{2}+1)} \quad (\text{Sifat Eksponen})$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad (\text{Sifat Eksponen dan Sifat Aljabar}).$$

Cara II: tanpa menggunakan Sifat Turunan 3

$$y = x\sqrt{x} = x^1 x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Sifat Eksponen}).$$

$$y' = \frac{3}{2} x^{\left(\frac{3}{2}-1\right)} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x} \quad (\text{Aturan Pangkat dan Sifat Eksponen}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = x\sqrt{x}$ adalah $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

b. Aturan Rantai

Kamu perlu memahami sifat-sifat turunan fungsi dan penerapannya sebelum mengerjakan Ayo Bereksplorasi 2.7 berikut ini.



Ayo Bereksplorasi 2.7

Misalkan terdapat fungsi $f(x) = 1 + x^2$ dengan $f(x)$ kontinu di R . Dengan menerapkan Turunan Fungsi Konstan, Aturan Pangkat, dan Sifat Turunan 2, diperoleh

$$f'(x) = 2x.$$

Bagaimana jika $f(x) = (1 + x^2)^2$ atau $f(x) = (1 + x^2)^5$? Bagaimana caramu menentukan turunannya? Coba cermati dan isilah titik-titik pada langkah-langkah berikut.

► Menentukan turunan $f(x) = (1 + x^2)^2$

Langkah I: uraikan fungsi menggunakan sifat pangkat dan sifat aljabar

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x^2)^2 \\ &= (1 + x^2)(1 + x^2) \\ &= 1 + 2x^2 + x^4. \end{aligned}$$



Langkah II: gunakan sifat-sifat turunan fungsi

$$f'(x) = 0 + 4x + 4x^3 = 4x + 4x^3.$$



Langkah III: sederhanakan

$$f'(x) = 4x(1 + x^2).$$

Dengan cara yang sama, cobalah kamu lengkapi titik-titik di bawah ini.

► **Menentukan turunan** $f(x) = (1 + x^2)^3$.

Langkah I: uraikan fungsi menggunakan sifat pangkat dan sifat aljabar

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x^2)^3 = (1 + x^2)^2 (1 + x^2) \\ &= (\dots + \dots + \dots)(1 + x^2) \\ &= 1(\dots + \dots) + 2x^2(\dots + \dots) + x^4(\dots + \dots) \\ &= 1 + x^2 + \dots + 2x^4 + \dots + x^6 \\ &= \dots + 3x^2 + \dots + x^6. \end{aligned}$$

Langkah II: gunakan sifat-sifat turunan fungsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \dots + 6x + \dots + 6x^5 \\ &= \dots + 12x^3 + 6x^5. \end{aligned}$$

Langkah III: sederhanakan

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x(1 + \dots + x^4) \\ &= 6x(1 + x^2)^2. \end{aligned}$$

Berdasarkan kegiatanmu, cobalah lengkapi Tabel 2.6 berikut.

Tabel 2.6 Hasil Turunan Beberapa Fungsi

Bentuk Fungsi	Turunannya
$1 + x^2$	$2x = 1(1 + x^2)^0 2x$
$(1 + x^2)^2$	$4x(1 + x^2) = \dots(\dots + \dots)^1 2x$
$(1 + x^2)^3$	$\dots(1 + x^2)^{\dots} = 3(1 + x^2)^{\dots} \dots$

Dengan mencermati Tabel 2.6, kamu dapat menyimpulkan bahwa turunan dari fungsi $f(x) = (1 + x^2)^5$ adalah

$$f'(x) = 5(1 + x^2)^4 2x = 10x(1 + x^2)^4.$$



Ayo Berpikir Kritis

Pada kegiatan sebelumnya, kamu telah menemukan turunan dari $f(x) = (1 + x^2)^5$. Bagaimana untuk $f(x) = (1 + x^2)^k$, dengan $k \in R$? Dapatkah kamu menentukan $f'(x)$?

Melalui kegiatan Ayo Berpikir Kritis, kamu akan menemukan bahwa untuk $f(x) = (1 + x^2)^k$, dengan $k \in R$, maka

$$f'(x) = k(1 + x^2)^{k-1} 2x.$$

Perhatikan bahwa $2x$ merupakan turunan dari $(1 + x^2)$.

Misalkan $g(x) = 1 + x^2$, maka bentuk $f(x) = (1 + x^2)^k$ menjadi

$$f(x) = (g(x))^k,$$

sehingga

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(1 + x^2)^{k-1} 2x \\ &= k(g(x))^{k-1} g'(x). \end{aligned}$$

Misalkan diberikan fungsi $h(x) = x^k$, maka

$$h'(x) = kx^{k-1}.$$



Ayo Mengingat Kembali

Komposisi fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ ditulis $(f \circ g)(x)$ didefinisikan

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Komposisi $h'(x)$ dan $g(x)$ adalah

$$(h' \circ g)(x) = h'(g(x)) = k(g(x))^{k-1}.$$

Komposisi $h(x)$ dan $g(x)$ adalah

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = (g(x))^k = f(x).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} (h \circ g)'(x) &= f'(x) \\ &= k(g(x))^{k-1} g'(x) \\ &= h'(g(x)) g'(x). \end{aligned}$$

Temuan tersebut dikenal dengan aturan rantai dalam turunan fungsi.

Sifat-Sifat

Aturan Rantai

Turunan komposisi fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ atau } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx}.$$

Lebih lanjut, jika $f(x) = nx^k$, dengan $n, k \in \mathbb{R}$ dan

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = n(g(x))^k$, maka

$$(f \circ g)'(x) = nk(g(x))^{k-1}g'(x).$$

Contoh Soal 2.5

Tentukan turunan pertama dari:

1. $y = (x^2 - 4x - 2)^8$

4. $y = \left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^4$

2. $y = \sqrt[4]{(3x^2-1)^3}$

5. $y = \frac{(2x+3)^4}{(3x-2)^5}$

3. $y = -5x(2x-3)^4$

Alternatif penyelesaian:

1. Misalkan $g(x) = x^2 - 4x - 2$, maka

$$y = (g(x))^8 \text{ dan } g'(x) = 2x - 4.$$

Dengan menerapkan Aturan Rantai, diperoleh

$$\begin{aligned} y' &= (1 \times 8)(g(x))^{8-1}g'(x) \\ &= 8(g(x))^7g'(x) \\ &= 8(x^2 - 4x - 2)^7(2x - 4) \\ &= (16x - 32)(x^2 - 4x - 2)^7. \end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama dari $y = (x^2 - 4x - 2)^8$ adalah

$$y' = (16x - 32)(x^2 - 4x - 2)^7.$$

2. Misalkan $g(x) = 3x^2 - 1$, maka

$$y = \sqrt[4]{(g(x))^3} = (g(x))^{\frac{3}{4}} \text{ dan } g'(x) = 6x.$$

Dengan menerapkan Aturan Rantai dan Sifat Eksponen, diperoleh

$$\begin{aligned} y' &= \left(1 \times \frac{3}{4}\right)(g(x))^{\left(\frac{3}{4}-1\right)}g'(x) \\ &= \frac{3}{4}(g(x))^{-\frac{1}{4}}g'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4}(3x^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} 6x \\
&= \frac{18}{4}x(3x^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{18x}{4(3x^2 - 1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{9x}{2^4\sqrt{3x^2 - 1}}.
\end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \sqrt[4]{(3x^2 - 1)^3}$ adalah $y' = \frac{9x}{2^4\sqrt{3x^2 - 1}}$.

3. Misalkan $u(x) = -5x$ dan $v(x) = (2x - 3)^4$, diperoleh

$$u'(x) = -5$$

dan

$$\begin{aligned}
v'(x) &= 4(2x - 3)^{4-1} 2 && \text{(Aturan Rantai)} \\
&= 8(2x - 3)^3 && \text{(Sifat Aljabar)}
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
y &= -5x(2x - 3)^4 \\
y' &= -5(2x - 3)^4 + (-5x)(8(2x - 3)^3) && \text{(Sifat Turunan 3)} \\
&= -5(2x - 3)^4 + 8(-5x)(2x - 3)^3 && \text{(Sifat Aljabar)} \\
&= 5(-(2x - 3)^4 - 8x(2x - 3)^3) && \text{(Sifat Aljabar)} \\
&= 5(-((2x - 3)^3(2x - 3)) - 8x(2x - 3)^3) && \text{(Sifat Eksponen)} \\
&= 5(2x - 3)^3(-(2x - 3) - 8x) && \text{(Sifat Aljabar)} \\
&= 5(2x - 3)^3(-2x + 3 - 8x) && \text{(Sifat Aljabar)} \\
&= 5(2x - 3)^3(3 - 10x) && \text{(Sifat Aljabar).}
\end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama dari $y = -5x(2x - 3)^4$ adalah $y' = 5(2x - 3)^3(3 - 10x)$.

4. Misalkan $g(x) = \frac{3x - 1}{5x + 2}$, maka $y = (g(x))^4$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{3(5x + 2) - (3x - 1)(5)}{(5x + 2)^2} && \text{(Sifat Turunan 4)} \\
&= \frac{15x + 6 - 15x + 5}{(5x + 2)^2} && \text{(Sifat Aljabar)} \\
&= \frac{11}{(5x + 2)^2} && \text{(Sifat Aljabar)}
\end{aligned}$$

maka

$$y = \left(\frac{3x - 1}{5x + 2}\right)^4$$

$$\begin{aligned}
 y' &= 4 \left(\frac{3x-1}{5x+2} \right)^{4-1} \left(\frac{11}{(5x+2)^2} \right) && \text{(Aturan Rantai)} \\
 &= 4 \left(\frac{3x-1}{5x+2} \right)^3 \left(\frac{11}{(5x+2)^2} \right) \\
 &= 4 \frac{(3x-1)^3}{(5x+2)^3} \left(\frac{11}{(5x+2)^2} \right) && \text{(Sifat Eksponen)} \\
 &= \frac{44(3x-1)^3}{(5x+2)^5} && \text{(Sifat Eksponen).}
 \end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \left(\frac{3x-1}{5x+2} \right)^4$ adalah $y' = \frac{44(3x-1)^3}{(5x+2)^5}$.

5. Misalkan $u(x) = (2x+3)^4$ dan $v(x) = (3x-2)^5$.

Dengan menggunakan Aturan Rantai, diperoleh

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= 4(2x+3)^{4-1}(2) = 8(2x+3)^3 \\
 v'(x) &= 5(3x-2)^{5-1}(3) = 15(3x-2)^4
 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{(2x+3)^4}{(3x-2)^5} \\
 y' &= \frac{(8(2x+3)^3(3x-2)^5) - ((2x+3)^4 15(3x-2)^4)}{((3x-2)^5)^2} && \text{(Sifat Turunan 4)} \\
 &= \frac{(8(2x+3)^3(3x-2)^5) - (15(3x-2)^4(2x+3)^4)}{(3x-2)^{10}} && \text{(Sifat Aljabar dan Sifat Eksponen)} \\
 &= \frac{(8(3x-2)^5(2x+3)^3) - (15(3x-2)^4(2x+3)^4)}{(3x-2)^{10}} && \text{(Sifat Aljabar)} \\
 &= \frac{(3x-2)^4(2x+3)^3((8(3x-2)) - (15(2x+3)))}{(3x-2)^{10}} && \text{(Sifat Aljabar)} \\
 &= \frac{(3x-2)^4(2x+3)^3(24x-16-30x-45)}{(3x-2)^{10}} && \text{(Sifat Aljabar)} \\
 &= \frac{(3x-2)^4(2x+3)^3(-6x-61)}{(3x-2)^{10}} && \text{(Sifat Aljabar)} \\
 &= \frac{(2x+3)^3(-6x-61)}{(3x-2)^6} && \text{(Sifat Eksponen)} \\
 &= -\frac{(2x+3)^3(6x+61)}{(3x-2)^6} && \text{(Sifat Aljabar)}
 \end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \frac{(2x+3)^4}{(3x-2)^5}$ adalah $y' = -\frac{(2x+3)^3(6x+61)}{(3x-2)^6}$.

2. Turunan Fungsi Aljabar

Fungsi aljabar terdiri atas fungsi polinomial, fungsi rasional, dan fungsi akar, atau kombinasinya. Dalam menurunkan fungsi aljabar, kamu perlu menggunakan kaidah yang sesuai dengan jenis fungsinya. Contoh soal pada bagian sebelumnya merupakan contoh turunan fungsi aljabar. Agar lebih memahami penggunaan sifat-sifat turunan fungsi dalam menentukan turunan fungsi aljabar, kamu dapat melakukan kegiatan Ayo Mencoba berikut.



Ayo Mencoba 2.3

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Tentukan turunan pertama dari:

$$1. y = 2\left(\frac{x^2 + 2}{x}\right)$$

$$2. y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x}$$

$$3. y = \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2 - x}}$$

Alternatif penyelesaian:

1. Misalkan $u(x) = x^2 + 2$ dan $v(x) = x$, maka

$$y' = 2\left(\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}\right) \quad (\text{Sifat Turunan 4})$$

$$= 2\left(\frac{(\dots x^{\dots-1} + 0)x - (\dots + \dots)(1x^{1-1})}{\dots}$$

$$= 2\left(\frac{(\dots)x - (x^2 + 2)(x^0)}{x^2}\right) \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= 2\left(\frac{2x^2 - (\dots + \dots)}{x^2}\right) \quad (\text{Sifat Eksponen})$$

$$= 2\left(\frac{\dots - 2}{x^2}\right) = \frac{\dots - 4}{x^2} = \dots - \frac{\dots}{x^2} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = 2\left(\frac{x^2 + 2}{x}\right)$ adalah

2. **Cara I:** penyederhanaan ke bentuk pembagian

Fungsi y dapat diubah menjadi

$$y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + x^2}{x}\right).$$

Misalkan $u(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^2$ dan $v(x) = x$, maka

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}\right) \quad (\text{Sifat Turunan 4})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(\dots + \dots)x - (\dots + \dots)1x^{1-1}}{x^2}\right) \quad (\text{Aturan Pangkat})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(\dots + \dots)x - (x^{\frac{1}{2}} + x^2) \dots^0}{x^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(\dots + \dots) - (x^{\frac{1}{2}} + x^2)}{x^2} \right) \quad (\text{Sifat Eksponen})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\dots + \dots}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dots}{x^2} + 1 \right) \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{\dots}{x^2} \right) \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\dots} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Cara II: penyederhanaan ke bentuk perkalian

Fungsi y dapat diubah menjadi

$$y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x} = \left(\frac{1}{2x} \right) (\sqrt{x} + x^2).$$

Misalkan $u(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^2$ dan $v(x) = \frac{1}{2}x$, maka

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (\text{Sifat Turunan 3})$$

$$= (\dots + \dots) \left(\frac{1}{2x} \right) + (x^{\frac{1}{2}} + x^2) \left(\frac{\dots}{\dots} \right) \quad (\text{Sifat Turunan 3})$$

$$= \left(\frac{\dots}{\dots} + 1 \right) + \left(-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2x^2} - \frac{\dots}{\dots} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \left(\frac{1}{\dots} + 1 \right) + \left(-\frac{1}{\dots} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar dan Sifat Eksponen})$$

$$= -\frac{1}{\dots} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\dots} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x}$ adalah

3. Fungsi y dapat diubah menjadi

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2 - x}} = \sqrt{\frac{x(x+1)}{x(x-1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Misalkan $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $u(x) = x+1$, dan $v(x) = x-1$, maka

$$y = (g(x))^{\frac{1}{2}}, \quad u'(x) = 1, \quad \text{dan} \quad v'(x) = 1$$

sehingga diperoleh

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \quad (\text{Sifat Turunan 4})$$

$$= \frac{\dots - \dots}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\dots}{(x-1)^2} \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= -\frac{\dots}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{2}(g(x))^{\frac{1}{2}-1} g'(x) && \text{(Aturan Rantai)} \\
 &= \dots \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dots}{\dots} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\dots}{(x-1)^2} \right) && \text{(Sifat Aljabar dan Sifat Eksponen)} \\
 &= - \left(\frac{(\dots)^{-\frac{1}{2}}}{(\dots)^{-\frac{1}{2}} (x-1)^2} \right) && \text{(Sifat Aljabar dan Sifat Eksponen)} \\
 &= - \left(\frac{\dots}{\dots} \right) && \text{(Sifat Eksponen)} \\
 &= - \frac{\dots}{\dots} && \text{(Sifat Aljabar).}
 \end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2-x}}$ adalah

3. Turunan Fungsi Trigonometri

Cara yang digunakan dalam menentukan turunan fungsi trigonometri tidak jauh berbeda ketika menentukan turunan fungsi aljabar, yaitu dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi. Sebelumnya, kamu perlu mengetahui turunan fungsi trigonometri dasar. Bagaimanakah turunan fungsi trigonometri dasar tersebut? Untuk mengetahuinya, kamu dapat mengerjakan Ayo Bereksplorasi 2.8 berikut.



Ayo Bereksplorasi 2.8

Kamu dapat melengkapi titik-titik pada kegiatan ini sesuai dengan pemahamanmu dalam pembelajaran sebelumnya. Kamu akan lebih mudah menyelesaikannya dengan mengingat kembali identitas trigonometri.



Ayo Mengingat Kembali

Identitas Trigonometri

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

Misalkan fungsi f dan g kontinu pada R dengan $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$.

a. Menentukan turunan $f(x) = \sin x$

Sesuai dengan definisi turunan $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, maka

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \dots \left(\frac{1}{2}(\dots) \right) \sin(\dots)}{h} && \text{(Identitas Trigonometri)} \\
 &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} 2 \dots \left(\frac{1}{2}(\dots) \right) \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\dots}{\dots} \right) \right) && \text{(Sifat Limit 4).}
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat limit fungsi trigonometri dan sifat aljabar, diperoleh

$$f'(x) = \left(2 \cos \left(\frac{1}{2} \dots \right) \right) \left(\frac{1}{2} \right) = (2 \cos x) \left(\frac{1}{2} \right) = \cos x.$$

Jadi, jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$.

- b. Menentukan turunan $g(x) = \cos x$

Sesuai dengan definisi turunan $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$, maka

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \dots \left(\frac{1}{2}(\dots) \right) \sin(\dots)}{h} && \text{(Identitas Trigonometri)} \\
 &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} -2 \sin \left(\frac{1}{2}(\dots) \right) \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dots}{\dots} \right) && \text{(Sifat Limit 4).}
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat limit fungsi trigonometri dan sifat aljabar, diperoleh

$$g'(x) = (-2 \sin(\dots)) \left(\frac{1}{2} \right) = (-2 \sin x) \left(\frac{1}{2} \right) = -\sin x.$$

Jadi, jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$.

Sifat-Sifat

Sifat Turunan Trigonometri 1 (STT 1)

Misalkan $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu di R , maka

$$f'(x) = \cos x \text{ dan } g'(x) = -\sin x.$$

Sifat Turunan Trigonometri 1 merupakan hasil dari kegiatan Ayo Bereksplorasi 2.8. Melalui kegiatan serupa, kamu dapat menemukan sifat-sifat turunan fungsi trigonometri berikut.

Sifat-Sifat

Misalkan fungsi f kontinu sehingga berlaku

STT 2: $f(x) = \tan x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$.

STT 3: $f(x) = \cot x$, maka $f'(x) = -\csc^2 x$.

STT 4: $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \tan x$.

STT 5: $f(x) = \csc x$, maka $f'(x) = -\csc x \cot x$.



Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana caramu menunjukkan STT 2 hingga STT 5? Buatlah kegiatan untuk menemukan jawabannya dengan berkolaborasi bersama temanmu.

Sifat-sifat yang telah dipaparkan merupakan turunan fungsi trigonometri dasar, sedangkan untuk menentukan turunan fungsi yang lebih kompleks, kamu dapat menggunakan sifat-sifat turunan fungsi yang telah dipelajari pada subbab sebelumnya. Kamu akan memahami pernyataan tersebut setelah mencermati contoh berikut ini.

Contoh Soal 2.6

1. $y = 2 \sin x + 5x$ 2. $y = 2 \sin x \tan x$ 3. $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

Alternatif penyelesaian:

1. $y = 2 \sin x + 5x$

maka

$$y' = 2(\cos x) + 5x^{1-1} \quad (\text{Sifat Turunan 2 dan STT 1})$$

$$= 2 \cos x + 5x^0 \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= 2 \cos x + 5 \quad (\text{Sifat Eksponen}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = 2 \sin x + 5x$ adalah $y' = 2 \cos x + 5$.

2. $y = 2 \sin x \tan x$.

Misalkan $\sin x = u(x)$ dan $\tan x = v(x)$, maka

$$y' = 2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \quad (\text{Sifat Turunan 3})$$

$$= 2(\cos x \tan x + \sin x \sec^2 x) \quad (\text{STT 1 dan STT 2})$$

$$= 2\left(\cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) + \sin x \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\right) \quad (\text{Identitas Trigonometri})$$

$$= 2\left(\sin x + \frac{\tan x}{\cos x}\right) \quad (\text{Identitas Trigonometri})$$

$$= 2 \sin x + \frac{2 \tan x}{\cos x} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = 2 \sin x \tan x$ adalah $y' = 2 \sin x + \frac{2 \tan x}{\cos x}$.

3. $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

Misalkan $1 + \cos x = u(x)$ dan $\sin x = v(x)$, maka

$$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \quad (\text{Sifat Turunan 4})$$

$$= \frac{(-\sin x)\sin x - (1 + \cos x)\cos x}{\sin^2 x} \quad (\text{STT 1 dan Sifat Aljabar})$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) - \cos x}{\sin^2 x} \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \frac{-1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} \quad (\text{Identitas Trigonometri})$$

$$= -\frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= -\frac{1}{1 - \cos x} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ adalah $y' = -\frac{1}{1 - \cos x}$.



Ayo Mencoba 2.4

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Tentukan turunan fungsi $y = \frac{2\sqrt{x} + \sin x}{\cos x}$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $2\sqrt{x} + \sin x = u(x)$ dan $\cos x = v(x)$, maka

$$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \quad (\text{Sifat Turunan 4})$$

$$= \frac{\left(\left(2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}\right) + \dots\right)\cos x - (\dots + \dots)(-\sin x)}{\dots} \quad (\text{Aturan Pangkat dan STT 1})$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\dots} + \dots\right)\cos x + \sin x(\dots + \dots)}{\dots} \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$= \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \dots + \sin^2 x + 2\sqrt{x} \dots}{\dots} \quad (\text{Identitas Trigonometri})$$

$$= \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + 1 + 2\sqrt{x} \dots}{\dots}$$

(Identitas Trigonometri)

$$= \frac{\dots}{\sqrt{x} \cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\dots}{\cos^2 x}$$

(Sifat Aljabar)

$$= \frac{1}{\sqrt{x} \dots} + \frac{1}{\dots} + \frac{2\sqrt{x} \dots}{\cos x}$$

(Identitas Trigonometri)

$$= \frac{1}{\dots} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos x} + 2\sqrt{x} \dots \right)$$

(Sifat Aljabar)

$$= \sec x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sec x + 2\sqrt{x} \dots \right)$$

(Identitas Trigonometri).

Jadi, turunan fungsi $y = \frac{2\sqrt{x} + \sin x}{\cos x}$ adalah



Ayo Berdiskusi

Diskusikan bersama kelompokmu untuk memecahkan masalah berikut.

Seekor laba-laba merayap pada bidang Kartesius. Pada posisi t detik laba-laba berada pada posisi $(x(t), y(t))$. Nilai $x(t)$ ditentukan oleh persamaan kurva $x(t) = t^2 - 4$, sedangkan $y(t)$ ditentukan oleh kurva $y(t) = t^2 - 2t + 6$. Tentukan:

1. persamaan yang menunjukkan pergerakan laba-laba pada bidang Kartesius,
2. posisi laba-laba pada $t = 2$ detik, serta
3. kecepatan laba-laba pada $t = 2$ detik (kamu dapat menemukan kecepatan dengan mencari turunan pertama).

4. Turunan Fungsi Eksponensial

Jumlah penduduk di Indonesia mengalami peningkatan setiap tahunnya. Kondisi tersebut tentunya berpengaruh terhadap kepadatan penduduk Indonesia. Oleh karena itu, Indonesia perlu memprediksi laju perubahan jumlah penduduk di setiap kota pada tahun berikutnya untuk mengantisipasi kepadatan penduduk di kota tersebut. Terdapat berbagai cara untuk memprediksi laju perubahan tersebut, misalnya dengan menerapkan turunan.

Pada umumnya, fungsi untuk memprediksi laju perubahan jumlah penduduk merupakan fungsi eksponensial seperti $P_t = P_0 \cdot e^{rt}$. Sebelum mempelajari turunan fungsi eksponensial, kamu perlu mengingat kembali tentang sifat eksponen dan definisi fungsi eksponensial berikut ini.



Ayo Mengingat Kembali

Sifat Eksponen

Jika a, b, m, n bilangan real, $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, serta m dan n terdefinisi, maka berlaku

- ▶ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ▶ $a^0 = 1$ ▶ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ dengan $a > 0$, n
- ▶ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ▶ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ bilangan asli, dan $n \geq 2$.
- ▶ $(a^m)^n = a^{m \times n}$ ▶ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ▶ $(ab)^n = a^n \times b^n$

Definisi Fungsi Eksponen

Fungsi eksponensial $f(x)$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = a^x,$$

dengan x sebarang bilangan real dan a basis, $a > 0$, $a \neq 1$.



Ayo Bereksplorasi 2.9

Misalkan diberikan fungsi eksponensial $f(x) = a^x$ dengan x sebarang bilangan real, $a > 0$, dan $a \neq 1$. Dengan menerapkan definisi turunan fungsi, kamu dapat melengkapi titik-titik di bawah ini.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (\dots - \dots)}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dots}{h}. \end{aligned}$$

Kamu akan menemukan bahwa turunan $f(x) = a^x$ adalah

$$f'(x) = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Untuk mengetahui nilai turunan tersebut, kamu perlu mencari nilai dari $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ secara intuitif dengan melengkapi Tabel 2.7. Kamu dapat menggunakan kalkulator untuk mempermudah perhitungan.

Tabel 2.7 Penentuan Nilai $\frac{a^h-1}{h}$ untuk $a=2$ dan $a=3$

h	$\frac{2^h-1}{h}$	$\frac{3^h-1}{h}$
0,5	0,8284	1,4641
0,25	...	1,2643
0,175	0,7369	...
0,0625	...	1,1372
0,03125	0,7007	...
0,00111	...	1,0993
0,000001	0,6931	...
0,0000001	0,6931	1,0986

Setelah Tabel 2.7 terisi lengkap, kamu akan menemukan bahwa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h-1}{h} \approx 0,6931 \text{ dan } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h-1}{h} \approx 1,0986.$$

Dengan mencermati temuan tersebut, kamu dapat menyatakan bahwa untuk $2 < a < 3$, jika h mendekati 0, maka nilai $\frac{a^h-1}{h}$ mendekati 1. Artinya, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$ untuk $2 < a < 3$.

Selanjutnya, kamu dapat memperhatikan uraian berikut ini.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1$$

$$\frac{a^h-1}{h} = 1$$

$$a^h-1 = h$$

$$a^h = (h+1)^1$$

$$(a^h)^{\frac{1}{h}} = (h+1)^{\frac{1}{h}}$$

$$a = (h+1)^{\frac{1}{h}}$$

sehingga

$$\lim_{h \rightarrow 0} a = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1)^{\frac{1}{h}}$$

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1)^{\frac{1}{h}}.$$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \text{ dan } a = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1)^{\frac{1}{h}} \text{ untuk } 2 < a < 3.$$

Nilai $\lim_{h \rightarrow 0} (h+1)^{\frac{1}{h}}$ ini merupakan angka spesial yang disebut *basis natural* (e). Temuan ini menghasilkan definisi berikut.

Definisi 2.5

Angka spesial e didefinisikan sebagai

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1)^{\frac{1}{h}} \approx 2,718281828459 \text{ dan } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Misalkan $f(x) = e^x$, jelas bahwa $e \neq 1$ dan $e > 0$. Berdasarkan sifat turunan fungsi eksponensial, diperoleh

$$f'(x) = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Sifat-Sifat

Sifat Turunan e^x

Turunan dari $f(x) = e^x$ adalah e^x . Ditulis

$$f'(x) = f(x) = e^x.$$

Selanjutnya, bagaimana menentukan turunan jika pangkatnya sebuah fungsi? Kamu dapat mencermati uraian berikut ini.

Diberikan $h(x) = e^{x^2-5x}$. Misalkan $g(x) = e^x$ dan $f(x) = x^2 - 5x$, maka

$$h(x) = e^{x^2-5x} = g(f(x)),$$

$$g'(x) = e^x, \text{ dan}$$

$$f'(x) = 2x - 5.$$

Dengan menggunakan Aturan Rantai, diperoleh

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) \\ &= e^{f(x)}(2x - 5) \\ &= e^{x^2-5x}(2x - 5). \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh sifat berikut.

Sifat-Sifat

Sifat Turunan $e^{f(x)}$

Turunan dari $h(x) = e^{f(x)}$ adalah

$$h'(x) = e^{f(x)} f'(x).$$

Kamu akan menggunakan definisi dan sifat-sifat turunan tersebut untuk menentukan turunan dari sebarang fungsi eksponensial $f(x)$. Sebelumnya, kamu dapat mengingat kembali definisi dan sifat logaritma berikut ini.



Ayo Mengingat Kembali

Definisi Logaritma

Logaritma didefinisikan sebagai berikut:

$${}^a\log x = y \text{ berarti } a^y = x,$$

dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Logaritma natural didefinisikan sebagai berikut:

$$\ln x = {}^e\log x.$$

Sifat Logaritma

- | | |
|--|-----------------------|
| ▶ $b^{{}^b\log x} = x$ | ▶ ${}^a\log a = 1$ |
| ▶ ${}^a\log(x^k) = k {}^a\log x$ | ▶ ${}^a\log(a^k) = k$ |
| ▶ ${}^b\log x = \frac{{}^a\log x}{{}^a\log b}$ | ▶ ${}^a\log 1 = 0$ |

Misalkan $f(x) = a^x$. Berdasarkan definisi dan sifat logaritma, diperoleh

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} = e^{(\ln a)x}.$$

Dengan menggunakan sifat logaritma dan sifat turunan $e^{f(x)}$, diperoleh

$$f'(x) = e^{(\ln a)x} \ln a = a^x \ln a = (\ln a) a^x.$$

Temuan ini menghasilkan sifat berikut.

Sifat-Sifat

Sifat Turunan a^x

Turunan dari $f(x) = a^x$ adalah

$$f'(x) = (\ln a)a^x,$$

dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Definisi dan sifat-sifat yang telah diuraikan merupakan turunan fungsi eksponensial. Kamu akan lebih memahaminya setelah mencermati contoh berikut ini.

Contoh Soal 2.7

Tentukan turunan pertama dari:

1. $y = 2e^{3x}$
2. $y = e^x - 5x^3$
3. $y = 2^x$
4. $y = 3^{2x}$

Alternatif penyelesaian:

1. Dengan menggunakan Sifat Turunan $e^{f(x)}$ pada $y = 2e^{3x}$, diperoleh

$$y' = 2e^{3x}(3) = 6e^{3x}.$$

2. Dengan menggunakan Sifat Turunan e^x dan Sifat Turunan 2 pada $y = e^x - 5x^3$, diperoleh

$$y' = e^x - 15x^2.$$

3. Dengan menggunakan Sifat Turunan a^x pada $y = 2^x$, diperoleh

$$y' = (\ln 2)2^x.$$

4. $y = 3^{2x}$. Misalkan $g(x) = 2x$, maka $y = 3^{g(x)}$. Dengan menggunakan Aturan Rantai dan Sifat Turunan a^x , diperoleh

$$y' = (\ln 3)3^{2x}(2) = 2(\ln 3)3^{2x}.$$



Ayo Mencoba 2.5

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Tentukan turunan fungsi berikut ini.

1. $y = 8^x$

3. $y = 4^{x^2+5}$

2. $y = e^{8x}$

4. $y = e^{x^2}$

Alternatif penyelesaian:

1. Dengan menggunakan Sifat Turunan
- a^x
- pada
- $y = 8^x$
- , diperoleh

2. Dengan menggunakan Sifat Turunan
- $e^{f(x)}$
- pada
- $y = e^{8x}$
- , diperoleh

3. Dengan menggunakan Aturan Rantai dan Sifat Turunan
- a^x
- pada
- $y = 4^{x^2+5}$
- , diperoleh

4. Dengan menggunakan Sifat Turunan
- $e^{f(x)}$
- pada
- $y = e^{x^2}$
- , diperoleh

Latihan Soal Sifat-Sifat Turunan Fungsi**Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar.**

1. Tentukan turunan fungsi berikut ini.

a. $y = (3x^2 - 5) \cos x$

d. $y = (2 + \cos x)^4$

b. $y = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{-4}$

e. $y = e^{\sqrt{x-7}}$

c. $y = \sqrt{\frac{1}{(2x+3)^3}}$

f. $y = 12^{7x-4}$

2. Jari-jari sebuah bola bertambah panjang dengan laju 2 cm per detik. Misalkan jari-jari bola tersebut 30 cm. Tentukan laju bertambahnya luas permukaan bola dan laju bertambahnya volume bola.

3. Diketahui persamaan fungsi trigonometri
- $f(x) = 2 - 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$
- didefinisikan pada daerah asal
- $D_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \in R\}$
- .

- a. Tentukan turunan pertama dari
- $f(x)$
- .

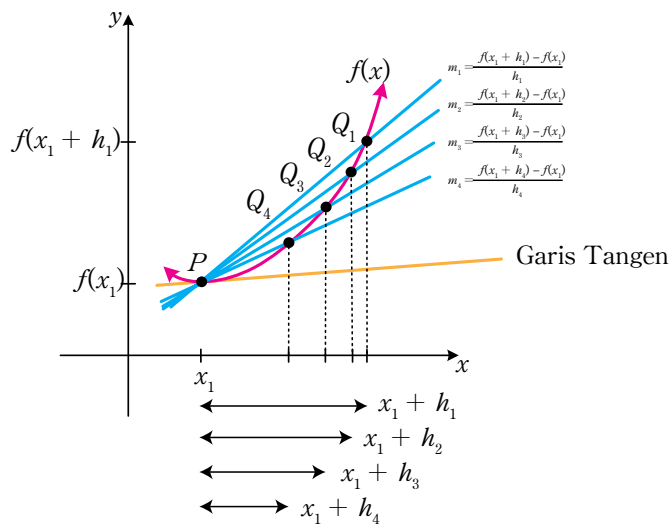
- b. Jika
- $f'(x)$
- bernilai nol pada
- $x = x_1$
- dan
- $x = x_2$
- , tentukan nilai dari
- $x_1^2 + x_2^2$
- .

- Sebuah perusahaan membelanjakan miliaran rupiah untuk membeli buah dan sayur organik yang akan dijual kembali. Fungsi $A(t) = 2,43e^{0,18t}$ menunjukkan jumlah dalam miliar rupiah yang dibelanjakan untuk buah dan sayur organik pada t tahun setelah tahun 2010. Perkirakan jumlah pengeluaran perusahaan tersebut untuk membelanjakan buah dan sayur organik pada tahun 2025.
- Sebuah kantor di Jakarta membeli sebuah mesin fotokopi seharga Rp52.000.000,00. Nilai penyusutan aset dari mesin fotokopi tersebut dihitung menggunakan fungsi $V(t) = 52.000.000(0,80)^t$, dengan t adalah waktu dalam tahun. Tentukan nilai penyusutan aset mesin fotokopi setelah 10 tahun pembelian.

C. Aplikasi Turunan Fungsi

1. Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Secara sederhana, garis singgung pada kurva merupakan garis lurus yang menyentuh kurva pada satu titik dan memiliki arah yang sama dengan kurva di titik tersebut. Pada kegiatan yang berkaitan dengan konsep turunan fungsi, kamu telah menemukan garis tangen yang digambarkan sebagai garis kuning pada Gambar 2.13 berikut.



Gambar 2.13 Garis Tangen Kurva $f(x)$

Bila kamu cermati, garis tangen menyentuh kurva $f(x)$ tepat di satu titik $P(x_1, f(x_1))$ dan memiliki arah yang sama dengan kurva $f(x)$. Dengan kata lain, garis tangen tersebut merupakan garis singgung kurva $f(x)$ pada titik P .

Pada kegiatan sebelumnya, pergerakan titik Q mendekati titik P mengakibatkan Δx atau h mendekati 0 sehingga kamu memperoleh kemiringan (gradien) garis tangen, yaitu

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Kamu juga telah menemukan bahwa turunan fungsi $f(x)$ pada x didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Dengan mengaitkan hubungan antartemuan tersebut, kamu dapat menentukan kemiringan garis singgung kurva menggunakan konsep turunan. Artinya, kemiringan garis singgung $y = f(x)$ pada titik $P(x_1, f(x_1))$ dapat dihitung menggunakan rumus:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1).$$

Untuk menentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik $P(x_1, f(x_1))$ dengan kemiringan m , kamu dapat menggunakan konsep persamaan garis lurus yang melalui sebuah titik dengan kemiringan atau gradien diketahui, yaitu

$$(y - f(x_1)) = m(x - x_1).$$

Kamu dapat mencermati bentuk umum dari rumus tersebut, yaitu sebagai berikut.

Misalkan $P(a, b)$ adalah titik singgung kurva $y = f(x)$, maka

- kemiringan garis singgung kurva y di titik P adalah

$$m = f'(a),$$

- persamaan garis singgung kurva y di titik P adalah

$$(y - b) = m(x - a).$$

Supaya kamu dapat memahami konsep persamaan garis singgung kurva, perhatikan beberapa contoh soal berikut ini.

Contoh Soal 2.8

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = 2 - 4x^2$ di titik $(1, -2)$.

Alternatif penyelesaian:

- **Langkah I:** menentukan turunan fungsi y

$$y = f(x) = 2 - 4x^2, \text{ maka}$$

$$f'(x) = -8x.$$

- **Langkah II:** menentukan kemiringan garis singgung kurva

Kemiringan garis singgung pada titik $(1, -2)$ adalah

$$f'(1) = -8.$$

- **Langkah III:** menentukan persamaan garis singgung

Persamaan garis singgung $y = 2 - 4x^2$ di titik $(1, -2)$ adalah

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y + 2) = -8(x - 1)$$

$$y + 2 = -8x + 8$$

$$y = -8x + 6$$

Jadi, persamaan garis singgung $y = 2 - 4x^2$ di titik $(1, -2)$ adalah $y = -8x + 6$.



Ayo Mencoba 2.6

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - x + 2$ di titik A dengan absis 1.

Alternatif penyelesaian:

- **Langkah I:** menentukan koordinat titik A

Titik singgung $A(1, y_1)$ dapat ditentukan dengan menyubstitusikan $x = 1$ pada kurva y , diperoleh

$$y_1 = f(1) = \dots^2 - \dots + 2 = \dots,$$

sehingga titik singgungnya adalah $A(1, \dots)$.

- **Langkah II:** menentukan turunan fungsi y

$$y = f(x) = x^2 - x + 2,$$

maka $y' = f'(x) = \dots$

- **Langkah III:** menentukan kemiringan garis singgung

Kemiringan garis singgung pada titik $(1, 2)$ adalah

$$f'(\dots) = \dots$$

- **Langkah IV:** menentukan persamaan garis singgung

Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - x + 2$ di titik $A(1, \dots)$, adalah

$$(y - y_A) = m(x - x_A)$$

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - x + 2$ di titik A dengan absis 1 adalah

2. Tentukan persamaan garis singgung di titik potong garis $y = x + 1$ dengan kurva $y = x^2 + 2x + 1$.

Alternatif penyelesaian:

- **Langkah I:** menentukan titik potong

Titik potong garis $y = x + 1$ dengan kurva $y = x^2 + 2x + 1$ adalah

$$y_{\text{garis}} = y_{\text{parabola}}$$

$$x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$-x^2 - 2x + x = 1 - 1$$

(kedua ruas ditambah $(-x^2 - 2x - 1)$)

$$x^2 + x = 0$$

(kedua ruas dikali -1)

$$x(x + 1) = 0$$

(pemfaktoran)

diperoleh

$$x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = -1.$$

Karena terdapat dua nilai x , artinya terdapat dua titik singgung.

Untuk $x_1 = 0$, maka

$$y = \dots,$$

diperoleh titik singgung $(0, \dots)$.

Untuk $x_2 = -1$, maka

$$y = \dots,$$

diperoleh titik singgung $(-1, \dots)$.

- **Langkah II:** menentukan turunan fungsi $y = x^2 + 2x + 1$

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 1, \text{ maka}$$

$$y' = f'(x) = \dots$$

- **Langkah III:** menentukan kemiringan garis singgung

Kemiringan garis singgung pada titik $(0, \dots)$ adalah

$$f'(\dots) = \dots$$

Kemiringan garis singgung pada titik $(-1, \dots)$ adalah

$$f'(\dots) = \dots$$

- **Langkah IV:** menentukan persamaan garis singgung.

Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 2x + 1$ di titik $(0, \dots)$ adalah

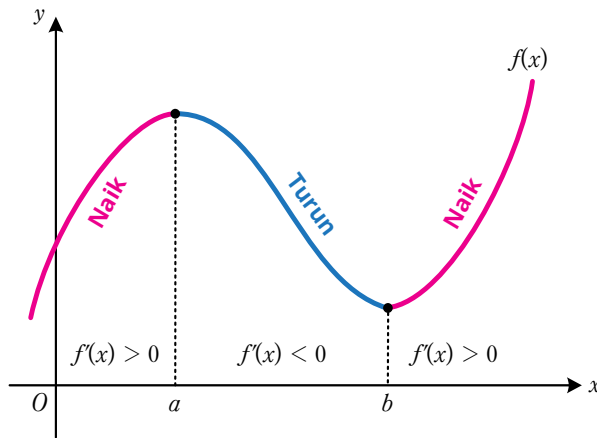
$$(y - \dots) = \dots (x - \dots)$$

Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 2x + 1$ di titik $(-1, \dots)$ adalah

$$(y - \dots) = \dots (x - \dots)$$

2. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Fungsi Diam

Kamu dapat memahami konsep fungsi naik dan fungsi turun dengan mencermati grafik fungsi $y = f(x)$ pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14 Kemonotonan Grafik Fungsi $f(x)$

Saat $x < a$, nilai x bergerak ke kanan dan grafik fungsi $f(x)$ bergerak ke atas atau naik, artinya fungsi $f(x)$ naik untuk $x < a$. Hal ini juga terjadi saat $x > b$ sehingga fungsi $f(x)$ naik untuk $x > b$. Saat x di sekitar a hingga b atau $a < x < b$, nilai x bergerak ke kanan tetapi grafik fungsi $f(x)$ bergerak turun, artinya fungsi $f(x)$ turun untuk $a < x < b$. Berdasarkan penjelasan tersebut, diperoleh definisi berikut.

Definisi 2.6

Misalkan fungsi $f(x)$ terdefinisi dalam interval I .

- Fungsi $f(x)$ dikatakan sebagai *fungsi naik* dalam interval I jika untuk setiap bilangan x_1 dan x_2 dalam interval I dan $x_1 < x_2$, berlaku hubungan $f(x_1) < f(x_2)$, atau ditulis

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Fungsi $f(x)$ dikatakan sebagai *fungsi turun* dalam interval I jika untuk setiap bilangan x_1 dan x_2 dalam interval I dan $x_1 < x_2$, berlaku hubungan $f(x_1) > f(x_2)$, atau ditulis

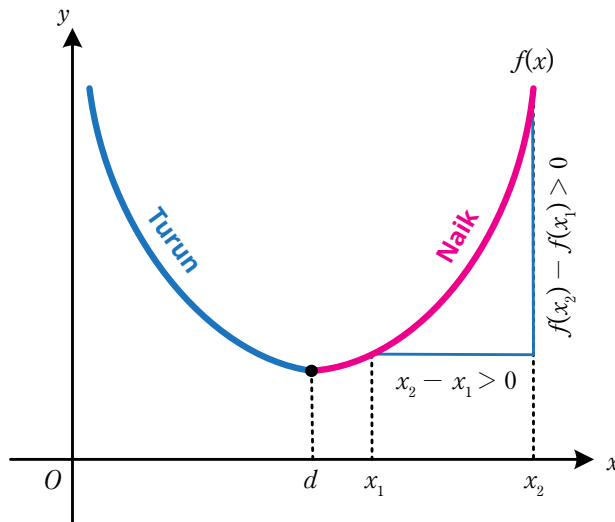
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$



Ayo Berpikir Kreatif

Apa yang terjadi pada grafik $f(x)$ jika $x = a$ atau $x = b$? Temukan kondisi grafik $f(x)$ saat $x = a$ atau $x = b$. Hasil penemuanmu merupakan dasar konsep fungsi diam.

Kamu telah mempelajari bahwa secara geometris, kemiringan kurva $f(x)$ di titik (a, b) merupakan nilai turunan pertama $f'(x)$ di $x = a$ atau dapat ditulis $m = f'(a)$. Kamu dapat menggunakan definisi tersebut untuk memeriksa tingkah laku suatu fungsi. Agar lebih paham, cermatilah Gambar 2.15 berikut.



Gambar 2.15 Grafik Fungsi $f(x)$

Grafik pada gambar merupakan kurva fungsi $f(x)$ dengan nilai minimum tercapai saat $x = d$. Perhatikan bahwa $f(x)$ naik saat $x > d$, $f(x)$ turun saat $x < d$, dan $f(x)$ tidak naik dan tidak turun saat $x = d$. Berdasarkan hal tersebut, diperoleh kesimpulan berikut.

- Dalam interval $x > d$, fungsi $f(x)$ naik. Berdasarkan definisi, untuk $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$, artinya $\Delta x > 0$ dan $\Delta f(x) > 0$. Hal ini mengakibatkan kemiringan garis singgungnya bernilai positif sehingga turunan pertamanya juga bernilai positif. Dengan kata lain, $f'(x) > 0$.
- Dalam interval $x < d$, fungsi $f(x)$ turun. Berdasarkan definisi, untuk $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$, artinya $\Delta x > 0$ dan $\Delta f(x) < 0$. Hal ini mengakibatkan kemiringan garis singgungnya bernilai negatif sehingga turunan pertamanya juga bernilai negatif. Dengan kata lain, $f'(x) < 0$.
- Pada $x = d$, fungsi $f(x)$ tidak naik dan tidak turun, atau $f(x)$ diam. Hal ini mengakibatkan kemiringan garis singgungnya memiliki dua kemungkinan, yaitu bernilai nol atau tidak terdefinisi. Dengan kata lain, $f'(x) = 0$ atau $f'(x)$ tidak terdefinisi.

Ketiga tingkah laku fungsi tersebut dapat dinyatakan dengan suatu sifat yang berkaitan dengan fungsi naik, fungsi turun, dan fungsi diam.

Sifat-Sifat

Misalkan fungsi $y = f(x)$ pada interval I .

- ▶ Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka fungsi $f(x)$ naik pada I .
- ▶ Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka fungsi $f(x)$ turun pada I .
- ▶ Jika $f'(x) = 0$ atau $f'(x)$ tidak terdefinisi untuk setiap $x \in I$, maka fungsi $f(x)$ diam pada I .

Contoh Soal 2.9

Diketahui sebuah kurva $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 10$. Tentukan interval x agar $f(x)$ merupakan fungsi turun dan interval x agar $f(x)$ merupakan fungsi naik.

Alternatif penyelesaian:

- ▶ **Langkah I:** menentukan turunan pertama dari $f(x)$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12.$$

- ▶ **Langkah II:** menentukan batas interval menggunakan $f'(x) = 0$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0$$

$$(6x - 12)(x - 1) = 0$$

$$(6x - 12) = 0 \text{ atau } (x - 1) = 0$$

sehingga diperoleh $x = 2$ atau $x = 1$.

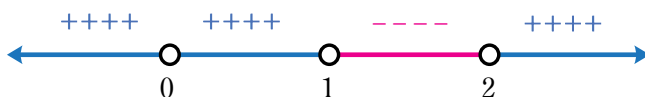
- ▶ **Langkah III:** menentukan interval sesuai dengan syarat fungsi naik dan fungsi turun

Agar kurva $f(x)$ merupakan fungsi naik maka syaratnya adalah $f'(x) > 0$, sedangkan syarat turun adalah $f'(x) < 0$. Ambil sebarang nilai x selain $x = 1$ hingga $x = 2$, misalkan $x = 0$. Substitusikan $x = 0$ ke $f'(x)$, sehingga

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$f'(0) = 6(0)^2 - 18(0) + 12 = 12 > 0.$$

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan, diperoleh



Tampak bahwa untuk interval $x < 1$ dan $x > 2$, $f'(x)$ bernilai positif, sedangkan untuk $1 < x < 2$, $f'(x)$ bernilai negatif.

Jadi, interval x agar $f(x)$ merupakan fungsi turun adalah $1 < x < 2$. Adapun interval x agar $f(x)$ merupakan fungsi naik adalah $x < 1$ atau $x > 2$.



Ayo Mencoba 2.7

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Diberikan kurva $g(x) = x(6 - x)^2$. Tentukan batasan kurva $g(x)$ agar nilai fungsi tidak pernah turun.

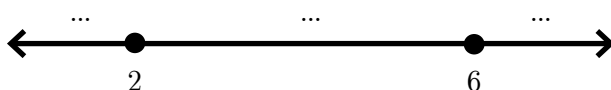
Alternatif penyelesaian:

Diketahui kurva $g(x) = x(6 - x)^2$. Dengan mengingat sifat fungsi $f(x) = u(x)v(x)$, turunan fungsi tersebut adalah $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ sehingga

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Untuk mengetahui kebenaran dalam menentukan $g'(x)$, kamu dapat mengecek apakah hasil akhirnya sama dengan $g'(x) = 36 - 24x + 3x^2$. Dari persamaan ini, grafik fungsi $g(x)$ tidak akan pernah turun jika $g'(x) \geq 0$ sehingga

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan, diperoleh



2. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$. Tentukan interval saat $f(x)$ naik dan saat $f(x)$ turun.

Alternatif penyelesaian:

Untuk menentukan turunan pertama, kamu harus mengingat bahwa jika $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ maka $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. Berdasarkan persamaan

fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$, misalkan $u(x) = x$ dan $v(x) = x^2 - x + 1$, maka

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Grafik fungsi $f(x)$ naik jika $f'(x) > 0$ dan turun jika $f'(x) < 0$ sehingga

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan, diperoleh

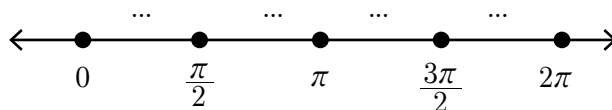
3. Diketahui fungsi $f(x) = \sin^2 x$ dengan $0 < x < 2\pi$. Tentukan interval saat $f(x)$ naik.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui bahwa $f(x) = \sin^2 x$, maka

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Syarat bahwa fungsi $f(x)$ naik adalah ketika $f'(x) > 0$, yaitu $\sin 2x > 0$. Pembuat nol fungsi $\sin 2x$ adalah $x = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$. Dengan bantuan garis bilangan, diperoleh



Pada garis bilangan tampak bahwa untuk interval _____, $f'(x)$ bernilai positif. Jadi, interval saat $f(x)$ naik adalah _____.

3. Titik Ekstrem, Nilai Balik Minimum, dan Nilai Balik Maksimum

a. Titik Esktrem

Pada kegiatan sebelumnya, kamu telah mencermati Gambar 2.15 dan memperoleh temuan bahwa untuk $x = d$, fungsi $f(x)$ tidak naik dan tidak turun. Dalam konsep matematika, saat $x = d$, fungsi $f(x)$ dikatakan dalam kondisi diam (*stasioner*) dengan titik $(d, f(d))$ merupakan *titik ekstrem* atau *titik stasioner*. Kondisi tersebut terjadi saat $f'(x) = 0$. Secara umum, titik ekstrem ada dua jenis, yaitu titik ekstrem minimum dan titik ekstrem maksimum.

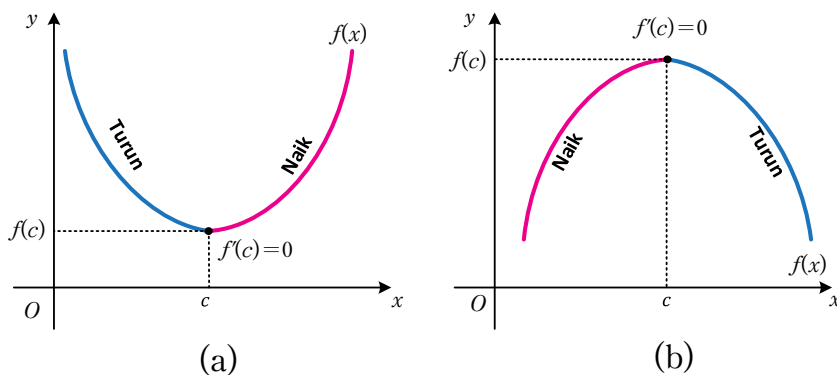


Ayo Berdiskusi

Diskusikanlah pertanyaan berikut dengan memperhatikan bahwa $f(x)$ naik jika $f'(x) > 0$ dan $f(x)$ turun jika $f'(x) < 0$.

1. Kapan kondisi suatu titik disebut titik ekstrem minimum?
2. Kapan kondisi suatu titik disebut titik ekstrem maksimum?

Dalam kegiatan Ayo Berdiskusi, kamu telah mempelajari kondisi titik ekstrem minimum dan titik ekstrem maksimum. Supaya lebih paham, kamu dapat mencermati grafik fungsi $f(x)$ dalam interval I pada Gambar 2.16 berikut.



Gambar 2.16 Titik Ekstrem dari Kurva $f(x)$

Pada Gambar 2.16 (a) dan (b), kamu dapat mencermati bahwa titik $(c, f(c))$ merupakan titik ekstrem fungsi $f(x)$.

- Titik $(c, f(c))$ pada gambar (a) merupakan *titik ekstrem minimum* karena nilai $f(c) < f(x)$ untuk setiap x dalam interval I.

- ▶ Titik $(c, f(c))$ pada gambar (b) merupakan *titik ekstrem maksimum* karena nilai $f(c) > f(x)$ untuk setiap x dalam interval I .

Contoh Soal 2.10

Tentukan apakah titik ekstrem dari fungsi $f(x) = x^2$ adalah titik ekstrem minimum atau maksimum.

Alternatif penyelesaian:

- ▶ **Langkah I:** menentukan turunan pertama dari $f(x)$

$$f(x) = x^2 \text{ maka } f'(x) = 2x.$$

- ▶ **Langkah II:** menentukan nilai x agar $f(x)$ diam, yaitu

$$f'(x) = 0 \text{ sehingga } f'(x) = 2x = 0,$$

maka nilai x yang mungkin adalah $x = 0$. Dengan menyubstitusikan $x = 0$ ke persamaan $f(x) = x^2$, diperoleh $f(0) = 0$. Jadi, titik ekstrem fungsi $f(x) = x^2$ adalah $(0, 0)$.

- ▶ **Langkah III:** menentukan jenis titik ekstrem

Untuk $x = -1$, maka

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 > 0 \text{ sehingga } f(-1) > f(0).$$

Untuk $x = 1$, maka

$$f(1) = 1^2 = 1 > 0 \text{ sehingga } f(1) > f(0).$$

Jadi, titik ekstrem $(0, 0)$ merupakan titik ekstrem minimum.



Ayo Mencoba 2.8

Selesaikan soal berikut ini dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Tentukan apakah titik ekstrem dari fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ adalah titik ekstrem minimum atau maksimum.

Alternatif penyelesaian:

- ▶ **Langkah I:** menentukan $f'(x)$.

$$f'(x) = \dots x \dots + 6x - 12.$$

- **Langkah II:** menentukan nilai x yang mungkin agar $f(x)$ diam, yaitu saat $f'(x) = 0$

$$\dots x^{\dots} + 6x - 12 = 0$$

diperoleh

$$x_1 = \dots \text{ atau } x_2 = \dots,$$

sehingga

$$f(x_1) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$f(x_2) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Jadi, terdapat dua titik ekstrem, yaitu $(\dots, \dots)$ dan $(\dots, \dots)$.

- **Langkah III:** menentukan jenis titik ekstrem

Untuk $x < x_1$, maka

$$f(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Untuk $x_1 < x < x_2$, maka

$$f(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Untuk $x > x_2$, maka

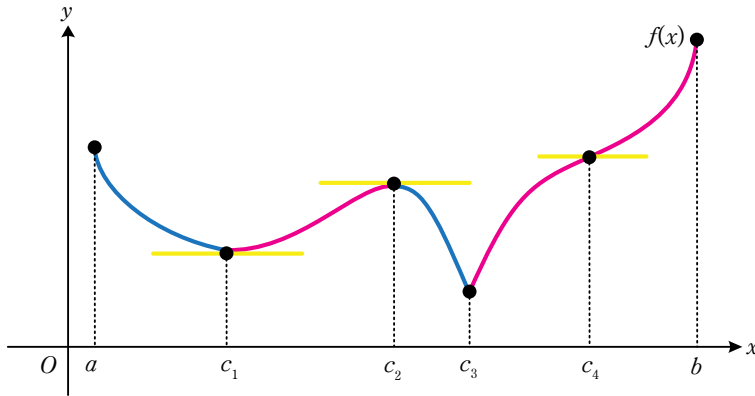
$$f(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Jadi, titik $(\dots, \dots)$ merupakan titik ekstrem ...

dan titik $(\dots, \dots)$ merupakan titik ekstrem

b. Uji Turunan Pertama

Setelah memahami titik ekstrem, kamu akan mempelajari titik balik minimum dan titik balik maksimum. Pertama-tama, kamu dapat mencermati Gambar 2.17 berikut.



Gambar 2.17 Titik Balik dari Kurva $f(x)$

Gambar di atas menunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ berada pada interval I yang merupakan interval terbuka (a, b) . Beberapa interval terbuka dalam I , yaitu (a, c_1) , (c_1, c_2) , (c_2, c_3) , (c_3, c_4) , dan (c_4, b) . Pada setiap interval tersebut terdapat titik ekstrem fungsi $f(x)$ yang memiliki karakteristik masing-masing, yaitu sebagai berikut.

- 1) Dalam interval (a, c_1) terdapat $(c_1, f(c_1))$ yang merupakan titik ekstrem. Fungsi $f(x)$ turun saat $x < c_1$, artinya $f'(x) < 0$. Adapun fungsi $f(x)$ naik saat $x > c_1$, artinya $f'(x) > 0$. Temuan ini menunjukkan bahwa terdapat perubahan nilai $f'(x)$ dari negatif ke positif dalam interval (a, c_1) yang terjadi saat $x = c_1$. Oleh karena itu, titik $(c_1, f(c_1))$ disebut *titik balik minimum* dan $f(c_1)$ merupakan *nilai balik minimum*. Karakteristik ini juga terjadi dalam interval (c_2, c_4) .
- 2) Dalam interval (c_1, c_2) terdapat $(c_2, f(c_2))$ yang merupakan titik ekstrem. Fungsi $f(x)$ naik saat $x < c_2$, artinya $f'(x) > 0$. Adapun fungsi $f(x)$ turun saat $x > c_2$, artinya $f'(x) < 0$. Temuan ini menunjukkan bahwa terdapat perubahan nilai $f'(x)$ dari positif ke negatif dalam interval (c_1, c_2) yang terjadi saat $x = c_2$. Oleh karena itu, titik $(c_2, f(c_2))$ disebut *titik balik maksimum* dan $f(c_2)$ merupakan *nilai balik maksimum*.
- 3) Dalam interval (c_3, b) , terdapat $(c_4, f(c_4))$ yang merupakan titik ekstrem. Fungsi $f(x)$ naik saat $x < c_4$, artinya $f'(x) > 0$. Fungsi $f(x)$ juga naik saat $x > c_4$, artinya $f'(x) > 0$. Temuan ini menunjukkan bahwa tidak ada perubahan nilai $f'(x)$ dalam interval (c_3, b) . Oleh karena itu, titik $(c_4, f(c_4))$ disebut *titik belok horizontal* pada $x = c_4$.

Sifat-Sifat

Setiap fungsi kontinu $f(x)$ yang memiliki tepat satu titik ekstrem $(c, f(c))$ dalam interval terbuka (a, b) mempunyai karakteristik sebagai berikut.

- Fungsi $f(x)$ memiliki nilai balik minimum pada c jika $f'(x) < 0$ dalam (a, c) dan $f'(x) > 0$ dalam (c, b) . Artinya, fungsi $f(x)$ turun saat $x < c$ dan naik saat $x > c$. ($f'(x)$ berubah tanda dari negatif ke positif).
- Fungsi $f(x)$ memiliki nilai balik maksimum pada c jika $f'(x) > 0$ dalam (a, c) dan $f'(x) < 0$ dalam (c, b) . Artinya, fungsi $f(x)$ naik saat $x < c$ dan turun saat $x > c$. ($f'(x)$ berubah tanda dari positif ke negatif).
- Fungsi $f(x)$ tidak memiliki nilai balik maksimum maupun nilai balik minimum pada c jika $f'(x)$ memiliki tanda yang sama dalam (a, c) dan (c, b) .

Contoh Soal 2.11

Tentukan jenis titik ekstrem dari fungsi $f(x) = x(x - 3)^2$.

Alternatif penyelesaian:

- **Langkah I:** menentukan turunan pertama dari $f(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= x(x - 3)^2 \\&= x(x^2 - 6x + 9) \\&= x^3 - 6x^2 + 9x\end{aligned}$$

maka

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

- **Langkah II:** menentukan nilai x agar $f(x)$ diam, yaitu

$$f'(x) = 0,$$

sehingga

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

diperoleh $x = 3$ atau $x = 1$.

Untuk $x = 3$, maka $f(3) = 0$. Diperoleh titik ekstrem $(3, 0)$.

Untuk $x = 1$, maka $f(1) = 4$. Diperoleh titik ekstrem $(1, 4)$.

► **Langkah III:** menentukan jenis titik ekstrem

Kamu dapat menentukan nilai turunan pertama fungsi $f(x) = x(x-3)^2$ di sekitar absis 1 dan 3 menggunakan bantuan garis bilangan sehingga diperoleh



Dari garis bilangan tersebut, terlihat bahwa terjadi perubahan nilai $f'(x)$ di sekitar absis 1 dan 3.

Oleh karena itu, titik ekstrem $(1, 4)$ merupakan titik balik maksimum dan titik ekstrem $(3, 0)$ merupakan titik balik minimum.



Ayo Mencoba 2.9

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

Tentukan titik ekstrem dari fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ dan jenis titik ekstrem tersebut, kemudian berikanlah alasannya.

Alternatif penyelesaian:

Turunan pertama dari $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ adalah

$$f'(x) = x^3 - 4x.$$

Fungsi $f(x)$ diam saat $f'(x) = 0$ sehingga

diperoleh $x = 0$, $x = -2$, atau $x = 2$.

Untuk $x = -2$, maka

$$f(-2) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Untuk $x = 0$, maka

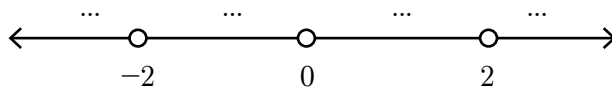
$$f(0) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Untuk $x = 2$, maka

$$f(2) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Jadi, terdapat tiga titik ekstrem, yaitu $(-2, \dots)$, $(0, \dots)$, dan $(2, \dots)$.

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan, diperoleh nilai turunan pertama fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ di sekitar absis $-2, 0$, dan 2 .



Berdasarkan garis bilangan tersebut, dapat disimpulkan bahwa

- ▶ titik $(-2, \dots)$ merupakan titik balik minimum karena

- ▶ titik $(0, \dots)$ merupakan titik balik maksimum karena

- ▶ titik $(2, \dots)$ merupakan titik balik minimum karena

c. Uji Turunan Kedua

Kamu telah memahami titik balik minimum dan titik balik maksimum melalui uji turunan pertama. Namun, terdapat beberapa fungsi yang tidak bisa dicari titik baliknya hanya dengan uji turunan pertama, contohnya pada fungsi polinomial berderajat lebih dari tiga. Oleh karena itu, dibutuhkan uji turunan kedua untuk menentukan titik balik minimum dan titik balik maksimum fungsi tersebut. Sebelum mempelajari uji turunan kedua, kamu perlu memahami turunan kedua.

Turunan dari fungsi $f(x)$ adalah $f'(x)$ yang merupakan suatu fungsi. Fungsi $f'(x)$ juga dapat diturunkan. Turunan dari fungsi $f'(x)$ dinotasikan dengan $f''(x)$ yang disebut *turunan kedua* dari $f(x)$.

Contoh Soal 2.12

Tentukan turunan kedua dari fungsi $f(x) = x^4 + 3x^3 + 8x + 12$.

Alternatif penyelesaian:

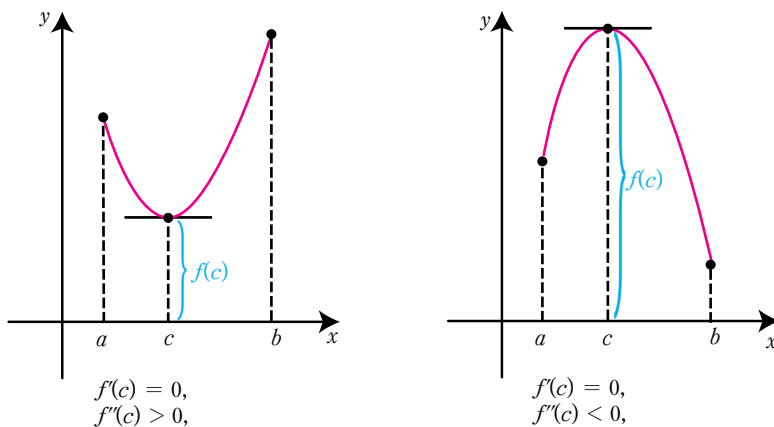
$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 8x + 12.$$

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 8.$$

$$f''(x) = 12x^2 + 18x.$$

Jadi, turunan kedua dari $f(x)$ adalah $f''(x) = 12x^2 + 18x$.

Konsep dalam uji turunan kedua untuk menentukan titik balik minimum dan titik balik maksimum tidak jauh berbeda dengan uji turunan pertama. Kamu dapat lebih memahami konsep uji turunan kedua dengan mencermati Gambar 2.18 berikut.



Gambar 2.18 Grafik Fungsi $f(x)$

Pada gambar tersebut tampak bahwa titik $(c, f(c))$ merupakan titik ekstrem fungsi $f(x)$ pada interval (a, b) sehingga $f'(c) = 0$. Uji turunan kedua memberikan kemudahan dalam menentukan titik balik minimum dan titik balik maksimum dengan mencermati nilai $f''(c)$ sehingga diperoleh sifat berikut.

Sifat-Sifat

Untuk setiap fungsi kontinu $f(x)$ dalam interval terbuka (a, b) yang memiliki tepat satu titik ekstrem $(c, f(c))$ sehingga $f'(c) = 0$, berlaku ketentuan berikut.

- Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai balik maksimum.
- Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai balik minimum.

- Jika $f''(c) = 0$, maka perlu uji turunan pertama untuk mengetahui jenis $f(c)$.

Contoh Soal 2.13

Tentukan nilai-nilai ekstrem dan jenisnya dari kurva $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ dengan uji turunan kedua.

Alternatif penyelesaian:

- **Langkah I:** menentukan turunan pertama dan kedua fungsi $f(x)$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3.$$

$$f''(x) = 2x - 2.$$

- **Langkah II:** menentukan titik ekstrem saat $f'(x)$ diam, yaitu

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

diperoleh

$$x = 3 \text{ atau } x = -1.$$

Untuk $x = 3$, maka

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = -7$$

sehingga diperoleh titik ekstrem $(3, -7)$.

Untuk $x = -1$, maka

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 2 = \frac{11}{3}$$

sehingga diperoleh titik ekstrem $(-1, \frac{11}{3})$.

- **Langkah III:** menentukan jenis titik ekstrem dengan uji turunan kedua

$$f''(x) = 2x - 2$$

Untuk $x = 3$, maka

$$f''(3) = 2(3) - 2 = 4 > 0.$$

Untuk $x = -1$, maka

$$f''(-1) = 2(-1) - 2 = -4 < 0.$$

Dengan demikian,

- karena $f''(3) > 0$, titik $(3, -7)$ merupakan titik balik minimum dan $f(3) = -7$ merupakan nilai balik minimum;
- karena $f''(-1) < 0$, titik $(-1, \frac{11}{3})$ merupakan titik balik maksimum dan $f(-1) = \frac{11}{3}$ merupakan nilai balik maksimum.

Latihan Soal Aplikasi Turunan Fungsi

Selesaikan soal-soal yang berkaitan dengan persamaan garis singgung pada kurva dengan benar.

1. Tentukan persamaan garis singgung dari:
 - a. kurva $y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2}$ yang sejajar dengan garis $x + 2y + 3 = 0$,
 - b. kurva $y = 2x^2 - 3x + 5$ pada titik yang berordinat 4,
 - c. kurva $y = \sqrt{8x - 4}$ yang tegak lurus dengan garis $2x + 4y + 1 = 0$.
2. Tentukan persamaan garis singgung di titik potong fungsi $y = 2x^2 - 3x + 7$ dengan garis $y = 4x + 1$.
3. Suatu kurva $y = 3x - \frac{3}{x^2}$ memotong sumbu- x di titik P . Tentukan persamaan garis singgung kurva tersebut pada titik P .
4. Kurva $y = (x^2 + 2)^2$ memotong sumbu- y di titik A . Tunjukkan bahwa garis singgung pada kurva tersebut melalui titik A , sejajar sumbu- x , dan berjarak 4 satuan terhadap titik pusat koordinat.
5. Tentukan koordinat titik pada kurva $y = 2x^2 - 7x + 1$ jika garis singgung kurva melalui titik tersebut dan membentuk sudut 45° terhadap sumbu- x positif. Tentukan pula persamaan garis singgung kurva yang melalui titik tersebut.

Selesaikan soal-soal yang berkaitan dengan fungsi naik, fungsi turun, dan fungsi diam dengan benar.

6. Tentukan interval fungsi naik dan fungsi turun pada setiap kurva berikut.
 - a. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$
 - b. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 24$
 - c. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}, x \neq 1$

7. Misalkan fungsi $f(x) = ax^3 + x^2 + 5$ selalu naik dalam interval $0 < x < 2$. Tentukanlah nilai dari koefisien a .
8. Tentukan interval fungsi naik dan fungsi turun jika diketahui kurva $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ dengan $0 < x < 2\pi$.
9. Tentukan $a + b$ jika grafik fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ hanya turun pada interval $-1 < x < 5$.
10. Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva $s(t) = t^3 - \left(\frac{15}{2}\right)t^2 + 18t - 1$, untuk $t \neq 0$.
 - a. Tentukan kecepatan dan percepatan partikel sebagai fungsi waktu t .
 - b. Tentukan nilai t ketika kecepatan partikel sama dengan nol.
 - c. Pada interval mana kecepatan partikel negatif? Pada interval mana kecepatan partikel positif?
 - d. Berapa nilai t ketika percepatan partikel sama dengan 0?

Selesaikan soal-soal yang berkaitan dengan titik ekstrem, nilai balik minimum, dan nilai balik maksimum dengan benar.

11. Tentukan titik balik maksimum dan minimum dari:
 - a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$
 - b. $f(x) = 2x^2 + x + 3$
 - c. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$
 - d. $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2}$
12. Tentukan titik belok dari setiap fungsi berikut.
 - a. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$
 - b. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$
13. Tentukan nilai ekstrem dan jenis titik ekstremnya dari setiap fungsi berikut.
 - a. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
 - b. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$
14. Diketahui a dan b adalah akar-akar dari persamaan $x^2 + 5px + p^3 - 4p + 1 = 0$. Tentukan nilai p agar $a + ab + b$ bernilai maksimum pada $-3 < p < 3$.
15. Buktikan bahwa setiap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$, mempunyai tepat satu titik ekstrem.

D. Aplikasi Turunan Fungsi di Berbagai Bidang Ilmu

Setelah mempelajari konsep turunan, pada bagian ini kamu akan mencermati aplikasi turunan fungsi pada berbagai bidang keilmuan. Setidaknya ada tiga konsep turunan fungsi yang dapat digunakan untuk memecahkan permasalahan dalam berbagai bidang keilmuan selain matematika, di antaranya:

1. penggunaan turunan fungsi dalam memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan percepatan dan kecepatan;
2. penggunaan turunan fungsi tak tentu dari sebuah limit fungsi; serta
3. penggunaan turunan fungsi untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan titik optimum (nilai maksimum dan nilai minimum).

Tentunya tidak menutup kemungkinan terdapat konsep turunan fungsi lainnya yang dapat diterapkan pada berbagai bidang keilmuan.

Contoh Soal 2.14

Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 50 m/s. Ketinggian peluru dalam h meter (m) terhadap titik asal setelah t detik (s) yang ditentukan oleh persamaan $h(t) = 50t - 5t^2$.

- a. Tentukan nilai h pada waktu $t = 0$ detik, $t = 5$ detik, dan $t = 10$ detik.
- b. Tentukan kecepatan peluru pada waktu $t = 3$ detik, $t = 5$ detik, dan $t = 7$ detik.

Alternatif penyelesaian:

- a. Untuk menentukan nilai h atau nilai ketinggian, kamu dapat menyubstitusikan t pada persamaan $h(t) = 50t - 5t^2$ sehingga

untuk $t = 0$, maka

$$h(0) = 50(0) - 5(0^2) = 0 \text{ m}$$

untuk $t = 5$, maka

$$h(5) = 50(5) - 5(5^2) = 125 \text{ m}$$

untuk $t = 10$, maka

$$h(10) = 50(10) - 5(10^2) = 0 \text{ m.}$$

- b. Untuk menentukan nilai kecepatan suatu benda, kamu dapat menggunakan konsep turunan pertama suatu fungsi. Dengan demikian, dari persamaan $h(t) = 50t - 5t^2$, diperoleh persamaan kecepatan berikut:

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(50t - 5t^2) = 50 - 10t,$$

sehingga

- ▶ kecepatan saat $t = 3$ detik adalah $v = 50 - 10(3) = 20$ m/s;
- ▶ kecepatan saat $t = 5$ detik adalah $v = 50 - 10(5) = 0$ m/s;
- ▶ kecepatan saat $t = 7$ detik adalah $v = 50 - 10(7) = -20$ m/s.

Hasil tersebut menunjukkan bahwa semakin lama waktu tempuh, semakin lambat kecepatan peluru.



Ayo Mencoba 2.10

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

Sebuah partikel bergerak pada lintasan kurva $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, dengan s adalah jarak tempuh dalam meter (m) dan t adalah waktu tempuh dalam detik (s). Tentukan panjang lintasan, kecepatan, dan percepatan pada saat $t = 0$, $t = 1$, dan $t = 2$ (dalam detik).

Alternatif penyelesaian:

- ▶ Untuk menentukan panjang lintasan s , kamu dapat menyubstitusikan t pada persamaan $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ sehingga

untuk $t = 0$, maka

_____ = _____ m

untuk $t = 1$, maka

_____ = _____ m

untuk $t = 2$, maka

_____ = _____ m.

- ▶ Untuk menentukan kecepatan (v), kamu dapat menggunakan konsep turunan pertama suatu fungsi, sehingga

$$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v = \frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 6t^2 + 9t)$$

$$= \dots$$

Dari hasil tersebut, kamu dapat menghitung kecepatan.

Kecepatan saat $t = 0$ detik adalah

$$v = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ m/s.}$$

Kecepatan saat $t = 1$ detik adalah

$$v = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ m/s.}$$

Kecepatan saat $t = 2$ detik adalah

$$v = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ m/s.}$$

- Untuk menentukan percepatan (a), kamu dapat menggunakan konsep turunan kedua suatu fungsi, sehingga

$$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$a = \frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(t^3 - 6t^2 + 9t) = 6t - 12.$$

Dari hasil tersebut, kamu dapat menghitung percepatan.

Percepatan saat $t = 0$ detik adalah

$$a = 6t - 12 = 6(0) - 12 = -12 \text{ m/s}^2.$$

Percepatan saat $t = 1$ detik adalah

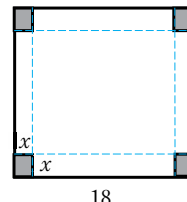
$$a = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ m/s}^2.$$

Percepatan saat $t = 2$ detik adalah

$$a = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ m/s}^2.$$

Contoh Soal 2.15

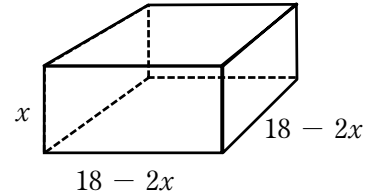
Sebuah kotak dibuat dari selembar karton persegi sepanjang 18 cm dengan cara memotong persegi identik pada keempat pojok karton, kemudian melipat sisi-sisinya ke atas (lihat Gambar 2.19). Tentukan ukuran kotak agar volume kotak yang dibuat maksimum.



Gambar 2.19 Ilustrasi Karton

Alternatif penyelesaian:

Gambar 2.20 menunjukkan ilustrasi kotak yang dibuat. Misalkan x adalah sisi persegi yang dipotong dan V adalah volume kotak, maka



Gambar 2.20 Ilustrasi Kotak

$$\text{panjang } (p) = 18 - 2x,$$

$$\text{lebar } (l) = 18 - 2x, \text{ dan}$$

$$\text{tinggi} = x$$

sehingga

$$\begin{aligned} V &= p \times l \times t \\ &= (18 - 2x)(18 - 2x)x \\ &= 324x - 72x^2 + 4x^3. \end{aligned}$$

Kamu dapat menggunakan $f'(x) = 0$ untuk menentukan volume maksimal.

$$f(x) = 324x - 72x^2 + 4x^3$$

sehingga dengan menggunakan Sifat Turunan dan Sifat Aljabar, diperoleh

$$f'(x) = 12x^2 - 144x + 324 = 0.$$

Dengan menggunakan konsep persamaan kuadrat, diperoleh

$$x_1 = 9 \text{ atau } x_2 = 3.$$

Karena panjang x tidak mungkin bernilai negatif, diperoleh tiga titik kritis, yaitu 0, 9, dan 3. Dengan menyubstitusikan nilai x ke persamaan $f(x)$, diperoleh

$$f(0) = 324(0) - 72(0)^2 + 4(0)^3 = 0$$

$$f(3) = 324(3) - 72(3)^2 + 4(3)^3 = 432$$

$$f(9) = 324(9) - 72(9)^2 + 4(9)^3 = 0.$$

Karena volume tidak mungkin bernilai 0, volume maksimum yang dapat dibuat adalah 432 cm^3 dengan $x = 3 \text{ cm}$ sehingga

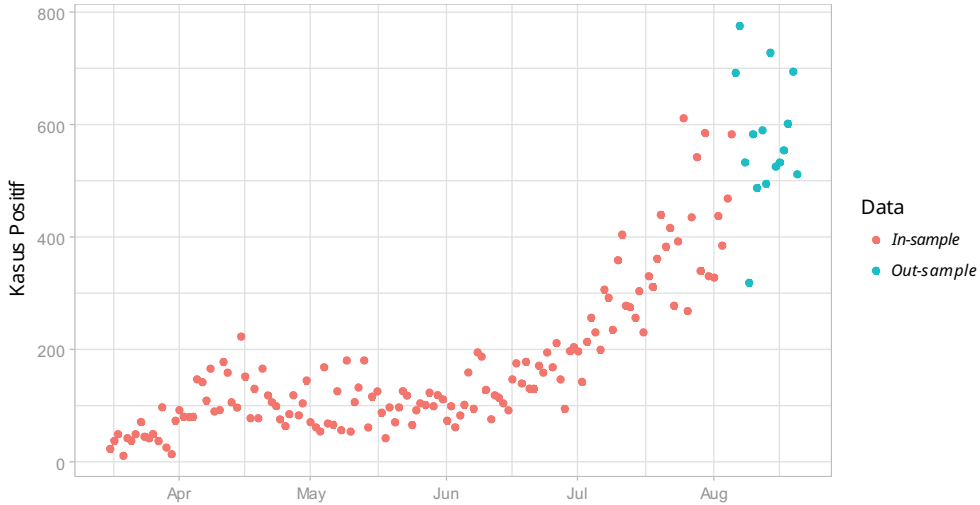
$$p = l = 18 - 2x = 18 - 2(3) = 12 \text{ cm}$$

$$t = x = 3 \text{ cm}.$$

Jadi, ukuran kotak adalah panjang 12 cm, lebar 12 cm, dan tinggi 3 cm.



Grafik perkembangan jumlah kasus baru positif harian Covid-19 di Jakarta mulai tanggal 16 Maret 2020 sampai dengan 20 Agustus 2020 terlihat pada Gambar 2.21.



Gambar 2.21 Jumlah Orang Terkonfirmasi Covid-19 di Jakarta

Sumber: Rory dan Rita Diana (2020)

Pada Gambar 2.21, jumlah kasus baru positif harian Covid-19 setiap harinya selalu naik turun. Akan tetapi, secara umum grafik tersebut cenderung naik. Berkaitan dengan kondisi ini, Rory dan Diana (2020) telah memublikasikan hasil estimasi pemodelan data Covid-19 tersebut menggunakan regresi polinomial lokal.

Misalkan estimasi fungsi kasus baru di Jakarta tersebut adalah

$$f(x) = 48,26x^3 + 44,37x^2 - 22,18x + 17,57,$$

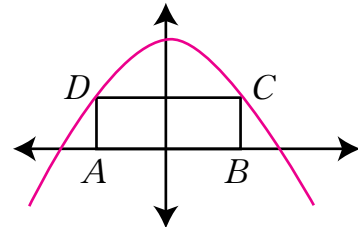
dengan x adalah estimasi bulan. Berdasarkan pemodelan data tersebut, diskusikan dengan kelompok untuk mengestimasi laju penambahan orang terkonfirmasi Covid-19. Kapan estimasi fungsi tersebut mengalami puncaknya?

Latihan Soal Aplikasi Turunan Fungsi di Berbagai Bidang Ilmu

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar.

1. Pembangunan sebuah jembatan dapat diselesaikan dalam x hari, dengan biaya $y = 3x - 900 + \frac{120}{x}$ dan y dalam ratusan ribu rupiah. Berapa hari pembangunan jembatan tersebut harus diselesaikan agar biaya yang dikeluarkan oleh pemborong minimum?
2. Tentukan dua bilangan real positif dengan jumlah kedua bilangan itu minimum dan mempunyai hasil kali 80.
3. Sebuah talang air akan dibuat dari sebuah pelat seng selebar 30 cm. Caranya adalah dengan melipat kedua sisi pelat seng sama panjang. Tentukan ukuran penampang tegak talang air tersebut sehingga talang dapat dialiri air semaksimal mungkin.

4. Suatu kurva mempunyai persamaan $y = 12 - x^2$. Sebuah persegi panjang $ABCD$ dibentuk dengan kedua titik berada pada kurva tersebut, seperti pada Gambar 2.22. Tentukan luas maksimum persegi panjang $ABCD$.



Gambar 2.22 Ilustrasi Persegi Panjang pada Kurva

5. Keuntungan produksi sebuah barang dalam suatu perusahaan dinyatakan dengan fungsi $f(x) = (225x - x^2)$, dengan $f(x)$ dalam rupiah dan x menyatakan banyak barang. Tentukan jumlah barang yang harus diproduksi agar keuntungan mencapai maksimum.

Uji Kompetensi Bab 2

A. Isilah titik-titik di bawah ini dengan tepat.

1. Turunan pertama dari fungsi $y = 3x^2 - 5x + 7$ adalah
2. Jika $y = (2x + 1)^4$, maka y' adalah
3. Turunan pertama dari fungsi $g(t) = \frac{t^2 - 1}{t + 1}$ adalah
4. Diketahui $h(x) = 4x - 3$. Nilai dari $h'(3)$ adalah
5. Jika $f(x) = \sin 2x$, maka $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ adalah

6. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = x^2 \cos x$ adalah
7. Jika $y = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)}}$, maka y' adalah
8. Sebuah kurva didefinisikan oleh persamaan implisit $x^2 + y^2 = 25$. Nilai dari y' pada titik $(3, 4)$ adalah
9. Titik stasioner dari fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ adalah
10. Nilai balik maksimum dari fungsi $g(x) = -x^2 + 4x + 3$ adalah
11. Apakah fungsi $h(x) = x^3$ memiliki titik balik maksimum?
12. Koordinat titik balik minimum dari fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 7$ adalah
13. Diketahui fungsi $k(x) = x^4 - 4x^3$. Fungsi ini memiliki ... titik balik minimum yaitu
14. Interval nilai x ketika fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2$ cekung ke bawah adalah
15. Titik stasioner dari fungsi $y = \sin x + \cos x$ untuk $0 < x < 2\pi$ terjadi pada nilai $x =$
16. Sebuah perusahaan memproduksi x unit barang dengan fungsi biaya total $C(x) = 0,1x^2 + 50x + 1.000$ (dalam ribuan rupiah). Jika perusahaan saat ini memproduksi 100 unit barang, laju perubahan biaya total terhadap perubahan jumlah produksi adalah
17. Ketinggian sebuah bola yang dilempar vertikal ke atas dari tanah setelah t detik diberikan oleh fungsi $h(t) = 30t - 5t^2$ meter. Kecepatan sesaat bola pada saat $t = 2$ detik adalah
18. Konsentrasi obat dalam aliran darah pasien setelah t jam disuntikkan diberikan oleh fungsi $C(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$ mg/l. Laju perubahan konsentrasi obat terhadap waktu pada saat $t = 1$ jam adalah
19. Seorang petani memiliki 100 meter pagar untuk membuat kandang berbentuk persegi panjang. Agar luas kandang maksimum, panjang dan lebar kandang berturut-turut adalah
20. Biaya total produksi x unit barang adalah $C(x) = x^2 + 10x + 400$ (dalam ribuan rupiah). Jika harga jual per unit adalah Rp70.000,00, keuntungan maksimum yang dapat diperoleh perusahaan sebesar

- B. Pasangkan fungsi di kolom kiri dengan turunan fungsi yang sesuai di kolom kanan. Tarik garis sesuai dengan jawabanmu.

Fungsi	Turunan Fungsi
$f(x) = 4x^3 - 2x + 5$ • $g(x) = \cos 3x$ • $h(x) = e^{2x}$ • $k(x) = \frac{1}{x^2}$ • $l(x) = (x + 1)^2$ •	A. $-3 \sin 3x$ B. $2(x + 1)$ C. $12x^2 - 2$ D. $-\frac{2}{x^3}$ E. $2e^{2x}$ F. $-2x^{-1}$ G. $4x^2 - 2$ H. $-2 \cos 3x \sin 3x$

- C. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini dengan jelas dan lengkap.

- Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut.
 - $f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{4 + x}}$
 - $h(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{\sin 2t}{2}$
- Sejenis bakteri dapat membelah diri karena ada nutrisi untuk berkembang biak. Seorang laboran mengamati kadar nutrisi dalam bakteri tersebut untuk mengetahui laju perkembangbiakannya. Pengamatan tersebut memberikan hasil bahwa kadar nutrisi bakteri mendekati fungsi $y = \csc\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 50$ mg dengan x adalah waktu dalam jam. Berapakah laju perubahan kadar nutrisi pada saat $x = \frac{\pi}{6}$?
- Sebuah pabrik sepatu merancang pemodelan matematika yang mewakili besarnya pendapatan dan biaya. Besar pendapatan $[R(Q)]$ dan besar biaya $[C(Q)]$ secara berturut-turut dimodelkan dalam fungsi $R(Q) = -2Q^2 + 1.000Q$ dan $C(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1.315Q + 2.000$ dengan Q mewakili banyak barang yang diproduksi dalam ribuan serta C dan R dalam juta rupiah.
 - Apakah pabrik sepatu tersebut mengalami keuntungan atau kerugian?
 - Berapakah keuntungan atau kerugian maksimumnya?

4. Sebuah anak panah ditembakkan secara vertikal ke udara dan jaraknya (dalam m) setelah t detik dalam keadaan melayang diberikan oleh
- $$s(t) = -16t^2 + 80t.$$
- Berapakah kecepatan anak panah setelah 2 detik?
 - Berapa tinggi anak panah itu ketika mulai jatuh menuju bumi?
 - Berapa detik anak panah itu akan tiba di tanah?
 - Berapa percepatan anak panah itu?
5. Koloni bakteri tumbuh sedemikian rupa sehingga jumlahnya setelah t jam adalah $N(t) = 500e^{0,2t}$.
- Berapakah jumlah awal bakteri pada saat $t = 0$?
 - Berapakah laju pertumbuhan bakteri setelah 3 jam?

Pengayaan

Untuk memperdalam pemahaman mengenai materi yang telah dipelajari, kamu dapat mengerjakan soal-soal berikut dengan cermat. Jika menemui kesulitan, coba ingat kembali konsep dasar materi atau diskusikan bersama temanmu.

1. Bayangkan kamu sedang mengendalikan sebuah *drone*. Ketinggian *drone* tersebut di atas tanah (dalam meter) pada setiap waktu t (dalam detik) diberikan oleh fungsi: $h(t) = 15t - 2t^2$.
- Tentukan laju perubahan ketinggian *drone* pada saat $t = 3$ detik.
 - Berdasarkan jawabanmu, apa makna dari nilai tersebut dalam konteks pergerakan *drone*? Apakah *drone* sedang naik atau turun?



Petunjuk

- Gunakan konsep turunan untuk menentukan laju perubahan.
- Selanjutnya, substitusikan $t = 3$ pada fungsi turunan tersebut.
- Jika hasilnya positif, *drone* sedang naik. Jika hasilnya negatif, *drone* sedang turun.

2. Bisnis manufaktur dan penjualan bola boling adalah bisnis yang sering mengalami perubahan. Perusahaan memperkenalkan model baru ke pasar sekitar 3 hingga 4 bulan sekali. Biasanya, model baru diciptakan karena kemajuan teknologi, seperti permukaan baru atau cara baru untuk menempatkan balok pemberat di dalam bola. Untuk menentukan cara terbaik menggunakan anggaran iklan, perusahaan melacak penjualan berdasarkan jumlah yang dibelanjakan untuk iklan. Misalkan sebuah perusahaan memiliki data berikut dari penjualan sebelumnya.

Tabel 2.8 Data Penjualan Bola Boling

Jumlah Biaya untuk Iklan (dalam ribuan rupiah)	Jumlah Bola Boling Terjual
0	8
50	13.115
100	19.780
150	22.612
200	20.083
250	12.430
300	4

- Gambarkan grafik fungsi berdasarkan data pada Tabel 2.8.
- Tentukan domain fungsi yang paling sesuai dengan data dan situasi permasalahan. Berikan argumentasi atas jawabanmu.
- Tentukan nilai maksimum fungsi pada domain tersebut. Berapa banyak biaya yang harus dikeluarkan perusahaan untuk mengiklankan model terbarunya agar dapat memaksimalkan jumlah bola boling yang terjual?

Refleksi

Kamu telah mempelajari konsep dasar turunan fungsi pada bab ini. Kamu juga sudah menerapkan konsep tersebut dalam menentukan turunan fungsi dan menyelesaikan masalah sehari-hari. Sebagai bahan perenungan, jawablah setiap pertanyaan berikut sesuai dengan pengalaman belajarmu.

1. Bagaimana perasaanmu setelah mempelajari turunan fungsi? Apakah kamu merasa lebih tertantang atau semakin percaya diri dengan kemampuan matematikamu?
2. Menurutmu, apa manfaat utama mempelajari turunan fungsi, baik dalam pelajaran matematika maupun dalam kehidupan sehari-hari?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

REPUBLIK INDONESIA, 2025

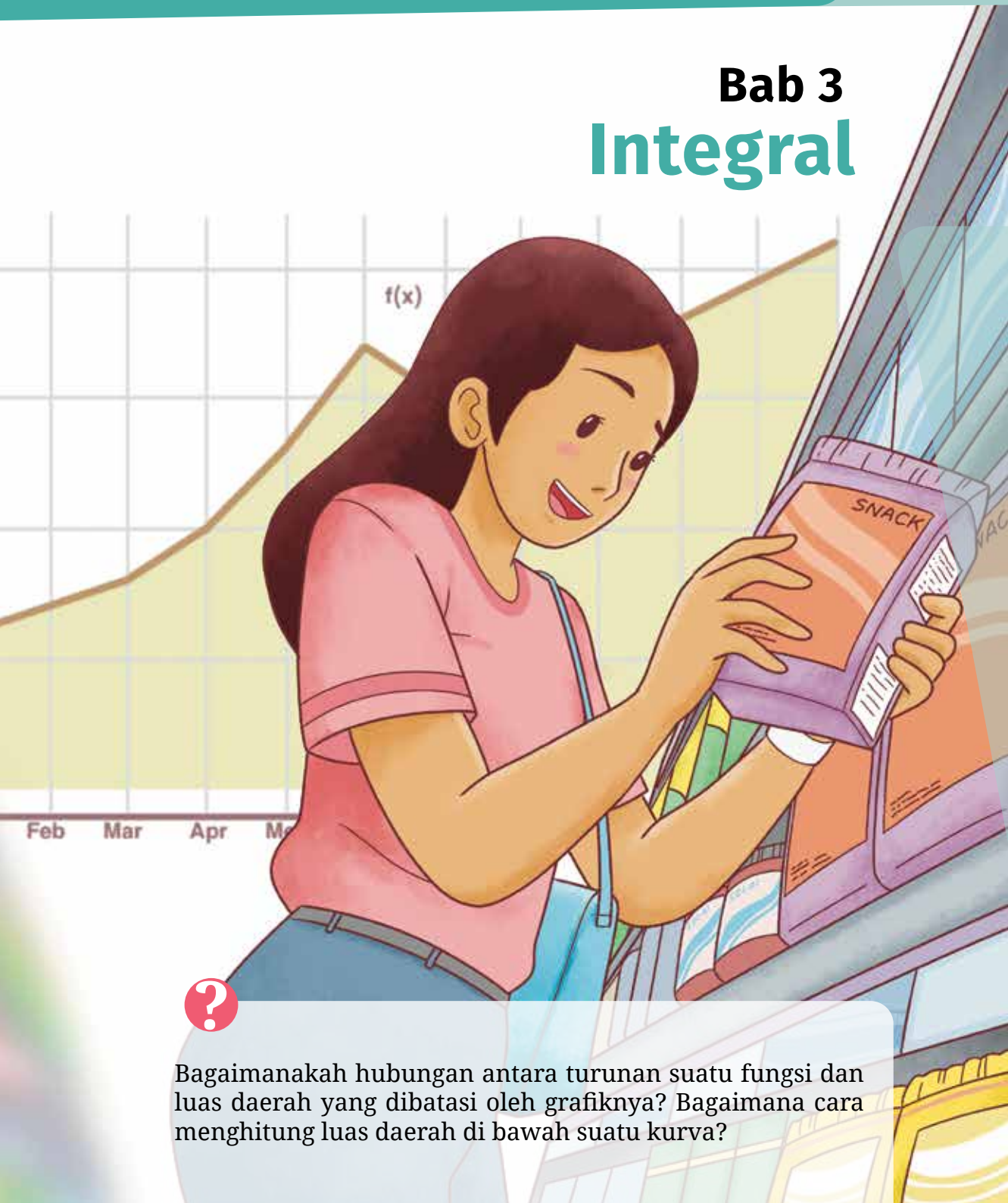
Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII (Edisi Revisi)

Penulis: Sri Adi Widodo, Wikan Budi Utami, Fitria Sulistyowati, dan Atiek Sandrawati

ISBN: 978-634-00-3296-3 (jil.2 PDF)

Bab 3

Integral



Bagaimanakah hubungan antara turunan suatu fungsi dan luas daerah yang dibatasi oleh grafiknya? Bagaimana cara menghitung luas daerah di bawah suatu kurva?

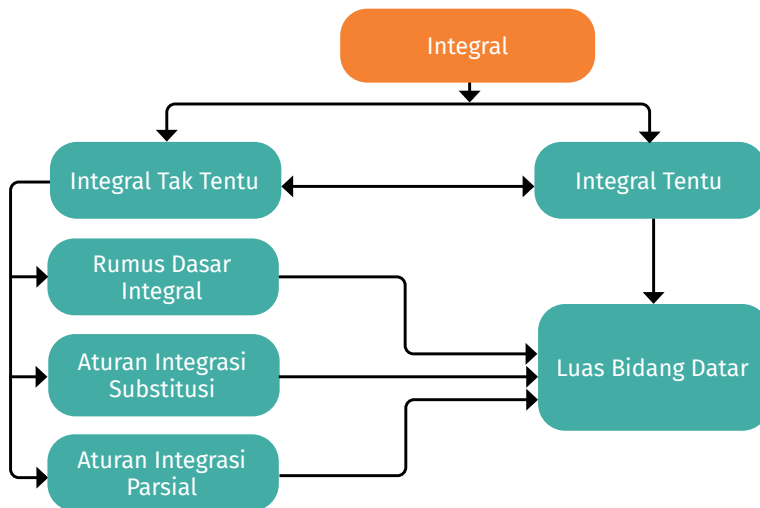
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan dapat menemukan konsep integral tak tentu, menerapkan konsep integral tak tentu melalui penyelesaian masalah, menemukan konsep integral tentu, dan menerapkan konsep integral tentu melalui penyelesaian masalah.

Kata Kunci

- ▶ antiturunan
- ▶ integral parsial
- ▶ luas bidang datar

Peta Konsep



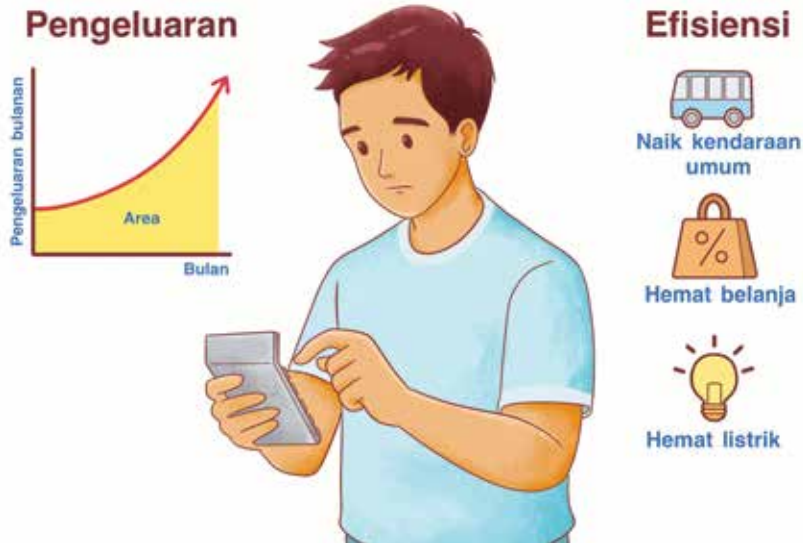
Inflasi dan Integral

Saat ini masyarakat menghadapi tantangan ekonomi yang terus berkembang. Tantangan yang sering muncul adalah inflasi. *Inflasi* ialah kenaikan harga sejumlah barang dan jasa yang terjadi secara terus-menerus sehingga menyebabkan daya beli masyarakat menurun. Untuk mengatasi kondisi tersebut, masyarakat perlu memiliki strategi efisiensi pengeluaran.

Pada konteks matematis, masyarakat dapat menggunakan konsep integral untuk merepresentasikan akumulasi pengeluaran rumah tangga dalam jangka waktu tertentu.

Supaya lebih paham, kamu dapat memperhatikan Gambar 3.1 berikut.

Inflasi, Efisiensi, dan Integral



Gambar 3.1 Inflasi, Efisiensi, dan Integral

Pada gambar tampak sebuah kurva yang merepresentasikan besarnya pengeluaran bulanan. Luas area di bawah kurva tersebut menunjukkan total biaya pengeluaran rumah tangga. Dengan memahami dan menerapkan prinsip integral, kita bisa mengetahui bagaimana efisiensi dapat dikaitkan dengan pengurangan area tersebut. Efisiensi yang dimaksud adalah upaya menurunkan pengeluaran secara keseluruhan.

A. Integral Tak Tentu

Gottfried Wilhelm Leibniz lahir di Leipzig, Saxony, pada tahun 1646. Orang tuanya, terutama sang ayah yang bernama Friedrich Leibniz, sejak awal tertarik dengan masalah hukum dan filosofis. Ayahnya adalah seorang pengacara dan profesor etika. Adapun ibunya adalah putri seorang pengacara. Berkat banyak koleksi buku sang ayah, Leibniz dapat belajar bahasa Yunani



Gambar 3.2 Gottfried Wilhelm Leibniz

Sumber: Christoph Bernhard Francke/commons.
wikimedia.org (1695)

dan Latin pada usia 8 tahun. Pada usia 12 tahun, ia telah mengembangkan beberapa hipotesis logis yang menjadi bahasa simbolis matematika.

Pada tahun 1661, Leibniz mendaftar di Universitas Leipzig untuk mempelajari filsafat di bawah bimbingan John Adam Scherze dan ahli teori filsafat Jacob Thomas. Dua tahun kemudian, pada 1663, ia melanjutkan studi ke Universitas Jena dan belajar kepada Erhard Weigel, seorang matematikawan, fisikawan, dan astronom, untuk mendalami pemikiran Pythagoras.

Pada usia 20 tahun, Leibniz berniat memperoleh gelar doktor di bidang hukum. Namun, para profesor di Leipzig menolaknya karena menganggap usianya masih terlalu muda. Oleh karena itu, ia melanjutkan pendidikan di Universitas Altdorf, dekat Nürnberg.

Dalam sejarah perkembangan kalkulus, banyak sejarawan sepakat bahwa Newton dan Leibniz mengembangkan kalkulus secara terpisah. Keduanya menggunakan sistem simbol yang berbeda. Berdasarkan kesaksian teman dekat Newton, diketahui bahwa Newton telah menyelesaikan sebagian besar karyanya jauh lebih awal daripada Leibniz, tetapi ia menunda penerbitannya hingga tahun 1693. Ia baru menjelaskannya secara lengkap pada 1704. Sementara itu, Leibniz mulai menerbitkan karyanya tentang kalkulus secara utuh sejak tahun 1684.

Notasi diferensial yang dikembangkan oleh Leibniz lebih banyak digunakan di Benua Eropa, sedangkan Inggris baru mulai mengadopsinya pada tahun 1820. Leibniz dikenal sebagai pencipta banyak simbol dalam matematika modern. Ia memperkenalkan istilah kalkulus dan integral, serta notasi standar seperti $\frac{dy}{dx}$ untuk turunan dan simbol integral $\int$. Ia juga berperan dalam memopulerkan istilah fungsi dan penggunaan tanda sama dengan (=) secara konsisten untuk menyatakan kesetaraan. Perkembangan kalkulus di Benua Eropa berlangsung lebih cepat dibandingkan di Inggris, terutama disebabkan oleh keunggulan dalam sistem simbolisasi matematika yang diperkenalkan oleh Leibniz. (Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018: 29—31).



Ayo Mengingat Kembali

Sifat Turunan

Jika c suatu bilangan tetap dan $f(x) = c$ untuk semua x , maka

$$f'(x) = 0.$$

Jika n bilangan bulat positif dan $f(x) = x^n$, maka

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$



Ayo Bereksplorasi 3.1

Pernahkah kamu berbelanja di pasar tradisional atau supermarket dalam beberapa bulan terakhir? Bagaimana harga barangnya? Andaikan dalam beberapa bulan terakhir harga barang-barang terus meningkat dibandingkan bulan-bulan sebelumnya, hal ini tentunya berdampak pada pengeluaran rumah tangga. Kamu dapat membantu orang tua dalam memecahkan masalah tersebut dengan melakukan analisis matematika.

Misalkan kecepatan kenaikan pengeluaran rumah tangga setiap bulan dinyatakan dengan fungsi $f'(x) = 2x + 1$, dengan x adalah bulan ke- x dan $f(x)$ dalam juta/bulan.

1. Bagaimanakah caramu mengetahui jumlah pengeluaran dalam 1 tahun?
2. Jika kamu mengetahui laju kenaikan pengeluaran setiap bulan, bagaimana kamu dapat mengetahui total pengeluaran?
3. Apa yang terjadi jika “menyatukan kembali” laju perubahannya?



Ayo Mencoba 3.1

Kamu dapat menjawab setiap pertanyaan tersebut dengan melakukan kegiatan berikut.

Langkah pertama: membuat tabel pengeluaran rumah tangga selama 12 bulan dengan fungsi $f'(x) = 2x + 1$ (dalam juta rupiah). Kamu dapat menyalin Tabel 3.1 dan melengkapinya.

Tabel 3.1 Pengeluaran Rumah Tangga

Bulan	x	$f'(x) = 2x + 1$	Pengeluaran
Januari	1	$f'(1) = 2(\dots) + 1 = \dots$	...
Februari	...	...	...
Maret	...	...	...
April	...	...	...
Mei	...	...	...
Juni	...	...	...
Juli	...	...	...
Agustus	...	...	...
September	...	...	...
Oktober	...	...	...
November	...	...	...
Desember	...	...	...

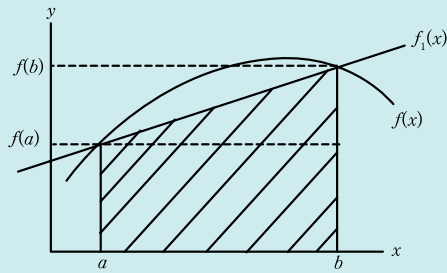
Langkah kedua: menggambar grafik hasil pada Tabel 3.1 dengan sumbu- x berupa angka 1—12 yang mewakili urutan bulan dan sumbu- y menunjukkan besar pengeluaran (dalam juta rupiah) pada buku catatan/kertas berpetak.

Langkah ketiga: menghitung luas dengan pendekatan luas trapesium yang merupakan luasan di bawah kurva dari $x = 1$ sampai dengan $x = 12$. Cobalah melengkapi Tabel 3.2 agar kamu lebih mudah menentukan luasannya.



Petunjuk

Diberikan fungsi $f(x)$ pada interval $[a, b]$. Untuk menentukan pendekatan luas daerah, kamu dapat menggunakan luas trapesium. Perhatikan Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Aturan Trapesium

Luas trapesium = $\frac{1}{2} \times \text{jumlah sisi sejajar} \times \text{tinggi}$.

Luas trapesium = $\frac{1}{2} \times (f(a) + f(b)) \times (b - a)$.

Tabel 3.2 Luas Kurva dengan Pendekatan Luas Trapesium

Interval Bulan	$f'(x) = 2x + 1$	$f'(x + 1) = \dots$	Luas Trapesium (juta rupiah)
Januari—Februari	...	...	...
Februari—Maret	...	...	...
Maret—April	...	...	...
April—Mei	...	...	...
Mei—Juni	...	...	...
Juni—Juli	...	...	...
Juli—Agustus	...	...	...
Agustus—September	...	...	...
September—Oktober	...	...	...
Oktober—November	...	...	...
November—Desember	...	...	...
Total			...



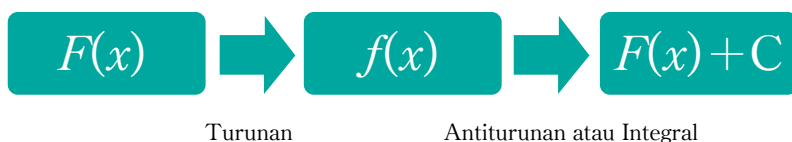
Ayo Berdiskusi

Dari hasil Ayo Mencoba 3.1, berdiskusilah dengan temanmu untuk menjawab pertanyaan berikut.

1. Bagaimana kalian memaknai luas yang diperoleh dalam konteks pengeluaran rumah tangga pada kegiatan sebelumnya? Apa yang kalian dapatkan?
2. Bagaimana peran integral dalam membantu kita menentukan total pengeluaran dari laju perubahan?
3. Apa yang dapat kalian simpulkan dari kegiatan Ayo Bereksplorasi 3.1?

1. Definisi Integral Tak Tentu

Kegiatanmu dalam Ayo Bereksplorasi 3.1 merupakan suatu proses perubahan fungsi. Kita dapat membuat sketsa kesimpulannya seperti berikut.



Gambar 3.4 Proses Perubahan Fungsi

Proses ini menjadi dasar dalam merumuskan definisi dari integral.

Definisi 3.1

Antiturunan atau integral dari $f(x)$ untuk setiap nilai x pada interval I merupakan himpunan fungsi $F(x) + C$ sehingga

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = f(x).$$

Misalkan $y = F(x) + C$, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x) \\ \frac{d}{dx}[F(x) + C] &= f(x) \\ dy &= f(x)dx \\ \int dy &= \int f(x)dx \\ y &= \int f(x)dx \\ F(x) + C &= \int f(x)dx, \end{aligned}$$

untuk setiap bilangan real C .

Proses untuk mendapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari y disebut *diferensiasi* atau proses menemukan turunan. Adapun proses untuk memperoleh y dari $\frac{dy}{dx}$ disebut

antiturunan atau *integral*. Pengintegralan fungsi $f(x)$ terhadap x disimbolkan dengan

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- ▶ $\int f(x)dx$ disebut sebagai integral tak tentu dan
- ▶ C adalah konstanta integrasi.

Contoh Soal 3.1

Tentukan turunan dari $f(x) = x^2 + x$.

Alternatif penyelesaian:

Turunan dari fungsi $f(x) = x^2 + x$ adalah $f'(x) = 2x + 1$.



Ayo Berpikir Kritis

Diskusikan dengan temanmu apakah integral dari $f(x) = 2x + 1$ adalah $F(x) = x^2 + x$? Jelaskan jawaban kalian.

2. Sifat-Sifat Integral Tak Tentu

a. Eksplorasi Sifat-Sifat Integral Tak Tentu

Kali ini kita akan mempelajari berbagai sifat integral tak tentu dan membuat pembuktian dari sebagian sifat tersebut.

Sifat-Sifat

Sifat 3.1 $\int dx = x + C$.

Dalam kegiatan eksplorasi berikut, kamu akan memahami bagaimana memperoleh Sifat 3.1.



Ayo Bereksplorasi 3.2

Cobalah lengkapi titik-titik di bawah ini dengan langkah-langkah yang tepat.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x + C) &= \dots && \text{(Aturan Pangkat dan Sifat Turunan 2)} \\ x + C &= \int \dots && \text{(Integral Tak Tentu).} \end{aligned}$$

Jadi, benar bahwa $\int dx = x + C$.

Sifat-Sifat

Sifat 3.2 Jika n bilangan rasional dan $n \neq 0$, maka

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C.$$

Dalam kegiatan eksplorasi berikut, kamu akan memahami bagaimana memperoleh Sifat 3.2.



Ayo Bereksplorasi 3.3

Cobalah isi titik-titik di bawah ini dengan jawaban yang tepat. Terapkan sifat-sifat turunan dan teknik integral tak tentu untuk mempermudah menyelesaikannya.

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1} + C) = (\dots)x^{\dots} \quad (\text{Aturan Pangkat dan Sifat Turunan 2}).$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{n+1}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{d}{dx}[x^{n+1} + C] &= \left(\frac{1}{n+1}\right)(\dots)x^{\dots} \\ \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{n+1}\right)(x^{n+1} + C)\right] &= \dots \quad (\text{Sifat Turunan 1 dan Sifat Aljabar}) \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{C}{n+1}\right] &= \dots \quad (\text{Sifat Aljabar}) \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] &= \dots \quad (\text{Sifat Aljabar}). \end{aligned}$$

Jadi, benar bahwa $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$.

Berikut ini sifat-sifat integral tak tentu lainnya.

Sifat-Sifat

Sifat 3.3 $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, dengan a adalah konstanta.

Sifat 3.4 Jika $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ didefinisikan pada interval yang sama, maka

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Sifat 3.5 Jika $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ didefinisikan pada interval yang sama, maka

$$\int [f_1(x) - f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx.$$

Sifat 3.6 Aturan Integrasi Substitusi

Jika g suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan n sebuah bilangan rasional, maka

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + C; n \neq -1.$$

Kamu akan memahami bagaimana memperoleh Sifat 3.6 dengan mengerjakan eksplorasi berikut.



Ayo Bereksplorasi 3.4

Cobalah lengkapi proses penyelesaian di bawah ini dengan tepat. Kamu dapat menerapkan sifat-sifat turunan, teknik integral tak tentu, dan sifat-sifat sebelumnya.

Misalkan $u = g(x)$, maka $du = g'(x)dx$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \int [g(x)]^n g'(x) dx &= \int \dots du && \text{(Substitusi)} \\ &= \dots && \text{(Sifat 3.2)} \\ &= \frac{1}{\dots + \dots} [g(x)]^{n+1} + C && \text{(Substitusi).} \end{aligned}$$

Jadi, _____

Sifat-Sifat

Sifat 3.7 Aturan Integrasi Parsial

Jika u dan v fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, maka

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Kamu akan mengeksplorasi bagaimana memperoleh Sifat 3.7 melalui kegiatan berikut.



Ayo Bereksplorasi 3.5

Cobalah isi titik-titik di bawah ini dengan langkah-langkah penyelesaian yang tepat.

Misalkan fungsi $u(x)$ dan $v(x)$ kontinu di R , maka

$$\frac{d}{dx}[u(x).v(x)] = \dots \quad (\text{Sifat Turunan 3})$$

sehingga

$$\int \frac{d}{dx}[u(x).v(x)]dx = \int (\dots + \dots)dx$$

$$\int \frac{d}{dx}[u(x).v(x)]dx = \int \dots dx + \int \dots dx \quad (\text{Sifat 3.4})$$

$$u(x).v(x) = \int \dots dx + \int \dots dx \quad (\text{Integral Tak Tentu})$$

$$\int u(x).v'(x)dx = \int \dots - \int \dots dx.$$

Dengan menyubstitusikan $v'(x)dx = dv$ dan $u'(x)dx = du$, diperoleh

$$\int u.dv = \dots - \int \dots.$$

Jadi, _____

Sifat-Sifat

Sifat 3.8 Aturan Integral Trigonometri

- ▶ $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$
- ▶ $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$
- ▶ $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C.$



Ayo Berpikir Kreatif

Cobalah kamu tunjukkan Sifat 3.3, 3.4, 3.5, dan 3.8, kemudian presentasikan hasil tersebut.

b. Penerapan Sifat-Sifat Dasar Integral Tak Tentu

Agar kamu bisa memahami sifat-sifat integral tak tentu, perhatikanlah contoh soal berikut.

Contoh Soal 3.2

Tentukan integral dari $f(x) = x^5$.

Alternatif penyelesaian:

Integral dari fungsi $f(x) = x^5$ adalah

$$\begin{aligned}\int x^5 dx &= \frac{1}{5+1} x^{5+1} + C && \text{(Sifat 3.2)} \\ &= \frac{1}{6} x^6 + C && \text{(Sifat Aljabar).}\end{aligned}$$

Jadi, integral dari fungsi $f(x) = x^5$ adalah $\frac{1}{6}x^6 + C$.

Kamu dapat menyelesaikan soal integral pada fungsi eksponensial menggunakan sifat-sifat integral sebelumnya dan sifat integral berikut ini.

Sifat-Sifat

Sifat 3.9 Aturan Integral Eksponensial

- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, a \neq 0.$



Ayo Mencoba 3.2

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

- Tentukan $\int (x^4 - e^x) dx$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $f_1(x) = x^4$ dan $f_2(x) = \dots$, maka

$$\begin{aligned}\int (x^4 - e^x) dx &= \int \dots dx - \int \dots dx && \text{(Sifat 3.5)} \\ &= \frac{1}{\dots} x^{\dots} - \dots + C && \text{(Sifat 3.2 dan sifat 3.9a).}\end{aligned}$$

Jadi, $\int (x^4 - e^x) dx = \dots$

- Tentukan $\int (e^{2x} + \sqrt{x}) dx$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $f_1(x) = \dots$ dan $f_2(x) = \dots$, maka

$$\begin{aligned}\int (e^{2x} + \sqrt{x}) dx &= \int \dots dx + \int \dots dx && \text{(Sifat 3.4)} \\ &= \int \dots dx + \int \dots^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \dots + \dots + C && \text{(Sifat 3.9b dan Sifat 3.2).}\end{aligned}$$

Jadi, $\int (e^{2x} + \sqrt{x}) dx = \dots$

c. Penerapan Aturan Integrasi Substitusi

Berikut ini adalah contoh soal yang menggunakan Aturan Integrasi Substitusi (Sifat 3.6) pada fungsi aljabar dan fungsi eksponensial.

Contoh Soal 3.3

Tentukan $\int 2x(x^2 + 5)^4 dx$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $g(x) = x^2 + 5$, maka

$$g'(x)dx = 2x dx,$$

sehingga

$$\begin{aligned}\int 2x(x^2 + 5)^4 dx &= \int (x^2 + 5)^4 (2x dx) \\ &= \frac{1}{4+1}(x^2 + 5)^{4+1} + C && \text{(Sifat 3.6)} \\ &= \frac{1}{5}(x^2 + 5)^5 + C.\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int 2x(x^2 + 5)^4 dx = \frac{1}{5}(x^2 + 5)^5 + C.$$

Contoh Soal 3.4

Tentukan $\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $g(x) = 1 + e^x$, maka

$$g'(x)dx = e^x dx.$$

sehingga

$$\begin{aligned}\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx &= \int (1 + e^x)^{\frac{1}{2}} (e^x dx) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} + 1}(1 + e^x)^{\frac{1}{2} + 1} + C && \text{(Sifat 3.6)} \\ &= \frac{2}{3}(1 + e^x)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$



Video Pembelajaran

Kamu dapat mencermati penjelasan mengenai integrasi substitusi dengan menggunakan contoh lain. Kamu dapat memindai kode respons cepat di samping atau mengunjungi tautan berikut.

<https://bukupusbuk.id/s/mtl12b3video1> dan <https://bukupusbuk.id/s/mtl12b3video2>



Kamu dapat mencoba menyelesaikan persoalan yang melibatkan penggunaan Aturan Integrasi Substitusi pada Ayo Mencoba 3.3 dan 3.4.



Ayo Mencoba 3.3

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Tentukan $\int \sqrt{3x+4} \, dx$.

Alternatif penyelesaian:

Bentuk $\int \sqrt{3x+4} \, dx$ dapat diubah menjadi

$$\int (3x+4)^{\frac{1}{2}} \, dx.$$

Misalkan $g(x) = \dots$, maka

$$g'(x) \, dx = \dots$$

Kamu dapat melihat untuk $g'(x) \, dx = \dots \, dx$, agar sesuai dengan pertanyaannya diperlukan faktor 3 untuk menyertai dx . Dengan menggunakan Sifat 3.6 diperoleh

$$\begin{aligned} \int (3x+4)^{\frac{1}{2}} \, dx &= \int (\dots + \dots)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{1}{3} \right) 3 \, dx \right) && \text{(Sifat Aljabar)} \\ &= \frac{1}{3} \int (\dots + \dots)^{\frac{1}{2}} (3 \, dx) && \text{(Sifat 3.3)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\dots} (\dots + \dots)^{\frac{3}{2}} + C && \text{(Sifat 3.6)} \\ &= \frac{2}{\dots} (\dots + \dots)^{\frac{3}{2}} + C && \text{(Sifat Aljabar).} \end{aligned}$$

Jadi, $\int (3x+4)^{\frac{1}{2}} \, dx = \dots$

Sebelum memecahkan masalah pada Ayo Mencoba 3.4, kamu dapat memperhatikan penjelasan berikut.

Kecepatan $v(t)$ adalah laju perubahan posisi $s(t)$ terhadap waktu, sedangkan *percepatan* $a(t)$ adalah laju perubahan kecepatan terhadap waktu. Dalam materi integral, kecepatan dapat diperoleh dari integral percepatan. Adapun posisi dapat diperoleh dari integral kecepatan. Hubungan kecepatan dan percepatan sebagai berikut.

$$a(t) \xrightarrow{\int} v(t) \xrightarrow{\int} s(t)$$



Ayo Mencoba 3.4

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Sebuah partikel bergerak pada suatu garis lurus. Jarak tempuh suatu partikel dinyatakan dalam s m dari pusat pada saat t detik. Adapun kecepatan partikel adalah v cm/detik sehingga $v = \cos 2\pi t$ dengan arah positif ke kanan dari titik pusat. Jika titik awal gerak partikel berada 5 cm di kanan titik pusat, tentukan posisi partikel $\frac{1}{3}$ detik kemudian.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui kecepatan partikel $v = \cos 2\pi t$, maka dapat ditulis

$$v = \frac{ds}{dt} = \cos 2\pi t$$

$$ds = \dots dt \quad (\text{Sifat Aljabar})$$

$$\int ds = \int \dots dt \quad (\text{Integral Tak Tentu})$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \int \dots (\dots dt) \quad (\text{Sifat 3.3 dan Sifat Aljabar})$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \int \dots + C \quad (\text{Sifat 3.6 dan Sifat 3.8}).$$

Untuk $t = 0$ maka $s = 5$, sehingga

$$\dots = \frac{1}{2\pi} \dots (\dots) + C$$

$$C = \dots$$

Persamaannya menjadi

$$s = \frac{1}{2\pi} \dots + \dots$$

Posisi partikel $\frac{1}{3}$ detik kemudian adalah

$$s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \dots (\dots) + (\dots) = \dots$$

Jadi, posisi partikel $\frac{1}{3}$ detik kemudian adalah ... cm di sebelah kanan.

d. Penerapan Aturan Integrasi Parsial

Contoh berikut menunjukkan penyelesaian integral suatu fungsi menggunakan Aturan Integrasi Parsial (Sifat 3.7).

Contoh Soal 3.5

Tentukan $\int x^2 \sin x \, dx$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $u = x^2$, maka

$$du = 2x \, dx.$$

Jika $dv = \sin x \, dx$, maka

$$v = \int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

Dengan menggunakan Aturan Integrasi Parsial diperoleh

$$\int x^2 \sin x \, dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x \, dx \quad (\text{Sifat 3.7})$$

$$= x^2(-\cos x) + 2 \int \cos x \cdot x \, dx \quad (\text{Sifat 3.3})$$

$$= x^2(-\cos x) + 2\left(x \sin x - \int \sin x \, dx\right) \quad (\text{Sifat 3.7})$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \quad (\text{Sifat 3.8}).$$

Catatan:

Kamu dapat memperhatikan bahwa penyelesaian $\int \cos x \cdot x \, dx$ membutuhkan Aturan Integrasi Parsial $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

Misalkan $u = x$ maka $du = dx$,

$$dv = \cos x \, dx \text{ maka } v = \sin x,$$

sehingga

$$\begin{aligned} \int \cos x \cdot x \, dx &= \int x \cos x \, dx \\ &= x \sin x - \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Kamu dapat mencoba menyelesaikan persoalan yang melibatkan penggunaan Aturan Integrasi Parsial pada Ayo Mencoba 3.5.



Ayo Mencoba 3.5

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Tentukan $\int x \sin x \, dx$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $u = \dots$, maka

$$du = \dots dx$$

Jika $dv = \sin x \, dx$, maka

$$v = \dots$$

Dengan menggunakan Sifat 3.7, diperoleh

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \dots (\dots) - \int (-\cos x) \, dx \\ &= \dots + \dots + C. \end{aligned}$$

Jadi, $\int x \sin x \, dx = \dots$

2. Tentukan $\int x\sqrt{1+x} \, dx$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $u = \dots$, maka

$$du = \dots dx$$

Jika $dv = \dots$, maka

$$v = \dots$$

Dengan menggunakan Sifat 3.7, diperoleh

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1+x} \, dx &= \dots (\dots) - \int \frac{\dots}{\dots} (\dots + \dots) \frac{\dots}{\dots} \, dx \\ &= \dots - \dots + C. \end{aligned}$$

Jadi, $\int x\sqrt{1+x} \, dx = \dots$

Latihan Soal Integral Tak Tentu

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar.

1. Tentukan integral tak tentu berikut.

a. $\int 2x^7 dx$

c. $\int (3x^5 - 2x^3) dx$

b. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

d. $\int e^{-x} dx$

2. Tentukan integral tak tentu berikut dengan Aturan Integrasi Substitusi.

a. $\int \sqrt[3]{6-2x} dx$

c. $\int 2 \sin x \sqrt[3]{1+\cos x} dx$

b. $\int x(x^2-9)^2 dx$

d. $\int e^x (3e^x + 2)^2 dx$

3. Tentukan integral tak tentu berikut.

a. $\int x(5x^2-3)^7 dx$

c. $\int x^2 \sqrt{1-x} dx$

b. $\int x \cos x dx$

d. $\int 6x^2 \sin^3 x dx$

4. Dalam 10 hari pertama bulan Desember, sebuah sel suatu tanaman bertumbuh sedemikian rupa sehingga pada t hari sesudah tanggal 1 Desember, volume sel itu bertambah dengan kecepatan $(12-t)^{-2}$ mikrometer kubik per hari. Jika pada tanggal 3 Desember volume sel itu adalah 3 mikrometer kubik, berapa volumenya pada tanggal 8 Desember?

5. Sebuah supermarket menjual pasta gigi merek XYZdent. Saat permintaan mencapai 50 kemasan per minggu, harga jualnya menjadi Rp39.500,00/kemasan. Perubahan harga terhadap jumlah permintaan (fungsi marginal harga permintaan) dinyatakan dalam fungsi $p'(x) = -0,017e^{-0,01x}$ dengan x menyatakan jumlah kemasan yang diminta per minggu dan $p(x)$ adalah harga per kemasan. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan harga per kemasan yang harus ditetapkan oleh supermarket jika ingin menjual 100 kemasan per minggu.

B. Integral Tentu



Tahukah Kamu

Bernhard Riemann memilih untuk berkuliah di Universitas Göttingen. Universitas Göttingen terus menjadi pusat matematika dunia selama 100 tahun ke depan. Bernhard Riemann terinspirasi oleh fisikawan terkenal W. E. Weber dan matematikawan terbesar pada masanya, Carl F. Gauss. Pada tahun 1851 ia menerima gelar doktor dari Gauss, kemudian tinggal dan mengajar di Göttingen, dan meninggal 15 tahun kemudian. Hidupnya singkat, hanya 39 tahun.



Gambar 3.5 Bernhard Riemann

Sumber: Anonim/commons.wikimedia.org
(1863)

Bernhard Riemann tidak memiliki waktu untuk menghasilkan terlalu banyak karya matematika seperti Euler dan Cauchy, tetapi karyanya layak mendapat pujian yang mendalam karena kualitasnya. Risalah matematikanya menetapkan arah baru untuk teori fungsional yang kompleks dan memulai studi terdalam, yang sekarang dikenal sebagai *topologi*. Salah satu karyanya adalah definisi modern dari integral tertentu yang dikenal sebagai *integral Riemann*. (Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018: 34—35).

1. Jumlahan Riemann



Ayo Mengingat Kembali

- Luas persegi panjang $= p \times l$.
- $\sum_{i=1}^5 A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$.



Ayo Bereksplorasi 3.6

Kamu dapat melakukan langkah-langkah berikut.

1. Buatlah setengah lingkaran dari kertas dengan jari-jari 12 cm.
2. Bagaimana caramu menghitung luas setengah lingkaran?
3. Tempatkan setengah lingkaran pada koordinat Kartesius pada kertas berpetak, kemudian buat partisi menjadi beberapa bagian sama panjang.

4. Hitunglah setiap bagian partisi setengah lingkaran dengan pendekatan luas persegi panjang.
5. Jumlahkan semua luas persegi panjang yang terbentuk.
6. Isikan hasil yang kamu peroleh pada Tabel 3.3

Tabel 3.3 Luas Total Setengah Lingkaran

Banyak Partisi yang Digunakan			...
Persegi panjang ke-	1	panjang	...
		lebar	...
		luas	...
Persegi panjang ke-	2	panjang	...
		lebar	...
		luas	...
Persegi panjang ke-	3	panjang	...
		lebar	...
		luas	...
Persegi panjang ke-	4	panjang	...
		lebar	...
		luas	...
Persegi panjang ke-	5	panjang	...
		lebar	...
		luas	...
Persegi panjang ke-	6	panjang	...
		lebar	...
		luas	...
Luas total			...

Catatan: baris persegi panjang ke-... dapat ditambah jika partisi melebihi jumlah baris yang disediakan.



Ayo Berdiskusi

Diskusikan dengan teman atau kelompok lain apakah hasil yang diperoleh sama? Jika berbeda, mengapa?

Secara umum, dengan melakukan kegiatan Ayo Bereksplorasi 3.6, kamu telah mempelajari Jumlahan Riemann. Pada partisi tersebut, kita dapat memisalkan sebagai berikut.

Terdapat sebuah interval $[a, b]$ yang dibagi menjadi subinterval, yaitu

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Lebar setiap subinterval adalah

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Misalkan panjang setiap subinterval $f(\bar{x}_i)$ dengan $\bar{x}_i$ merupakan titik sampel pada subinterval. Dengan demikian, luas persegi panjang adalah

$$A_i = p \times l = f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Jadi, luas totalnya adalah (asumsi ada lima partisi)

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 &= f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + f(\bar{x}_4) \Delta x_4 + f(\bar{x}_5) \Delta x_5. \\ &= \sum_{i=1}^5 f(\bar{x}_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Jika kita membuat partisi sebanyak n , maka

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n.$$

Jumlahan di atas dinamakan *Jumlahan Riemann*. Kamu akan lebih paham dengan mencermati contoh berikut.

Contoh Soal 3.6

- Diketahui suatu fungsi $f(x) = x$ pada interval $[0, 7]$. Tentukan Jumlahan Riemann dengan membuat partisi interval tersebut menjadi 7 subinterval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap subinterval.

Alternatif penyelesaian:

Kamu dapat melihat grafik fungsi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.6. Kamu dapat membagi interval $[0, 7]$ menjadi 7 subinterval, kemudian menentukan Jumlahan Riemann dari fungsi $f(x) = x$.

Dengan demikian, untuk

$$\bar{x}_1 = 0,5 \text{ maka } f(\bar{x}_1) = 0,5;$$

$$\bar{x}_2 = 1,5 \text{ maka } f(\bar{x}_2) = 1,5;$$

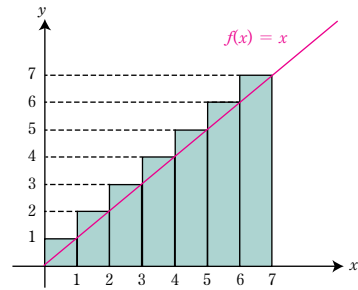
$$\bar{x}_3 = 2,5 \text{ maka } f(\bar{x}_3) = 2,5;$$

$$\bar{x}_4 = 3,5 \text{ maka } f(\bar{x}_4) = 3,5;$$

$$\bar{x}_5 = 4,5 \text{ maka } f(\bar{x}_5) = 4,5;$$

$$\bar{x}_6 = 5,5 \text{ maka } f(\bar{x}_6) = 5,5;$$

$$\bar{x}_7 = 6,5 \text{ maka } f(\bar{x}_7) = 6,5.$$



Gambar 3.6 Grafik Fungsi $f(x) = x$

Karena lebar subinterval sama, berarti $\Delta x = \frac{7-0}{7} = 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 7$.

Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = x$ pada interval $[0, 7]$ dengan 7 subinterval adalah

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 f(\bar{x}_i) \Delta x_i &= f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + f(\bar{x}_4) \Delta x_4 + f(\bar{x}_5) \Delta x_5 + \\ &\quad f(\bar{x}_6) \Delta x_6 + f(\bar{x}_7) \Delta x_7 \\ &= (f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + f(\bar{x}_4) + f(\bar{x}_5) + f(\bar{x}_6) + f(\bar{x}_7)) \Delta x \\ &= (0,5 + 1,5 + 2,5 + 3,5 + 4,5 + 5,5 + 6,5)(1) \\ &= 24,5. \end{aligned}$$



Ayo Mencoba 3.6

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Diketahui suatu fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 3]$. Tentukan Jumlahan Riemann dengan cara membuat partisi interval $[0, 3]$ menjadi 6 subinterval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap subinterval.

Alternatif penyelesaian:

Kamu dapat menggambar grafik fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 3]$ dengan ... subinterval pada kertas berpetak. Berikut ini contoh skala pada sumbu- x dan sumbu- y yang dapat dibuat pada kertas.

Dengan demikian, untuk

$$\bar{x}_1 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_1) = \dots$$

$$\bar{x}_2 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_2) = \dots$$

$$\bar{x}_3 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_3) = \dots$$

$$\bar{x}_4 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_4) = \dots$$

$$\bar{x}_5 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_5) = \dots$$

$$\bar{x}_6 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_6) = \dots$$

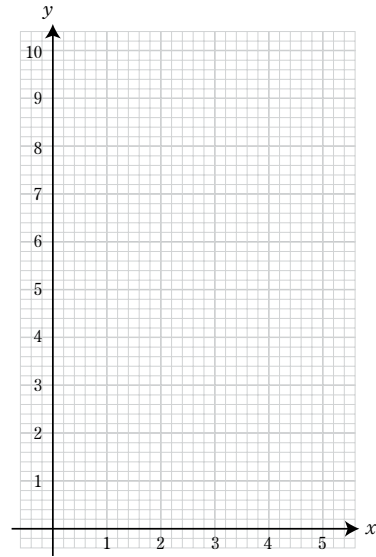
Karena lebar subinterval sama, berarti $\Delta x = \frac{(\dots - \dots)}{6} = \dots$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 6$. Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = \dots$ pada interval $[0, 3]$ dengan enam subinterval adalah

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\dots} f(\bar{x}_i) \Delta x_i &= f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + f(\bar{x}_4) \Delta x_4 + f(\bar{x}_5) \Delta x_5 + f(\bar{x}_6) \Delta x_6 \\ &= (f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + f(\bar{x}_4) + f(\bar{x}_5) + f(\bar{x}_6)) \Delta x \\ &= (\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots)(\dots) \\ &= \dots \end{aligned}$$

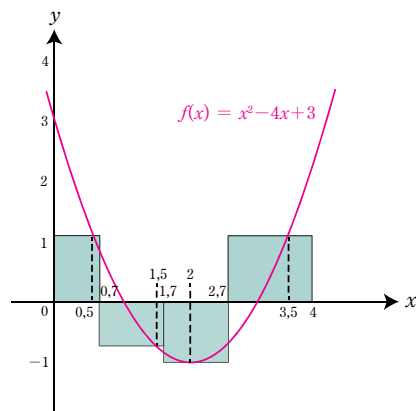
- Misalkan suatu fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ berada pada interval $[0, 4]$ dengan grafik seperti pada Gambar 3.8. Tentukan Jumlahan Riemannnya.

Alternatif penyelesaian:

Untuk menentukan Jumlahan Riemann fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0, 4]$, kamu membuat partisi menjadi



Gambar 3.7 Contoh Sketsa Awal Grafik $f(x)$



Gambar 3.8 Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$

... subinterval. Pada grafik sudah ditentukan untuk nilai $\bar{x}_i$. Dengan demikian, diperoleh

$$\bar{x}_1 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_1) = \dots$$

$$\bar{x}_2 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_2) = \dots$$

$$\bar{x}_3 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_3) = \dots$$

$$\bar{x}_4 = \dots \text{ maka } f(\bar{x}_4) = \dots$$

Karena lebar subinterval tidak sama, berarti Δx pada setiap partisi adalah

$$\Delta x_1 = \dots \quad \Delta x_3 = \dots$$

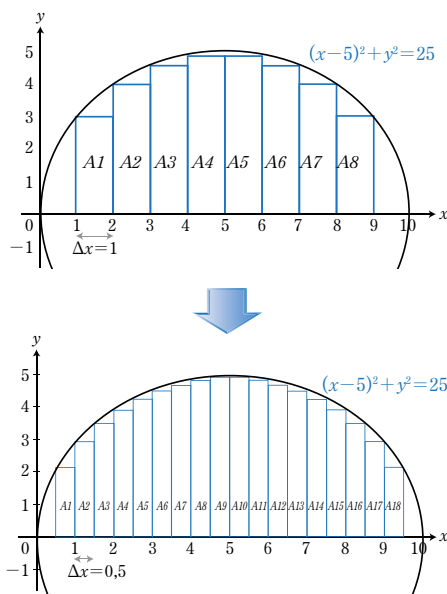
$$\Delta x_2 = \dots \quad \Delta x_4 = \dots$$

Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = \dots$ pada interval $[0, 4]$ adalah

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + f(\bar{x}_4) \Delta x_4$$

2. Integral Tentu

Kamu dapat melihat kembali kegiatan Ayo Bereksplorasi 3.6, kemudian memperhatikan Gambar 3.9 berikut.



Gambar 3.9 Penambahan Partisi yang Mengakibatkan Perubahan Δx

Gambar 3.9 menjelaskan bahwa jika setengah lingkaran tersebut kita partisi sebanyak mungkin sehingga persegi panjang semakin banyak menuju Δx menuju 0, luas setengah lingkaran akan semakin mendekati luas yang sesungguhnya.

$$A_{\text{setengah lingkaran}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Selanjutnya, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ disebut *integral tentu* pada interval $[0, a]$ dan ditulis $\int_0^a f(x) dx$.

Contoh Soal 3.7

Misalkan terdapat fungsi $f(x) = x$. Tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[0, 7]$ atau $\int_0^7 x dx$.

Alternatif penyelesaian:

Pertama-tama, kita harus menentukan Jumlahan Riemann dari fungsi $f(x) = x$ dengan n subinterval pada interval $[0, 7]$.

Dengan demikian, perlu ditentukan beberapa hal berikut.

- Panjang setiap subinterval.

Interval yang diketahui adalah $[0, 7]$ dan dipartisi menjadi bagian yang sama sehingga $\frac{7-0}{n} = \frac{7}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

- Titik wakil pada setiap subinterval ($\bar{x}_i$).

Perhatikan batas paling kiri, yaitu 0, dan batas paling kanan adalah 7, maka

$$\bar{x}_1 = 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{7}{n} = \frac{7}{n}$$

$$\bar{x}_2 = 0 + 2\Delta x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{7}{n} = 2 \cdot \frac{7}{n}$$

$$\bar{x}_3 = 0 + 3\Delta x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{7}{n} = 3 \cdot \frac{7}{n}$$

⋮

$$\bar{x}_n = 0 + n\Delta x_n = 0 + n \cdot \frac{7}{n} = n \cdot \frac{7}{n}$$

sehingga setiap fungsi dapat diwakilkan oleh

$$f(\bar{x}_i) = i \cdot \frac{7}{n} = 7 \frac{i}{n}.$$

Dengan demikian, Jumlahan Riemann adalah

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n.$$

Karena Δx sama, maka

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval $[0, a]$ dan ditulis

$\int_0^a f(x) dx$, maka

$$\begin{aligned} \int_0^7 x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{7i}{n} \left(\frac{7}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{49i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{49}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{49}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{49}{2} \left(\frac{n^2 + n}{n^2} \right) \\ &= \frac{49}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2} = \frac{49}{2} (1) = \frac{49}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, integral tentu dari $f(x) = x$ pada interval $[0, 7]$ atau $\int_0^7 x dx$ adalah $\int_0^7 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \frac{49}{2}$.



Petunjuk

Jumlah deret aritmetika, deret kuadrat, dan deret kubik dalam notasi sigma

$\sum_{i=1}^n k = k + k + k + \dots + k = kn$ adalah sebagai berikut.

- ▶ $\sum_{i=1}^n i = \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{n \text{ kali}} = \frac{n(n+1)}{2}.$
- ▶ $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
- ▶ $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$



Ayo Mencoba 3.7

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Diketahui fungsi $f(x) = x^2$. Tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[0, 3]$ atau $\int_0^3 x^2 dx$.

Alternatif penyelesaian:

Pertama-tama, kamu harus menentukan Jumlahan Riemann dari fungsi $f(x) = x^2$ dengan n subinterval pada interval tersebut. Kamu dapat menentukan beberapa hal berikut.

- Panjang setiap subinterval.

Interval yang diketahui adalah $[0, 3]$ dan dipartisi menjadi bagian yang sama, maka $\frac{\cdots \cdots \cdots}{n} = \frac{\cdots \cdots \cdots}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

- Titik wakil pada setiap subinterval $(\bar{x}_i)$.

Perhatikan batas paling kiri, yaitu 0, dan batas paling kanan adalah ..., maka

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{\cdots \cdots \cdots}{n} = \frac{\cdots \cdots \cdots}{n} \\ \bar{x}_2 &= 0 + 2\Delta x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{\cdots \cdots \cdots}{n} = 2 \cdot \frac{\cdots \cdots \cdots}{n} \\ \bar{x}_3 &= 0 + 3\Delta x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{\cdots \cdots \cdots}{n} = 3 \cdot \frac{\cdots \cdots \cdots}{n} \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= 0 + n\Delta x_n = 0 + n \cdot \frac{\cdots \cdots \cdots}{n} = n \cdot \frac{\cdots \cdots \cdots}{n}\end{aligned}$$

sehingga setiap fungsi dapat diwakilkan oleh

$$f(\bar{x}_i) = \left(i \cdot \frac{\cdots \cdots \cdots}{n}\right)^2 = \frac{\cdots \cdots \cdots}{\cdots \cdots \cdots}.$$

Dengan demikian, Jumlahan Riemann adalah

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n.$$

Karena Δx sama, maka

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval $[0, a]$ dan ditulis $\int_0^a f(x) dx$, maka

$$\int_0^3 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x$$

Jadi, integral tentu dari $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 3]$ atau $\int_0^3 x^2 dx$ adalah

2. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[0, 4]$ atau $\int_0^4 (x^2 - 4x + 3)dx$.

Alternatif penyelesaian:

Pertama-tama, kamu harus menentukan Jumlahan Riemann dari fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ dengan n subinterval pada interval tersebut. Kamu dapat menentukan beberapa hal berikut.

- Panjang setiap subinterval.

Interval yang diketahui adalah $[0, 4]$ dan dipartisi menjadi bagian yang sama, maka $\frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

- Titik wakil pada setiap subinterval ($\bar{x}_i$).

Batas paling kiri adalah 0 dan batas paling kanan adalah 4, maka

$$\bar{x}_1 = 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{4}{n} = \frac{4}{n}$$

$$\bar{x}_2 = 0 + 2\Delta x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{4}{n} = 2 \cdot \frac{4}{n}$$

$$\bar{x}_3 = 0 + 3\Delta x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{4}{n} = 3 \cdot \frac{4}{n}$$

⋮

$$\bar{x}_n = 0 + n\Delta x_n = 0 + n \cdot \frac{4}{n} = n \cdot \frac{4}{n}$$

sehingga setiap fungsi dapat diwakilkan oleh

$$f(\bar{x}_i) = \dots = \left(i \cdot \frac{4}{n}\right)^2 - 4\left(i \cdot \frac{4}{n}\right) + 3 = \dots$$

Dengan demikian, Jumlahan Riemann adalah

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n.$$

Karena Δx sama, maka

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval $[0, a]$ dan

ditulis $\int_0^a f(x)dx$, maka

$$\begin{aligned} \int_0^4 (x^2 - 4x + 3)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \dots (\dots) \end{aligned}$$

Jadi, integral tentu dari $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0, 4]$ adalah $\int_0^4 (x^2 - 4x + 3)dx = \underline{\hspace{5cm}}$



Ayo Berpikir Kritis

Bagaimana jika Δx -nya tidak sama?

3. Sifat-Sifat Integral Tentu

Setelah mengetahui sifat-sifat integral tak tentu, kali ini kita akan mengeksplorasi berbagai sifat integral tentu.

Sifat-Sifat

Sifat 3.10 Jika fungsi f dapat diintegrasikan pada interval tertutup $[a, b]$, maka

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Dalam kegiatan eksplorasi berikut, kamu akan memahami bagaimana memperoleh Sifat 3.10.



Ayo Bereksplorasi 3.7

Cobalah isi titik-titik di bawah ini dengan jawaban yang tepat. Terapkan sifat-sifat turunan, teknik integral tak tentu, teknik integral tentu, dan sifat-sifat sebelumnya untuk mempermudah menyelesaikannya.

Dari definisi integral diperoleh

$$\int_a^a f(x)dx = \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Jika $\Delta x_i = \frac{a-a}{n} = \dots$, maka

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

Jadi, $\underline{\hspace{10cm}}$

Sifat-Sifat

Sifat 3.11 Jika fungsi f dapat diintegrasikan pada interval tertutup $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, a > b.$$

Dalam kegiatan eksplorasi ini, kamu akan memahami bagaimana memperoleh Sifat 3.11.



Ayo Bereksplorasi 3.8

Cobalah isi titik-titik di bawah ini dengan jawaban yang tepat. Terapkan sifat-sifat turunan, teknik integral tak tentu, teknik integral tentu, dan sifat-sifat sebelumnya untuk mempermudah menyelesaikannya.

Dari definisi integral diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

dengan

$$\Delta x_i = \frac{\dots - \dots}{\dots} = \dots$$

dan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

dengan

$$\Delta x_i = \frac{\dots - \dots}{\dots} = \dots$$

maka

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \left(\frac{\dots - \dots}{\dots} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \left(\frac{-(\dots - \dots)}{\dots} \right) \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

Jadi, _____

Sifat-Sifat

Sifat 3.12 Jika fungsi f dapat diintegrasikan pada interval tertutup $[a, b]$ dengan k sebarang konstanta, maka

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Sifat 3.13 Jika fungsi f dan g dapat diintegrasikan pada $[a, b]$, maka $f + g$ dapat diintegrasikan pada $[a, b]$ sehingga

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Sifat 3.14 Jika fungsi f dan g dapat diintegrasikan pada $[a, b]$, maka $f - g$ dapat diintegrasikan pada $[a, b]$ sehingga

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Sifat 3.15 Jika fungsi f dapat diintegrasikan pada interval tertutup yang memuat tiga bilangan a , b , dan c dengan $a < c < b$, maka

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Ayo Berpikir Kreatif

Cobalah kamu buktikan Sifat 3.12 sampai dengan Sifat 3.15, kemudian presentasikan hasil tersebut di depan kelas.

4. Teorema Dasar Kalkulus

a. Teorema Dasar Kalkulus I

Kamu dapat mencermati teorema berikut beserta pembuktiannya.

Teorema

Teorema Dasar Kalkulus I

Misalkan fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan x sebarang bilangan di dalam $[a, b]$. Jika fungsi F adalah fungsi yang didefinisikan oleh

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ maka } F'(x) = f(x).$$

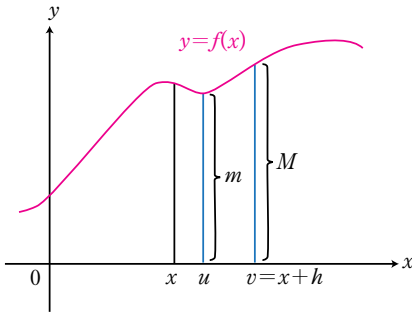
Pembuktian Teorema Dasar Kalkulus I

Jika x dan $x + h$ berada pada interval $[a, b]$, maka

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \left(\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt \right) - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Untuk $h \neq 0$, maka

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad (1)$$



Gambar 3.10 Grafik Fungsi $y = f(x)$

Diasumsikan untuk $h > 0$, fungsi f kontinu di $[x, x+h]$. Berdasarkan sifat nilai ekstrem, misalkan u dan v berada di $[x, x+h]$ dengan $f(u) = m$ dan $f(v) = M$, maka m dan M merupakan nilai minimum dan maksimum pada f di $[x, x+h]$. Dengan memperhatikan Gambar 3.10, diperoleh

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq Mh.$$

Dapat pula dinyatakan dengan

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v)h.$$

Setelah membagi pertidaksamaannya dengan h , diperoleh

$$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v). \quad (2)$$

Selanjutnya, persamaan (1) disubstitusi ke persamaan (2) sehingga

$$f(u) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(v). \quad (3)$$

Persamaan (3) dapat digunakan untuk menunjukkan $h < 0$ (kamu dapat mencobanya sendiri). Selanjutnya, untuk $h \rightarrow 0$, maka

$$u \rightarrow x \text{ dan } v \rightarrow x,$$

dengan u dan v berada di antara x dan $x + h$. Dengan demikian,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x)$$

dan

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x).$$

Karena f kontinu di x , dapat disimpulkan bahwa

$$F'(x) = \lim_{v \rightarrow x} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Jadi, $F'(x) = f(x)$.



Ayo Mengingat Kembali

Apakah kamu masih mengingat fungsi kontinu yang sudah dibahas di Bab 2 Turunan Fungsi?

Untuk memperjelas Teorema Dasar Kalkulus I, kamu dapat memperhatikan Contoh Soal 3.8 berikut.

Contoh Soal 3.8

Tentukan $\frac{d}{dx} \left(\int_1^x \sqrt{2+t} \, dt \right)$.

Alternatif penyelesaian:

Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus I, maka

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{2+t} \, dt,$$

dengan $f(t) = \sqrt{2+t}$ dan $a = 1$.

$$F'(x) = f(x) = \sqrt{2+x}.$$

Jadi, $\frac{d}{dx} \left(\int_1^x \sqrt{2+t} \, dt \right) = \sqrt{2+x}$.



Penting

$\frac{df(x)}{dx}$ merupakan simbol penulisan turunan.

b. Teorema Dasar Kalkulus II

Kamu dapat mencermati teorema berikut beserta pembuktiannya.

Teorema

Teorema Dasar Kalkulus II

Misalkan fungsi f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan F suatu fungsi sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$. Untuk semua x di dalam $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a).$$



Ayo Mengingat Kembali

Apakah kamu mengingat fungsi kontinu yang dipelajari pada Bab 2?

Pembuktian Teorema Dasar Kalkulus II

Jika f kontinu pada semua titik di dalam $[a, b]$, dengan melihat Teorema Dasar Kalkulus I dan Sifat 3.1 ($\int dx = x + C$), diperoleh

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$

dengan C suatu konstanta.

Dengan mengambil $x = b$ dan $x = a$ secara berturut-turut, maka diperoleh

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + C \quad (4)$$

dan

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C \quad (5)$$

Dari persamaan (4) dan (5), diperoleh

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - \left(\int_a^a f(t)dt + C \right).$$

Karena $\int_a^a f(t)dt = 0$, maka

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Contoh Soal 3.9

Tentukan $\int_1^3 x^2 dx$.

Alternatif penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x^2$ memiliki antiturunan $\frac{1}{3}x^3$ atau $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Fungsi f kontinu pada semua titik di dalam $[1, 3]$ maka $a = 1$ dan $b = 3$.

Jika kita substitusikan $a = 1$ dan $b = 3$ ke $g(x)$, maka

$$g(a) = g(1) = \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{1}{3}$$

dan

$$g(b) = g(3) = \frac{1}{3}(3)^3 = \frac{27}{3}.$$

Jadi, $\int_1^3 x^2 dx = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$.

Contoh Soal 3.10

Tentukan $\int_1^5 (2x - 1) dx$.

Alternatif penyelesaian:

Kamu dapat menggunakan Sifat 3.2 pada integral tak tentu.

$$\begin{aligned}\int_1^5 2x \, dx &= \frac{1}{1+1} (2x^{1+1}) \Big|_1^5 \\ &= x^2 \Big|_1^5 \\ &= 5^2 - 1^2 \\ &= 24.\end{aligned}$$

Jadi, $\int_1^5 (2x - 1) dx = 24$.

**Petunjuk****Sifat 3.2**

Jika n bilangan rasional dan $n \neq -1$, maka

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C.$$

**Ayo Berpikir Kreatif**

Cobalah kamu temukan cara lain untuk menyelesaikan Contoh Soal 3.9 dan 3.10.

**Ayo Mencoba 3.8**

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Tentukan $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x (4 + t^6) dt \right]$.

Alternatif penyelesaian:

Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus I, maka

$$F'(x) = \dots$$

dengan $f(t) = \dots$ dan $a = \dots$

$$F'(x) = f(x) = \dots$$

$$\text{Jadi, } \frac{d}{dx} \left[\int_0^x (4 + t^6) dt \right] = \dots$$

2. Tentukan panjang lintasan yang ditempuh oleh sebuah objek yang bergerak dengan kecepatan $v(t) = (5 - t)$ cm/detik dari $t = 0$ detik sampai $t = 5$ detik.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui: $v(t) = \dots$

Ditanya: s saat $t = 0$ sampai $t = 5$

Jawab:

$$\begin{aligned}s &= \int_0^5 v(t) dt \\ &= \int_0^5 (5-t) dt\end{aligned}$$

Jadi, panjang lintasannya adalah

Coba kamu pahami Contoh Soal 3.11 berikut agar dapat mengaplikasikan Teorema Dasar Kalkulus I dan II pada masalah matematis.

Contoh Soal 3.11

Tentukan $\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2) dx$.

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2) dx &= \int_1^4 5 dx - \int_1^4 2x dx + \int_1^4 3x^2 dx && \text{(Sifat 3.13)} \\ &= 5 \int_1^4 dx - 2 \int_1^4 x dx + 3 \int_1^4 x^2 dx && \text{(Sifat 3.12)} \\ &= 5 \left(x \Big|_1^4 \right) - 2 \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_1^4 \right) + 3 \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_1^4 \right) \\ &= 5(4 - 1) - (4^2 - 1) + (4^3 - 1) && \text{(Teorema Dasar Kalkulus II)} \\ &= 5(3) - (16 - 1) + (64 - 1) \\ &= 15 - 15 + 63 = 63.\end{aligned}$$

Jadi, $\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2) dx = 63$.



Ayo Mencoba 3.9

Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

1. Tentukan $\int_0^3 (3 - 2x + x^2) dx$.

Alternatif penyelesaian:

$$\int \dots (3 - 2x + x^2) dx = \int \dots \dots dx - \int \dots \dots dx + \int \dots \dots dx \quad (\text{Sifat ...})$$

Jadi, $\int_0^3 (3 - 2x + x^2) dx = \dots$

2. Tentukan $\int_0^2 x^2 (x^3 + 1) dx$.

Alternatif penyelesaian:

Mari, mengingat kembali pada submateri Integral Tak Tentu.



Ayo Mengingat Kembali

Sifat 3.6 Aturan Integrasi Substitusi

Jika g suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan n sebuah bilangan rasional, maka

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + C; n \neq -1.$$

Misalkan $g(x) = \dots$, maka

$$g'(x) = \dots dx.$$

Kamu dapat melihat untuk $g'(x) = \dots dx$, agar sesuai dengan pertanyaannya diperlukan faktor ... untuk menyertai dx sehingga

$$\int_0^2 x^2 (x^3 + 1) dx = \int_0^2 (\dots) \left(\left(\frac{1}{3} \right) \dots dx \right)$$



Ayo Berpikir Kreatif

Dapakah kamu menyelesaikan kedua soal pada Ayo Mencoba 3.8 dengan metode berbeda?

c. Luas Daerah Bidang Datar

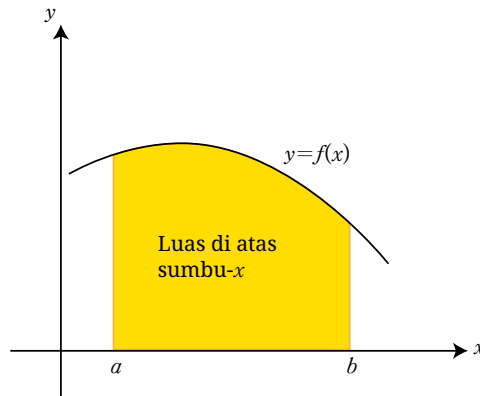
Sebelum mencermati Contoh Soal 3.12, kita akan mempelajari kemungkinan luas daerah bidang datar yang dibatasi oleh kurva pada sumbu- x , yaitu sebagai berikut.

1) Luas daerah bidang datar di atas sumbu- x

Misalkan $y = f(x)$ menentukan persamaan sebuah kurva pada bidang koordinat Kartesius. Jika fungsi f kontinu dan positif pada interval $a \leq x \leq b$, luas kurva yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu- x , garis $x = a$, dan garis $x = b$ dengan $f(x) > 0$ yang didekati oleh $[a, b]$ adalah

$$L = \int_a^b f(x) dx.$$

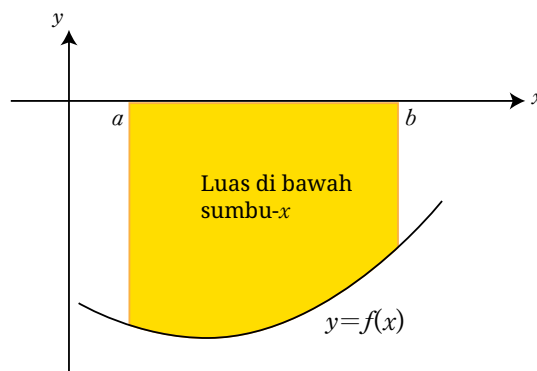
Penjelasan tersebut disajikan pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Luas Daerah Bidang Datar di atas Sumbu- x

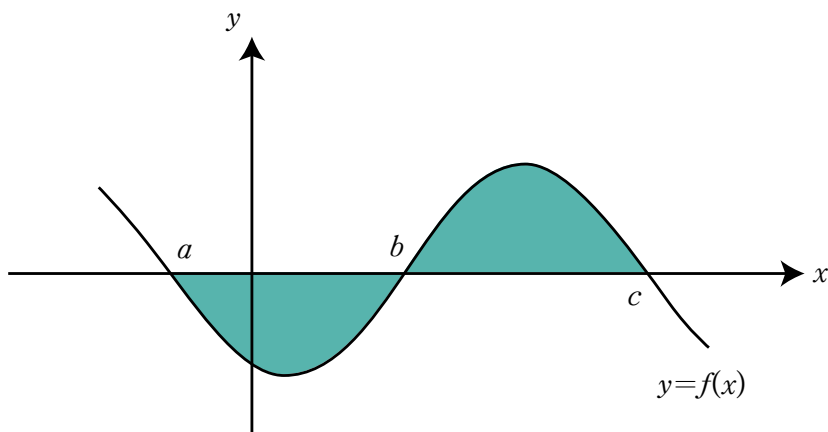
2) Luas daerah bidang datar di bawah sumbu- x

Jika grafik $y = f(x)$ di bawah sumbu- x seperti pada Gambar 3.12, nilai $\int_a^b f(x) dx$ berupa bilangan negatif sehingga tidak dapat menyatakan suatu luas. Namun, luas adalah bilangan positif sehingga luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, garis $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$ berupa bilangan positif.



Gambar 3.12 Luas Daerah Bidang Datar di Bawah Sumbu- x

3) Luas daerah bidang datar di bawah dan di atas sumbu- x

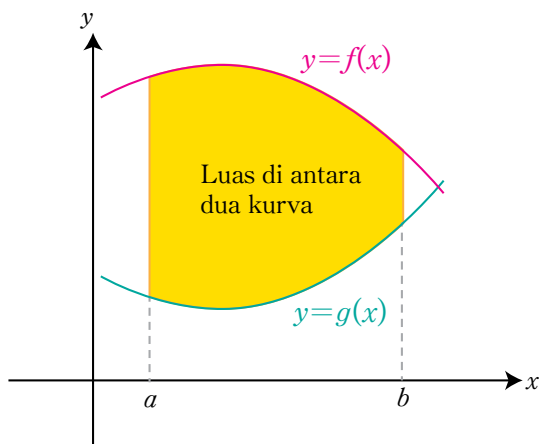


Gambar 3.13 Luas Daerah Bidang Datar di Atas dan di Bawah Sumbu- x

Berdasarkan penjelasan luas daerah bidang datar di atas sumbu- x dan di bawah sumbu- x , luas daerah pada Gambar 3.13 adalah

$$L = - \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx .$$

Luas daerah bidang datar yang dibatasi oleh dua kurva



Gambar 3.14 Luas Daerah Bidang Datar yang Dibentuk dari Dua Kurva

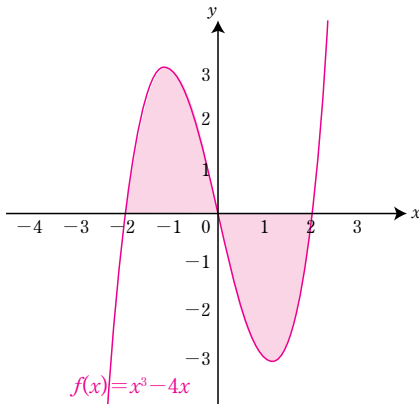
Luas daerah pada Gambar 3.14 yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, $y = g(x)$, garis $x = a$, dan garis $x = b$ yang didekati oleh $[a, b]$ adalah

$$L = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx .$$

Contoh Soal 3.12

Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^3 - 4x$ dan sumbu- x .

Alternatif penyelesaian:



Kamu dapat mengamati grafik fungsi $y = x^3 - 4x$. Kita temukan batas-batasnya terlebih dahulu dengan cara mencari titik potong pada sumbu- x dengan menyubstitusikan $y = x^3 - 4x$ ke $y = 0$.

$$y = 0$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x + 2)(x - 2) = 0$$

Gambar 3.15 Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 4x$ diperoleh

$$x = 0, x = -2, \text{ dan } x = 2.$$

Berdasarkan Gambar 3.15 dan hasil perhitungan, kurva memotong sumbu- x pada absis $-2, 0$, dan 2 . Luas daerah pada $[-2, 0]$ di atas sumbu- x adalah

$$\int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx.$$

dan luas daerah pada $[0, 2]$ di bawah sumbu- x adalah

$$-\int_0^2 (x^3 - 4x) dx.$$

Berdasarkan Sifat 3.14, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^3 - 4x) dx &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \left(-\int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right) \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{4}(0^4) - 2(0^2) \right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^2 \right) \right] - \\ &\quad \left[\left(\frac{1}{4}(2^4) - 2(2^2) \right) - \left(\frac{1}{4}(0^4) - 2(0^2) \right) \right] \\ &= (0 - (4 - 8)) - ((4 - 8) - 0) \\ &= 4 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Jadi, luas bidang datar tersebut adalah 8 satuan luas.



Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = 2x - x^3$ dan sumbu- x .

Alternatif penyelesaian:

► *Langkah I:*

Kamu dapat menggambar grafik fungsi $y = 2x - x^3$ pada koordinat Kartesius. Sebelumnya, kamu perlu menentukan batas-batasnya dengan mencari titik potong dengan sumbu- x . Caranya adalah dengan menyubstitusikan persamaan $y = 2x - x^3$ pada $y = 0$, diperoleh

$$2x - x^3 = 0,$$

sehingga $x = \dots$, $x = \dots$, atau $x = \dots$

► *Langkah II:*

Kamu dapat menggambar grafik $y = 2x - x^3$ pada kertas berpetak dengan mengacu pada hasil langkah sebelumnya.

► *Langkah III:*

Pada grafik yang dibuat, tampak kurva memotong sumbu- x di titik ..., ..., dan Luas daerah pada [..., ...] di atas sumbu- x adalah

dan luas daerah pada [..., ...] di bawah sumbu- x adalah

Berdasarkan Sifat ..., diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{\dots}^{\dots} (2x - x^3) dx &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

Jadi, luas bidang datar tersebut adalah ... satuan luas.



Video Pembelajaran

Kamu dapat melihat penjelasan Ayo Mencoba 3.9 dengan cara memindai kode respons cepat di samping atau mengunjungi tautan berikut. <https://bukupusbuk.id/s/mtl12b3video3>



2. Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh grafik $y = x^3 - 9x$ dan sumbu- x .

Alternatif penyelesaian:

► *Langkah I:*

Kamu dapat menggambar grafik $y = x^3 - 9x$ pada koordinat Kartesius. Sebelumnya, kamu perlu menentukan batas-batasnya dengan mencari titik potong dengan sumbu- x . Caranya adalah dengan menyubstitusikan persamaan $y = x^3 - 9x$ pada $y = 0$, diperoleh

► *Langkah II:*

Kamu dapat menggambar grafik $y = x^3 - 9x$ pada kertas berpetak dengan mengacu pada hasil langkah sebelumnya.

► *Langkah III:*

Kamu melihat dua daerah pada grafik, yaitu daerah pada [..., ...] di atas sumbu- x dan daerah pada [..., ...] di bawah sumbu- x .

Berdasarkan Sifat ..., diperoleh

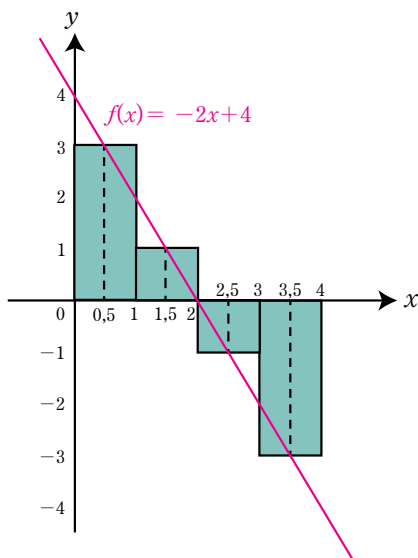
$$\begin{aligned} \int_{\dots}^{\dots} (\dots - \dots) dx &= \int_{\dots}^{\dots} (\dots - \dots) dx + (- \int_{\dots}^{\dots} (\dots - \dots) dx) \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

Jadi, luas bidang datar tersebut adalah ... satuan luas.

Latihan Soal Integral Tentu

Selesaikan soal-soal yang berkaitan dengan Jumlahan Riemann berikut ini dengan benar.

1. Diketahui fungsi $f(x) = 2 + x$ pada interval $[0, 2]$. Tentukan Jumlahan Riemann dengan 4 subinterval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap subinterval.
2. Diketahui fungsi $f(x) = (2 - x)^2$ pada interval $[0, 2]$. Tentukan Jumlahan Riemann dengan 6 subinterval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap subinterval.
3. Misalkan $f(x) = x^2 + x$ adalah fungsi pada interval $[1, 4]$. Tentukan Jumlahan Riemann dengan 6 subinterval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap subinterval.
4. Tentukan Jumlahan Riemann berdasarkan gambar berikut.



Gambar 3.16 Grafik Fungsi $f(x) = -2x + 4$

5. Misalkan $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah fungsi pada interval $[1, 3]$. Tentukan Jumlahan Riemann apabila $x_0 = -1$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{2}{3}$, $x_4 = 3$, $\bar{x}_1 = 1\frac{1}{4}$, $\bar{x}_2 = 2$, $\bar{x}_3 = 2\frac{1}{2}$, dan $\bar{x}_4 = 2\frac{3}{4}$.

Selesaikan soal-soal yang berkaitan dengan integral tentu berikut ini dengan benar. Perhitungan integral dengan penjabaran limit fungsi.

6. Diketahui fungsi $f(x) = 2 + x$ pada interval $[0, 2]$. Tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[0, 2]$ atau $\int_0^2 (2 + x) dx$.
7. Diketahui fungsi $f(x) = (2 - x)^2$ pada interval $[0, 2]$. Tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[0, 2]$ atau $\int_0^2 (2 - x)^2 dx$.
8. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + x$ pada interval $[1, 4]$. Tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[1, 4]$ atau $\int_1^4 (x^2 + x) dx$.
9. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - x + 4$ pada interval $[0, 4]$. Tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[0, 4]$ atau $\int_0^4 (x^2 - x + 4) dx$.
10. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 4x + 5$ pada interval $[1, 4]$. Tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[1, 4]$ atau $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx$.

Selesaikan soal-soal yang berkaitan dengan sifat-sifat integral tentu dan Teorema Dasar Kalkulus berikut ini dengan benar.

11. Tentukan:

- a. $\frac{d}{dx} \left[\int_x^2 (t^2 + t^{\frac{2}{3}}) dt \right]$
- b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^3 x \, dx$
- c. $\int_0^2 e^{2x} \, dx$

12. Tentukan $\int_3^6 xy \, dx$ dengan $x = 6 \cos \theta$ dan $y = 2 \sin \theta$.

13. Misalkan $\int_0^9 f(x) dx = 37$ dan $\int_0^9 g(x) dx = 16$. Tentukan $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$.

14. Sebuah partikel bergerak sepanjang garis sehingga kecepatannya pada waktu t adalah $v(t) = t^2 - t - 6$ (dalam meter per detik). Tentukan:

- a. perpindahan partikel dalam periode waktu $1 \leq t \leq 4$, dan
- b. jarak yang ditempuh selama periode itu.

15. Satria dan Satwika masing-masing mengendarai sepeda motor dan bergerak dengan kecepatan berbeda. Satria bergerak dengan kecepatan $v_A = t + \frac{1}{t+1}$ dan Satwika bergerak dengan kecepatan $v_B = t + \frac{1}{(t+1)^2}$. Apakah Satwika dapat menyusul Satria? Jelaskan alasannya.

C. Penerapan Integral

Setelah mempelajari integral beserta sifat-sifatnya, sekarang kamu akan mengeksplorasi berbagai penerapan integral, terutama dalam kehidupan sehari-hari.

1. Luas Daerah pada Kurva

Kamu dapat mencermati contoh soal berikut beserta penyelesaiannya.

Contoh Soal 3.13

Tentukan luas daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh fungsi $f(x) = x\sqrt{x^2 + 5}$, sumbu- x , dan garis $x = 2$.

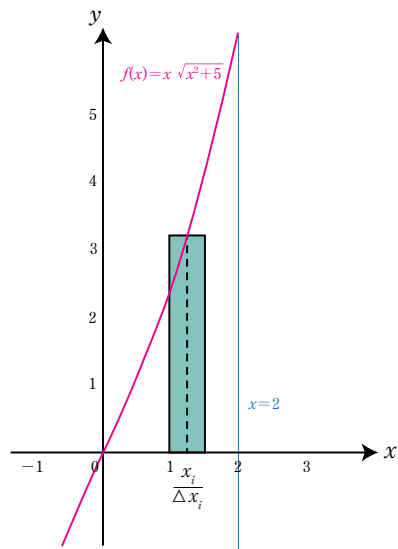
Alternatif penyelesaian:

Langkah awal adalah menggambarkan grafik fungsinya. Mari, kita amati grafiknya pada Gambar 3.17.

Pada gambar terdapat interval tertutup, yaitu $[0, 2]$. Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $x_i \sqrt{x_i^2 + 5}$. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $x_i \sqrt{x_i^2 + 5} \Delta x_i$. Misalkan A adalah luas daerah tersebut, maka

$$\begin{aligned} A &= \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \sqrt{x_i^2 + 5} \Delta x_i \\ &= \int_0^2 x \sqrt{x^2 + 5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{x^2 + 5} (2 dx) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{3} \left[(9)^{\frac{3}{2}} - (5)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{3} (27 - 5\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Jadi, luas daerahnya adalah $\frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5})$ satuan luas.



Gambar 3.17 Grafik Fungsi $f(x) = x\sqrt{x^2 + 5}$ dan Garis $x = 2$

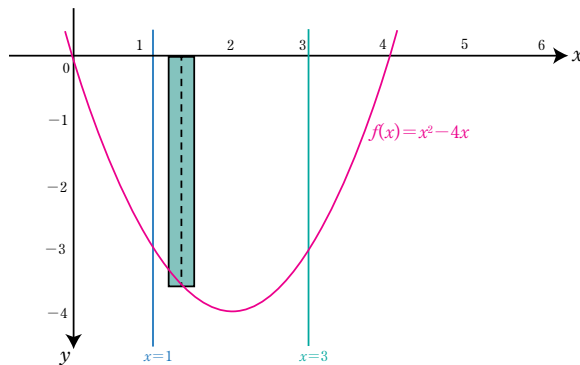


Selesaikan soal-soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Tentukan luas daerah di kuadran keempat yang dibatasi oleh fungsi $f(x) = x^2 - 4x$, garis $x = 1$, dan garis $x = 3$.

Alternatif penyelesaian:

Langkah awal adalah menggambarkan grafik fungsinya terlebih dahulu. Hasilnya tampak pada Gambar 3.18.



Gambar 3.18 Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x$

Jika diperhatikan, pada gambar tersebut terdapat interval tertutup, yaitu [..., ...]. Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah Misalkan A adalah luas daerah tersebut, maka

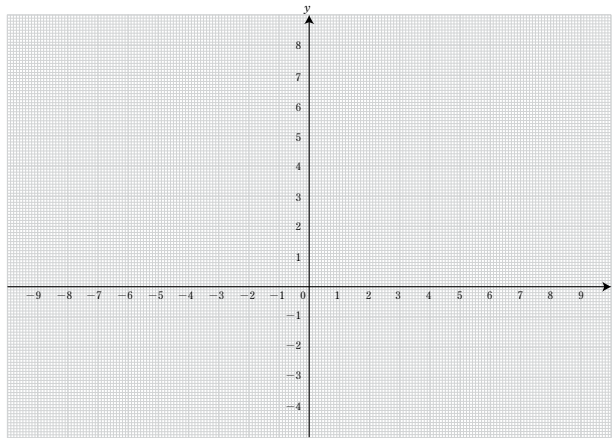
$$A = \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \dots \Delta x_i$$

Jadi luas daerahnya adalah ... satuan luas.

2. Tentukan luas daerah pada bidang koordinat Kartesius yang dibatasi oleh fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, garis $x = -2$, dan garis $x = 3$.

Alternatif penyelesaian:

Langkah awal adalah menggambarkan grafik fungsinya terlebih dahulu pada kertas berpetak.



Gambar 3.19 Contoh Bidang Koordinat untuk Menggambar Grafik

Jika kamu perhatikan, terdapat interval tertutup, yaitu $[-2, 1]$ di atas sumbu- x dan $[1, 3]$ di bawah sumbu- x . Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah

Karena terdapat dua daerah, yaitu di atas sumbu- x dan di bawah sumbu- x , maka

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \\ &= \int_{\dots}^{\dots} f(x) dx \\ &= \int_{\dots}^{\dots} \dots dx, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \\ &= \int_{\dots}^{\dots} f(x) dx \\ &= \int_{\dots}^{\dots} \dots dx. \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_{\dots}^{\dots} [\dots - \dots - \dots + \dots] dx + \int_{\dots}^{\dots} [\dots - \dots - \dots + \dots] dx \\ &= |\dots - \dots - \dots + \dots|_{\dots}^{\dots} + |\dots - \dots - \dots + \dots|_{\dots}^{\dots} \\ &= \dots + \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

Jadi, luas daerahnya adalah ... satuan luas.

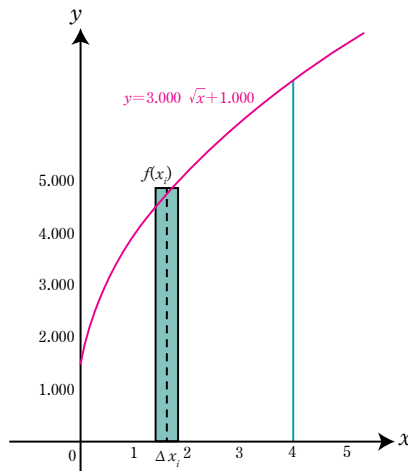
2. Aplikasi Integral dalam Bidang Ekonomi dan Bisnis

Kamu dapat memperhatikan contoh soal berikut beserta penyelesaiannya.

Contoh Soal 3.14

Sejumlah ponsel pintar (*smartphone*) model terbaru dipasarkan selama 5 tahun pertama. Misalkan y menyatakan banyak ponsel pintar yang terjual pada tahun tertentu dan x menyatakan tahun sejak produksi pertama. Fungsinya dinyatakan dalam bentuk $y = 3.000\sqrt{x} + 1.000$ dengan $0 \leq x \leq 5$. Berapa jumlah penjualan ponsel pintar tersebut selama 4 tahun pertama?

Alternatif penyelesaian:



Gambar 3.20 Grafik Fungsi $y = 3.000\sqrt{x} + 1.000$

Gambar 3.20 menunjukkan grafik fungsi $y = 3.000\sqrt{x} + 1.000$. Jika diperhatikan, terdapat interval tertutup, yaitu $[0, 4]$. Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $3.000\sqrt{x_i} + 1.000$. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $(3.000\sqrt{x_i} + 1.000)\Delta x_i$. Jika S buah barang terjual selama 4 tahun pertama, maka

$$\begin{aligned} S &= \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (3.000\sqrt{x_i} + 1.000)\Delta x_i \\ &= \int_0^4 f(x)dx \\ &= \int_0^4 (3.000\sqrt{x} + 1.000)dx \\ &= 3.000 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 1.000x \Big|_0^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2.000(4)^{\frac{3}{2}} + 1.000(4) \\
 &= 20.000.
 \end{aligned}$$

Jadi, ponsel pintar yang terjual selama 4 tahun pertama sebanyak 20.000 buah.



Ayo Mencoba 3.12

Selesaikan persoalan berikut ini dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

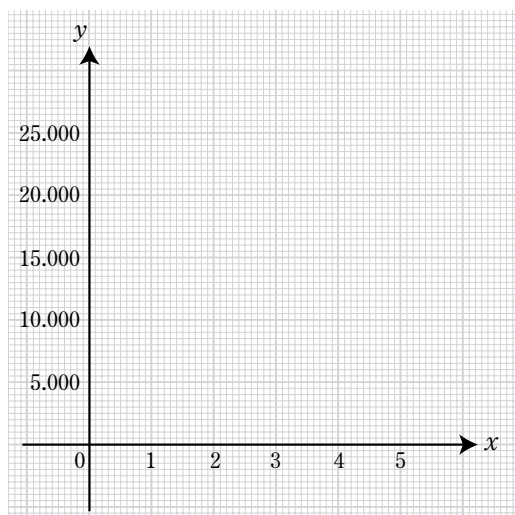
Seorang manajer perusahaan memperhitungkan bahwa pembelian seperangkat peralatan akan menghasilkan suatu penghematan biaya operasional pada perusahaan. Kecepatan penghematan biaya operasional $f(x)$ (dalam rupiah) setiap tahun bila peralatan itu telah dipakai selama x tahun adalah

$$f(x) = 4.000x + 1.000; 0 \leq x \leq 10.$$

- Berapa jumlah penghematan biaya operasional dalam 5 tahun pertama?
- Jika harga pembelian sama dengan Rp36.000,00, dalam berapa tahun harga peralatan itu kembali?

Alternatif penyelesaian:

- Kamu dapat membuat sketsa grafiknya terlebih dahulu.



Gambar 3.21 Contoh Bidang Koordinat untuk Menggambar Grafik

Kamu dapat memperhatikan pada grafik bahwa terdapat interval tertutup, yaitu [..., ...]. Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya

adalah Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $\dots \Delta x_i$.
Jika S adalah jumlah penghematan dalam 5 tahun pertama, maka

$$\begin{aligned} S &= \lim_{|\Delta| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \dots \Delta x_i \\ &= \int_{\dots}^{\dots} f(x) dx \end{aligned}$$

Jadi, jumlah penghematan biaya operasional dalam 5 tahun pertama adalah

- b. Karena harga seperangkat peralatan adalah Rp36.000,00 dan misalkan dalam n tahun harga peralatan itu kembali, maka

$$\begin{aligned} \int_0^n f(x) dx &= 36.000 \\ \int_n^0 (4.000x + 1.000) dx &= 36.000 \end{aligned}$$

Jadi, dalam jangka waktu ... tahun harga peralatan itu kembali.

3. Aplikasi Integral dalam Bidang Fisika

Integral juga dapat diaplikasikan dalam penyelesaian persoalan di bidang Fisika seperti pada contoh berikut ini.

Contoh Soal 3.15

Ketika sebuah partikel terletak pada a dengan jarak x meter dari titik asal, gaya sebesar $(x^2 + 2x)$ N bertindak di atasnya. Berapa usaha yang dilakukan untuk memindahkannya dari $x = 1$ ke $x = 3$?

Alternatif penyelesaian:

Persoalan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk integral berikut:

$$\begin{aligned} W &= \int_1^3 (x^2 + 2x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_1^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2 \right) \\
 &= 18 - \frac{4}{3} = \frac{50}{3}.
 \end{aligned}$$

Jadi, usaha yang dilakukan untuk memindahkan partikel tersebut dari $x = 1$ ke $x = 3$ adalah $\frac{50}{3}$ Joule.



Ayo Mencoba 3.13

Selesaikan persoalan berikut ini dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Sebuah gaya sebesar 40 N diperlukan untuk menahan pegas yang direntangkan dari panjang aslinya 10 cm menjadi sepanjang 15 cm. Berapa usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm?

Alternatif penyelesaian:

Menurut Hukum Hooke, gaya yang diperlukan untuk menahan pegas meregang x meter di luar panjang alaminya adalah $f(x) = kx$. Ketika pegas ditarik dari ... cm sampai ... cm, jumlah yang diregangkan adalah

$$\dots - \dots = \dots \text{ cm} = \dots \text{ m}.$$

Ini berarti $f(\dots) = 40$, maka $f(\dots) = 40$.

$$0,05k = 40 \text{ atau } k = \dots$$

Selanjutnya, $k = \dots$ dan usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm adalah

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{0,05}^{0,08} \dots dx \\
 &= \dots \Big|_{\dots}^{\dots} = \dots \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Jadi, usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm adalah

4. Aplikasi Integral dalam Bidang Kesehatan



Ayo Berdiskusi

Buatlah kelompok yang terdiri atas dua atau tiga orang. Setiap kelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan berikut, kemudian memaparkan hasilnya di kelas.

Proses penyembuhan luka yang dialami manusia berbeda-beda. Pada umumnya luka ringan dapat sembuh dengan sendirinya melalui perawatan yang baik. (Mekanisme penyembuhan luka secara biologis dijelaskan pada Gambar 3.22.) Akan tetapi, pada kasus tertentu luka sulit sembuh akibat cedera parah atau penyakit tertentu yang dimiliki oleh seseorang. Berkaitan dengan proses penyembuhan luka, kalian dapat menyelesaikan persoalan yang dialami Rusman berikut ini.

Rusman terluka dan sedang dalam proses penyembuhan. Seiring waktu proses ini menyebabkan lebar luka berkurang. Kecepatan penyembuhan luka tersebut dapat diestimasi dengan fungsi berikut:

$$A = f(t) = -11(t + 9) \text{ cm}^2 \text{ per hari,}$$

dengan t adalah jumlah hari sejak hari Selasa. Misalkan diketahui lebar luka pada hari Kamis adalah 6 cm^2 .

1. Tentukan lebar luka pada hari Selasa.
2. Jika luka sembuh dengan kecepatan yang sama, berapa lebar luka yang diharapkan pada hari Sabtu?

Latihan Soal Penerapan Integral

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar.

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + x - 12$ dan sumbu- x .



Gambar 3.22 Mekanisme Kesembuhan Luka

Sumber: digambar ulang dari vetonair.id/Instagram (2023)

2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4x$.
3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 2x - 2$ dan $y = x - 5$.
4. Sekelompok siswa sedang mengamati pertumbuhan lalat buah dalam sebuah tabung percobaan di laboratorium sekolah. Setiap hari jumlah lalat bertambah. Para siswa mencatat bahwa laju pertumbuhan populasi lalat buah tersebut mengikuti pola tertentu yang dinyatakan dengan fungsi $g(t) = 2e^{0,02t}$, yang menunjukkan jumlah lalat buah baru setiap hari ke- t . Saat pengamatan dimulai, terdapat 50 ekor lalat buah dalam tabung. Tentukan jumlah lalat buah yang berada di dalam tabung setelah 20 hari.
5. Gulungan kabel seberat 200 kg memiliki panjang 100 meter. Kabel tersebut digantung secara vertikal dari atas sebuah gedung yang tinggi. Berapa usaha yang diperlukan untuk mengangkat kabel ke puncak gedung?

Uji Kompetensi Bab 3

A. Lengkapi setiap pernyataan berikut menggunakan pilihan jawaban yang disediakan.

1. Integral adalah kebalikan dari Jika turunan dari $f(x)$ adalah $v(x)$, maka ... dari $v(x)$ adalah $f(x)$. Jika $v(x) = 10x$, maka

$f(x) = 5x^2 + C$	turunan	integral
-------------------	---------	----------

2. Integrasi menghasilkan ... di bawah kurva $y = v(x)$. Dimulai dari persegi panjang dengan alas ... dan tinggi $v(x)$, serta luas Saat $\Delta x \rightarrow 0$, luas $v_1x + \dots + v_n \Delta x$ menjadi ... dari $v(x)$. Simbol untuk integral tak tentu dari $v(x)$ adalah

$v(x)\Delta x$	sebuah angka	Δx
$\int v(x)dx$		integral

3. Masalah integrasi terselesaikan jika kita menemukan $f(x)$ sedemikian sehingga Dengan demikian, fungsi f adalah ... dari v dan $\int_2^6 v(x)dx$ sama dengan Batas-batas integrasi adalah Hal ini merupakan ..., dengan hasilnya adalah ... dan bukan fungsi $f(x)$.

$$a = 2 \text{ dan } b = 6$$

sebuah angka

$$\text{turunan } f(x) = v(x)$$

$$f(6) - f(2)$$

antiturunan

integral tentu

B. Periksalah kebenaran dari setiap pernyataan berikut apakah Benar atau Salah.

Misalkan terdapat sebarang fungsi $f(x)$. Jika $f(x)$ adalah antiturunan dari $v(x)$, maka

1. $2f(x)$ adalah antiturunan dari $2v(x)$.
2. $f(2x)$ adalah antiturunan dari $v(2x)$.
3. $f(x) + 1$ adalah antiturunan dari $v(x) + 1$.
4. $f(x + 1)$ adalah antiturunan dari $v(x + 1)$.
5. $(f(x))^2$ adalah antiturunan dari $(v(x))^2$.

C. Pilihlah jawaban yang tepat dengan menyilang (X) pada pilihan A, B, C, D, atau E. Jawaban benar dapat lebih dari satu.

1. Fungsi f dan g didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = -5(x - 2) \text{ dan } g(x) = (x - 5)^2 - 5.$$

$$\text{Jadi, } \int (g(x) - f(x)) dx = \dots$$

- | | |
|---|---|
| A. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 25x + C$ | D. $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 10 + C$ |
| B. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 10x + C$ | E. $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 25 + C$ |
| C. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 25 + C$ | |

2. Sebuah negara memodelkan laju inflasi bulanan pada tahun 2025 dengan fungsi $i(t) = 0,5t + 2$, dengan t menyatakan waktu dalam bulan setelah Januari 2025 dan $i(t)$ adalah laju inflasi dalam persen per bulan. Pemerintah ingin menghitung total inflasi kumulatif selama 6 bulan pertama (Januari sampai dengan Juni 2025).

Pilihlah semua pernyataan yang benar berdasarkan informasi tersebut.

- A. Total inflasi kumulatif dari bulan Januari sampai dengan Juni 2025 adalah hasil dari $\int_0^6 (0,5t + 2) dt$.
- B. Hasil dari $\int_0^6 (0,5t + 2) dt$ adalah 21.
- C. Fungsi $i(t)$ menyatakan pertumbuhan eksponensial inflasi bulanan.

- D. Nilai inflasi tertinggi selama 6 bulan adalah 5%.
- E. Rata-rata laju inflasi bulanan selama 6 bulan pertama adalah 3,5%.
3. Seorang pengrajin batik Celaket dari Malang ingin memperkirakan jumlah pewarna alami yang digunakan untuk mewarnai kain batik sepanjang proses pematikan.



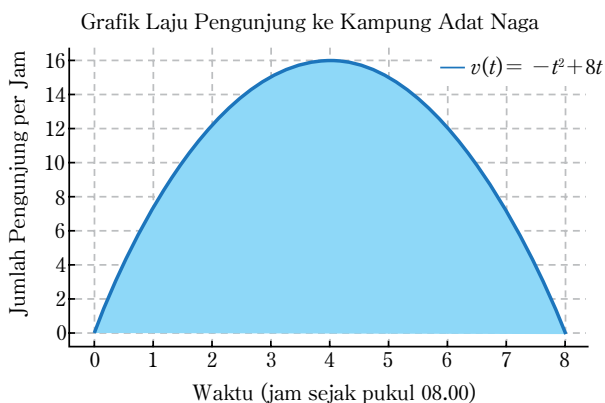
Gambar 3.23 Batik Tulis Celaket
Malang, Jawa Timur

Sumber: Hendra Saputra/MALANGTIMES.com (2020)

Jumlah pewarna yang digunakan dalam waktu tertentu mengikuti fungsi $p(t) = 3t^2 + 2t + 1$ dalam liter per jam, dengan t menyatakan waktu dalam jam sejak proses pewarnaan dimulai. Untuk menghasilkan batik bermotif tugu topeng malangan, proses pewarnaan berlangsung selama 4 jam.

Pilihlah semua pernyataan yang benar berdasarkan informasi tersebut.

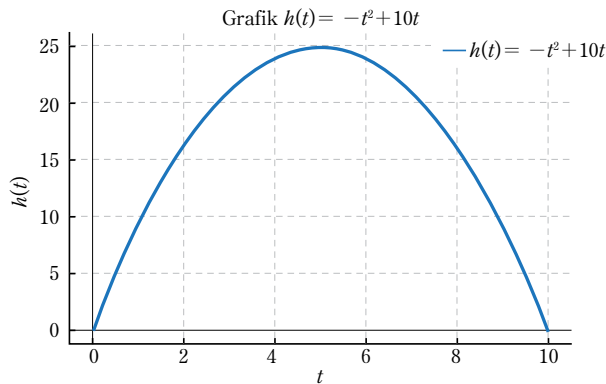
- A. Fungsi $p(t)$ menyatakan banyaknya pewarna yang digunakan pada waktu ke- t .
- B. Total pewarna yang digunakan selama 4 jam dapat dihitung dengan $\int_0^4 (3t^2 + 2t + 1) dt$.
- C. Hasil $\int_0^4 (3t^2 + 2t + 1) dt$ adalah 88 liter.
- D. Proses pewarnaan berlangsung dengan kecepatan konstan selama 4 jam.
- E. Semakin lama proses berlangsung, semakin banyak pewarna yang digunakan setiap jamnya.
4. Grafik berikut menunjukkan laju peningkatan jumlah pengunjung ke objek wisata Kampung Adat Naga di Jawa Barat pada hari libur nasional.



Gambar 3.24 Grafik Laju
Pengunjung ke Kampung Adat
Naga

Pilihlah semua pernyataan yang benar berdasarkan grafik di atas.

- A. Jumlah pengunjung total pada pukul 08.00—16.00 dapat diperkirakan dengan menghitung $\int_0^8 v(t) dt$.
 - B. Fungsi $v(t)$ menunjukkan bahwa pengunjung datang secara konsisten sepanjang hari.
 - C. Nilai maksimum fungsi $v(t)$ terjadi pada pukul 12.00 ($t = 4$).
 - D. Luas daerah di bawah kurva $v(t)$ dari $t = 0$ hingga $t = 8$ menunjukkan jumlah pengunjung kumulatif.
 - E. Jika fungsi $v(t) = -t^2 + 8t$, jumlah pengunjung total adalah 85 orang.
5. Seorang petani di Kabupaten Bojonegoro, Jawa Timur, memanen padi secara tradisional sejak pagi. Laju panen per jam disajikan dalam grafik $h(t) = -t^2 + 10t$. Fungsi yang digunakan menunjukkan bagaimana laju panen berubah setiap jam selama panen berlangsung.



Gambar 3.25 Grafik Fungsi $h(t) = -t^2 + 10t$

Pilihlah semua pernyataan yang benar berdasarkan informasi yang diberikan.

- A. Total hasil panen pada pukul 06.00—16.00 dapat dihitung dengan integral fungsi $h(t)$ dari $t = 0$ hingga $t = 10$.
- B. Grafik fungsi menunjukkan bahwa petani memanen dengan kecepatan tetap sepanjang hari.
- C. Hasil panen paling tinggi terjadi pada pukul 11.00.
- D. Nilai maksimum dari $h(t)$ adalah 25 kg per jam.
- E. Total panen selama 10 jam adalah 167 kg.

D. Kerjakanlah soal-soal berikut dengan menyertakan proses penyelesaiannya.

1. Diketahui fungsi $f(x) = 12 - x - x^2$, sumbu- x , garis $x = -3$, dan garis $x = 2$.
 - A. Nyatakan ukuran dari luas sebagai suatu Jumlahan Riemann dengan partisi yang sama.
 - B. Tentukan integral tentu dengan $\int_0^a f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x$.
 - C. Tentukan integral tentu dengan sifat-sifatnya.
2. Hitunglah $\int_{-3}^4 |x + 2| dx$.
3. Tunjukkan bahwa $\int_3^{-1} f(x)dx + \int_4^3 f(x)dx + \int_{-3}^4 f(x)dx + \int_{-1}^{-3} f(x)dx = 0$.
4. Hitunglah $\int_4^{16} \left[\frac{d}{dx} \int_5^x (2\sqrt{t} - 1) dt \right] dx$.
5. Seorang kolektor benda-benda seni membeli sebuah lukisan dari seorang seniman seharga Rp15.000.000,00. Nilainya sekarang bertambah terhadap waktu yang dinyatakan dengan $\frac{dV}{dt} = 5t^{\frac{3}{2}} + 10t + 50$. Nilai V dalam rupiah yang diharapkan dari sebuah lukisan setelah t tahun pembelian. Jika $\frac{dV}{dt}$ berlaku untuk 6 tahun kemudian, tentukan harga dari lukisan tersebut 4 tahun kemudian.
6. Sebuah tangki berbentuk kerucut yang puncaknya di bawah dengan tinggi 10 m dan jari-jari 4 m. Kerucut tersebut diisi air setinggi 8 m. Temukan usaha yang diperlukan untuk mengosongkan tangki dengan memompa semua air ke bagian atas tangki. (Kerapatan air adalah 1.000 kg/m.)

Pengayaan

Untuk memperdalam pemahaman mengenai materi yang telah dipelajari, kamu dapat mengerjakan soal-soal berikut dengan cermat. Jika menemui kesulitan, coba mengingat kembali konsep dasar materi atau mendiskusikannya bersama teman.

A. Integral Tak Tentu

Kamu dapat mengerjakan soal-soal yang berkaitan dengan integral tak tentu berikut ini.

1. Tentukan hasil dari:

a. $\int x dx$

b. $\int 5x^2 dx$

2. Hitunglah hasil dari:

a. $\int (2x + 4)dx$

b. $\int (7x^3 - 3x + 2)dx$

3. Tentukan fungsi asal dari setiap turunan berikut.

a. $f'(x) = 2x + 1$

b. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 7$

4. Laju pertumbuhan tanaman dinyatakan dalam fungsi $f'(t) = 6t$, dengan t adalah hari ke- t .

a. Tentukan fungsi tinggi tanaman $f(t)$.

b. Jika tinggi awal tanaman saat $t = 0$ adalah 2 cm, tentukan $f(t)$.

c. Hitung tinggi tanaman setelah 5 hari.

B. Integral Tentu

Kamu dapat mengerjakan soal-soal yang berkaitan dengan integral tentu berikut ini.

5. Hitunglah nilai dari:

a. $\int_1^3 x \, dx$

b. $\int_0^2 (2x + 1)dx$

6. Tentukan hasil dari:

a. $\int_1^4 (x^2 + 2x)dx$

b. $\int_0^3 (3x^2 - x + 2)dx$

7. Laju konsumsi air suatu keluarga dinyatakan dengan fungsi $f'(x) = (2x + 1)$ liter per hari, x adalah hari.

a. Hitung total konsumsi air dari hari ke-1 hingga hari ke-5.

b. Apa arti hasil dari integral tersebut dalam konteks kehidupan nyata?

C. Penerapan Integral

Kamu dapat mengerjakan soal-soal penerapan integral berikut ini.

8. Seorang pendaki mencatat bahwa kecepatannya mendaki gunung (dalam km/jam) mengikuti fungsi $v(t) = -2t + 10$, dengan t adalah waktu dalam jam sejak pendakian dimulai. Namun setelah 5 jam, pendaki tersebut berhenti total karena kehabisan tenaga.

a. Hitunglah total jarak yang telah ditempuh selama 5 jam pendakian.

b. Jika kamu adalah pelatih pendaki tersebut, apa saran yang bisa kamu berikan berdasarkan hasil perhitungan tersebut?

9. Seorang ibu membuat kue tradisional setiap minggu. Biaya tambahan produksi per minggu mengikuti fungsi $f'(x) = 0,5x^2 - 2x + 3$, dengan x adalah minggu ke- x dan biaya dalam ratusan ribu rupiah.
- Tentukan fungsi biaya total $f(x)$ jika biaya awal pada minggu pertama adalah 400 ribu rupiah.
 - Hitunglah total biaya produksi dari minggu ke-1 hingga minggu ke-4.
 - Pada minggu keberapa biaya tambahan paling rendah terjadi? Apa artinya dalam konteks usaha?
10. Diketahui sebuah fungsi $f(x)$ tidak diketahui secara eksplisit. Adapun informasi yang diketahui sebagai berikut:
- ▶ turunan dari fungsi tersebut adalah $f'(x) = 3x^2 - 6x$,
 - ▶ $f(1) = 4$.
- Temukan bentuk umum dari fungsi $f(x)$.
 - Gambarkan kurvanya.
 - Apakah ada titik ekstrem (maksimum/minimum)? Jelaskan secara matematis dan visual.
11. Sebuah logo rumah makan dirancang dengan bentuk bidang di bawah kurva $y = 6 - x^2$ dan dibatasi oleh sumbu- x , garis $x = 2$, dan garis $x = -2$.
- Hitunglah luas daerah yang akan dijadikan pola logo.
 - Jika biaya cetaknya Rp2.500,00 per cm^2 , berapa total biaya pembuatan satu logo?
 - Misalkan logo ingin dibuat lebih ramping, yaitu $x = 1,25$ dan $x = -1,25$. Berapa persen pengurangan luasnya jika dibandingkan dengan desain awal?

D. Proyek berikut dikerjakan secara berkelompok.

Proyek Penguatan Kompetensi Lulusan

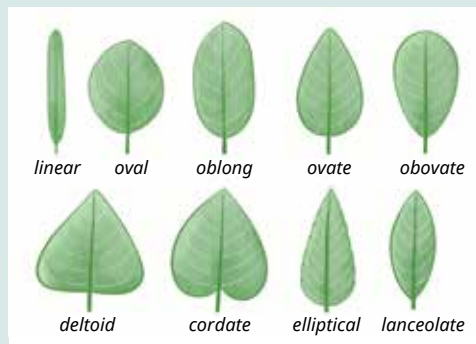
Tema : Menentukan Luas dengan Integral

Tujuan Proyek :

1. Siswa dapat memaknai dan mengimplementasikan konsep integral dalam memecahkan masalah kontekstual.
2. Siswa dapat memaknai dan mengimplementasikan sikap gotong royong dalam kehidupan sehari-hari sebagai perwujudan pengamalan nilai-nilai Pancasila.
3. Siswa memiliki sikap kritis dan kreatif, yaitu mampu memodifikasi dan menghasilkan sesuatu yang orisinal, bermakna, dan bermanfaat.

Langkah-langkah:

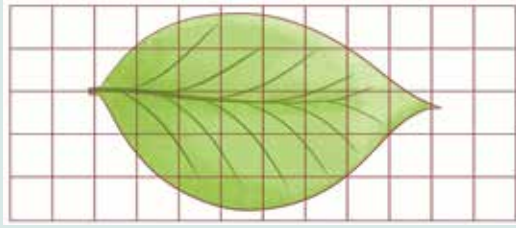
1. Bentuklah kelompok yang beranggotakan 4 atau 5 siswa.
2. Siapkan kertas berpetak, penggaris, pensil, dan daun. Gunakan salah satu daun dengan bentuk berikut.



Gambar 3.26 Bentuk-Bentuk Daun

Cara kerja:

- a. Buatlah koordinat Kartesius pada kertas berpetak.
- b. Jiplaklah daun pada kertas berpetak di kuadran I.



Gambar 3.27 Contoh Hasil Menjiplak

- c. Tentukan dua fungsi yang terbentuk dari dua kurva (pinggiran daun).
- d. Hitunglah luas daun pada kertas berpetak.
- e. Hitunglah luas daun dengan menggunakan teknik integral untuk menghitung luas.

Hasil yang diperoleh:

1. Diskusikan dengan kelompok masing-masing hasil yang diperoleh dari aktivitas d dan e.
2. Presentasikan hasil tersebut di kelas.

Refleksi

Kamu telah belajar tentang integral tak tentu dan integral tentu beserta aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari dan ilmu pengetahuan lainnya. Sebagai bahan perenungan, jawablah setiap pertanyaan berikut sesuai dengan pengalaman belajarmu.

1. Bagaimana perasaanmu setelah mempelajari integral? Apakah kamu merasa lebih tertantang atau semakin percaya diri dengan kemampuan matematikamu?
2. Menurutmu, apa manfaat utama mempelajari integral, baik dalam pelajaran matematika maupun dalam kehidupan sehari-hari?

Bab 4

Analisis Data dan Peluang



Bagaimana membedakan variabel acak, memilih distribusi peluang yang sesuai, dan menggunakan fungsi peluang dalam pengambilan keputusan?

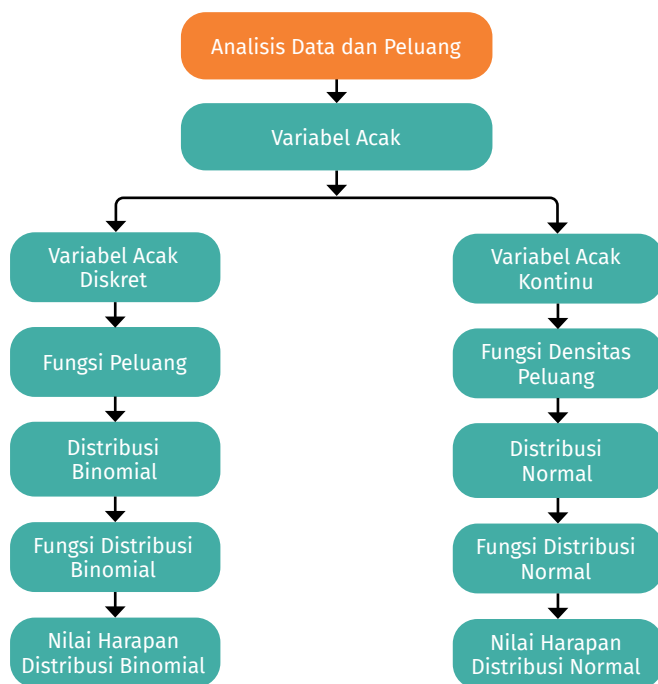
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan untuk mengevaluasi hasil keputusan menggunakan distribusi binomial dan distribusi normal.

Kata Kunci

- ▶ variabel acak
- ▶ fungsi peluang
- ▶ distribusi binomial
- ▶ distribusi normal
- ▶ nilai harapan

Peta Konsep



Pernahkah kamu bertanya-tanya bagaimana perusahaan teknologi memprediksi iklan mana yang akan kamu sukai? Atau, seperti pada Gambar 4.1, bagaimana cuaca bisa diperkirakan jauh-jauh hari sebelumnya? Semua itu tak lepas dari kemampuan manusia dalam membaca data, menganalisis data, dan memperkirakan peluang dari berbagai kemungkinan yang akan terjadi.



Gambar 4.1 Analisis data dan peluang digunakan dalam prakiraan cuaca.

Di dunia yang penuh dengan data, kemampuan untuk memahami dan menginterpretasikan informasi menjadi sangat penting. Analisis data tidak hanya berhenti pada tahap mengumpulkan dan menyajikan data, tetapi juga mencakup bagaimana kita memahami pola yang muncul dan memperkirakan kemungkinan kejadian di masa depan berdasarkan data tersebut. Di sinilah konsep analisis data dan peluang berperan penting.

Dalam bab “Analisis Data dan Peluang” ini, kita akan mempelajari bagaimana variabel acak digunakan untuk merepresentasikan hasil dari kejadian yang tidak pasti, baik yang bersifat diskret maupun kontinu.

Setiap variabel acak memiliki model matematis: fungsi peluang untuk data diskret dan fungsi densitas peluang untuk data kontinu. Fungsi tersebut menggambarkan seberapa besar kemungkinan suatu nilai muncul.

Misalnya, distribusi binomial cocok digunakan untuk memodelkan kejadian diskret dengan dua hasil, seperti sukses atau gagal, dalam suatu percobaan. Sementara itu, distribusi normal sering digunakan untuk memodelkan data kontinu yang tersebar secara simetris di sekitar nilai tengah, seperti tinggi badan dalam suatu populasi.

Melalui pemahaman yang mendalam terhadap materi ini, kita akan lebih siap menghadapi tantangan dunia nyata yang penuh dengan ketidakpastian, dengan pendekatan logis dan berbasis data.

A. Variabel Acak

Diskusikan dengan teman sebangkumu. Dari keempat pernyataan berikut, manakah yang memiliki variabel?

1. Bilangan prima kurang dari 10.
2. Semarang adalah ibu kota Jawa Tengah.
3. Pelemparan dua mata dadu seimbang berjumlah 6.
4. Tinggi badan siswa kelas X kurang dari 170 cm.

Variabel merupakan suatu besaran yang memiliki nilai tidak tunggal. Variabel yang nilainya ditentukan melalui percobaan acak disebut variabel acak. *Variabel acak* adalah fungsi yang memetakan setiap hasil dari percobaan acak ke bilangan real, menggambarkan nilai yang mungkin terjadi dalam suatu eksperimen acak. Sebaliknya, variabel yang nilainya tidak bergantung pada hasil percobaan acak disebut *variabel tidak acak*. Ayo, kita pelajari lebih lanjut tentang variabel acak.



Ayo Bereksplorasi 4.1



Gambar 4.2 Permainan Monopoli Digital

Monopoli adalah salah satu permainan papan klasik yang kini banyak dimainkan secara daring. Tujuan permainan ini adalah menguasai semua petak di atas papan melalui pembelian, penyewaan, dan pertukaran properti dalam sistem ekonomi yang disederhanakan. Permainan tersebut, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.2, menggunakan dua buah dadu

untuk menentukan berapa langkah bidak harus berpindah. Setiap pemain melemparkan dadu secara bergiliran untuk memindahkan bidaknya.

Misalkan Aldo dan seorang temannya bermain monopoli digital pada ponsel pintar (*smartphone*). Apabila dua dadu yang dilempar Aldo menunjukkan mata dadu yang sama atau kembar, ia berhak bermain lagi atau melempar dadu kembali. Berapa, ya, peluang Aldo memperoleh mata dadu yang sama?

 Ayo Berdiskusi

Pahamilah persoalan pada Ayo Bereksplorasi 4.1, kemudian diskusikan dengan teman sebangkumu pertanyaan berikut.

1. Dari permasalahan di atas, apakah kalian menemukan variabelnya?
2. Dapatkah kalian menyebutkan variabel tersebut?

Mari, kalian menyiapkan dua buah dadu seimbang. Cobalah melemparkan kedua dadu tersebut. Tulislah semua kemungkinan hasil dalam ruang sampel S dengan melengkapi Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Taksiran Pasangan Mata Dadu yang Muncul dari Pelemparan Dua Mata Dadu

Pelemparan Dua Dadu		Dadu II					
Muncul Mata Dadu Kembar		1	2	3	4	5	6
Dadu I	1	(1, 1)	...	(1, 3)	...	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	...	(2, 4)	(2, 5)	...
	3	...	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	...	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	...	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	...	(5, 3)	(5, 4)	...	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	...	(6, 4)	(6, 5)	...

Ruang sampel adalah himpunan dari semua hasil yang mungkin terjadi dalam suatu percobaan acak. Dari percobaan pada Ayo Berdiskusi di atas, kita memperoleh ruang sampel berikut:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots, (6, 6)\}.$$

Banyaknya anggota dalam ruang sampel ditulis $n(S)$. Artinya, $n(S)$ adalah jumlah seluruh elemen dalam ruang sampel S . Dengan demikian, $n(S) = 36$, yang artinya banyaknya anggota dalam ruang sampel S adalah 36.

Dalam Ayo Bereksplorasi 4.1, informasi yang diperlukan adalah pasangan muncul mata dadu kembar, yaitu angka yang sama pada kedua dadu. Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan muncul mata dadu kembar pada pelemparan dua dadu seimbang.

1. X akan dianggap bernilai ... jika hasil pelemparan bukan pasangan mata dadu kembar sebagai berikut.

(...), (...), (1, 4), (1, 5), (...),
(2, 1), (...), (2, 4), (2, 5), (...),
(3, 1), (3, 2), (...), (3, 5), (3, 6),
(...), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (...),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (...), (...),
(6, 1), (...), (6, 3), (...), (6, 5)

2. X akan bernilai 1 jika hasil pelemparan merupakan pasangan mata dadu kembar, yaitu (1, 1), (...), (...), (4, 4), ..., dan (6, 6) terjadi.



Ayo Mengomunikasikan

Sajikan hasil diskusi kalian pada kegiatan Ayo Berdiskusi di depan kelas. Selanjutnya, diskusikan dengan teman lainnya untuk mendapatkan jawaban yang benar.

Pada Ayo Bereksplorasi 4.1, X merupakan variabel karena bisa dianggap memiliki nilai-nilai berbeda, yaitu 0 dan 1. Variabel X ini disebut variabel acak (*random variable*) karena nilai-nilainya bergantung pada hasil yang terjadi dalam percobaan acak.

Variabel acak biasanya dinyatakan dengan huruf kapital, seperti X , Y , dan Z . Namun, nilai-nilai variabel acak ini dinyatakan dengan huruf kecil, seperti x , y , dan z .

Definisi 4.1

Variabel acak ialah suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel.

Misalkan $X: S \rightarrow R$

$$e \rightarrow X(e) = x$$

disebut variabel acak.

Contoh Soal 4.1

Sekeping uang logam seimbang seperti pada Gambar 4.3, dilempar tiga kali. Jika X menyatakan banyaknya sisi angka yang muncul, tentukan semua nilai x yang mungkin dari variabel acak X .

Alternatif penyelesaian:

Ruang sampel dari percobaan pelemparan uang logam sebanyak tiga kali dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S = \{AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, GGG\}.$$

Dalam ruang sampel tersebut, “A” menyatakan sisi angka dan “G” menyatakan sisi gambar yang muncul. Setiap elemen dalam ruang sampel menunjukkan urutan hasil dari tiga pelemparan. Variabel X menyatakan banyaknya sisi angka (A) yang muncul dalam setiap hasil. Tabel 4.2 berikut menunjukkan korespondensi antara elemen ruang sampel dan nilai x yang bersesuaian.



Gambar 4.3 Mata Uang Logam

Tabel 4.2 Taksiran Angka yang Muncul pada Uang Logam

Hasil Lemparan	x
GGG	0
AGG, GAG, GGA	1
AAG, AGA, GAA	2
AAA	3

Jadi, himpunan semua nilai yang mungkin dari variabel acak X adalah $\{0, 1, 2, 3\}$.

Contoh Soal 4.2

Pak Bambang dan istrinya merencanakan memiliki dua anak. Jika variabel Y menyatakan banyaknya anak perempuan, tentukan semua nilai y yang mungkin dari variabel acak Y .

Alternatif penyelesaian:

Ruang sampel dari kemungkinan jenis kelamin kedua anak tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S = \{PP, PL, LP, LL\}.$$

Dalam ruang sampel tersebut, “P” menyatakan anak perempuan dan “L” menyatakan anak laki-laki. Setiap elemen dalam ruang sampel menunjukkan urutan kelahiran dua anak. Variabel Y menyatakan banyaknya anak perempuan (P) dalam setiap hasil. Tabel 4.3 berikut menunjukkan korespondensi antara elemen ruang sampel dan nilai y yang bersesuaian.

Tabel 4.3 Taksiran Anak Perempuan yang Lahir

Hasil Kelahiran	y
LL	0
PL, LP	1
PP	2

Jadi, himpunan semua nilai yang mungkin dari variabel acak Y adalah $\{0, 1, 2\}$.



Ayo Mencoba 4.1

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

Sebuah kotak berisi 5 bola merah dan 6 bola putih seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.4. Diambil sebanyak 4 bola satu per satu tanpa pengembalian. Jika Z menyatakan banyaknya bola putih yang terambil, tentukan nilai z yang mungkin dari variabel acak Z .



Gambar 4.4 Bola Merah dan Bola Putih di Dalam Kotak

Alternatif penyelesaian:

Ruang sampel dari pengambilan 4 bola tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S = \{\text{MMMM, MMMP, ..., PMMM, MMPP, ..., MPPM, ..., MPPP, ..., PPPP}\}.$$

Dalam ruang sampel tersebut, “M” menyatakan bola merah dan “P” menyatakan bola putih yang terambil. Setiap elemen dalam ruang sampel menunjukkan urutan terambilnya bola. Variabel Z menyatakan banyaknya bola putih yang terambil. Tabel 4.4 berikut menunjukkan korespondensi antara elemen ruang sampel dan nilai z yang bersesuaian.

Tabel 4.4 Taksiran Bola Putih yang Terambil

Hasil Pengambilan Bola	z
MMMM	0
MMMP, ..., PMMM	...
MMPP, ..., MPPM, ..., ...	...
MPPP, ..., ...	3
PPPP	...

Jadi, himpunan semua nilai yang mungkin dari variabel acak Z adalah $\{0, ..., ..., ... \}$.

Latihan Soal Variabel Acak

Selesaikan soal-soal berikut dengan benar.

- Seorang teknisi sepeda motor sedang melakukan pemeriksaan terhadap tiga suku cadang busi motor. Hasil pengamatan dikategorikan dalam suku cadang busi ‘baik’ dan ‘cacat’. X adalah variabel acak yang menyatakan banyak busi cacat. Tentukan nilai x yang mungkin dari variabel acak X .
- Dari 5 mobil yang dikirim sebuah pabrik, sebanyak 2 mobil tiba dalam keadaan tergores. Sebuah toko menerima 3 mobil secara acak. Misalkan T menyatakan ruang sampel, G untuk kondisi mobil “tergores”, dan B untuk kondisi mobil yang “baik”. Variabel acak X menyatakan banyak mobil terkena goresan yang diterima oleh toko tersebut. Tentukan nilai x yang mungkin dari variabel acak X .

B. Variabel Acak Diskret

Pada kegiatan Ayo Bereksplorasi 4.2 ini, kamu akan mengeksplorasi data hasil suatu percobaan yang nilainya dapat dihitung satu per satu dan diperoleh dari suatu kejadian acak. Kamu dapat memperhatikan situasinya secara saksama.



Ayo Bereksplorasi 4.2



Gambar 4.5 Kesalahan pada Pengetikan Kata

Dalam sebuah lomba mengetik cepat, setiap peserta menerima teks sepanjang 100 kata. Mereka diminta mengetik ulang teks tersebut dalam kurun waktu tertentu. Setelah lomba berakhir, panitia mencatat banyaknya kesalahan ketik dari setiap peserta. Disimpulkan bahwa sebagian peserta tidak melakukan kesalahan sama sekali. Beberapa peserta melakukan 1 atau 2 kesalahan, tetapi ada pula peserta yang membuat lebih dari 5 kesalahan.

Berdasarkan situasi tersebut, kamu dapat menjawab pertanyaan berikut.

- Apakah banyaknya kesalahan ketik setiap peserta dapat dipastikan sebelumnya?
- Mengapa banyaknya kesalahan ketik antarpeserta bisa berbeda-beda?
- Apakah kita dapat menghitung semua kemungkinan banyak kesalahan ketik yang terjadi?

Permasalahan pada Ayo Bereksplorasi 4.2 merupakan contoh percobaan acak. Banyaknya kesalahan ketik dapat dinyatakan sebagai variabel acak diskret karena

- ▶ nilainya ditentukan melalui percobaan (lomba mengetik);
- ▶ hasilnya berbentuk bilangan bulat non-negatif, seperti 0, 1, 2, dan 3; serta
- ▶ semua kemungkinan nilainya dapat dihitung satu per satu.



Ayo Berdiskusi

Perhatikan variabel acak berikut.

- ▶ Bilangan asli antara 5 dan 20
- ▶ Berat badan siswa SMA Maju Bersama kelas XII
- ▶ Bilangan bulat kurang dari 7
- ▶ Usia penduduk Desa Suka Makmur
- ▶ Banyak kesalahan pengetikan
- ▶ Muncul mata dadu ganjil dalam pelemparan sebuah dadu

Identifikasilah variabel acak di atas, kemudian berdiskusilah untuk menjawab setiap pertanyaan berikut ini.

1. Apakah semua nilai variabel acak di atas dapat dihitung (*countable*)?
2. Jika tidak, mana saja nilai variabel acak yang tak terhitung (*uncountable*)?
3. Apakah semua ruang sampel variabel acak di atas merupakan himpunan berhingga (*finite*)?
4. Adakah ruang sampel variabel acak di atas yang tak berhingga (*infinite*)?
5. Dapatkah kalian menyebutkan variabel mana saja yang termasuk ruang sampel himpunan berhingga dan tak berhingga?



Ayo Mengomunikasikan

Kalian dapat menyajikan hasil diskusi pada kegiatan Ayo Berdiskusi di depan kelas. Selanjutnya, diskusikan dengan teman sekelas lainnya untuk mendapatkan jawaban yang benar.

Jika ruang sampel memuat elemen-elemen yang jumlahnya hingga (*finite*) atau tak hingga (*infinite*), namun dapat dihitung satu per satu (sebanyak

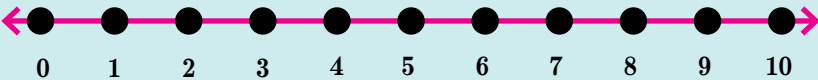
bilangan bulat), ruang sampel itu disebut *ruang sampel diskret*. Variabel acak yang didefinisikan pada ruang sampel diskret disebut *variabel acak diskret*.

Definisi 4.2

Jika ruang sampel dari variabel acak X merupakan himpunan berhingga (*finite*) atau himpunan tak berhingga (*infinite*) yang dapat dihitung satu per satu (*countable*), maka x disebut *variabel acak diskret*.

Ciri-Ciri Variabel Acak Diskret

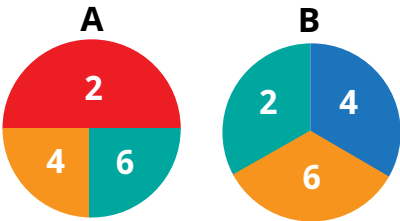
- ▶ Nilainya diperoleh dari hasil menghitung atau membilang.
- ▶ Nilainya berupa bilangan bulat.
- ▶ Hasilnya dapat direpresentasikan berupa titik-titik terpisah pada garis bilangan.



Gambar 4.6 Representasi Variabel Acak Diskret pada Garis Bilangan

Contoh Soal 4.3

Pada permainan papan angka berputar, seperti pada Gambar 4.7, setiap papan diputar satu kali. Misalkan variabel acak X menyatakan angka terpilih dari papan A. Variabel acak Y menyatakan angka terpilih dari papan B. Tunjukkan bahwa $Z = X + Y$ adalah variabel acak diskret.



Gambar 4.7 Papan Putar Angka

Alternatif penyelesaian:

Papan A terdiri atas tiga sektor angka: 2, 4, dan 6. Luas sektor bernomor 4 dan 6 masing-masing setengah dari sektor bernomor 2. Dengan demikian, peluang setiap sektor dapat ditentukan berdasarkan proporsi luasnya.

- ▶ $P(A = 2) = \frac{2}{4}.$
- ▶ $P(A = 4) = \frac{1}{4}.$
- ▶ $P(A = 6) = \frac{1}{4}.$

Sementara itu, papan B terdiri atas sektor yang sama besar sehingga

$$P(B = 2) = P(B = 4) = P(B = 6) = \frac{1}{3}.$$

Variabel $Z = X + Y$, menyatakan jumlah angka yang diperoleh dari papan A dan papan B. Untuk mengetahui nilai-nilai yang mungkin dari Z beserta peluangnya, kita tentukan pasangan nilai (X, Y) yang mungkin pada Tabel 4.5, kemudian menghitung peluangnya.

Tabel 4.5 Taksiran Pasangan Angka yang Terpilih (Muncul)

$Z = X + Y$	$Z = z$	Peluang $P(Z = z)$
$4 = 2 + 2$	(A2, B2)	$\frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$
$6 = 2 + 4$ $= 4 + 2$	(A2, B4), (A4, B2)	$\left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{12}$
$8 = 2 + 6$ $= 6 + 2$ $= 4 + 4$	(A2, B6), (A6, B2), (A4, B4)	$\left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{12}$
$10 = 4 + 6$ $= 6 + 4$	(A4, B6), (A6, B4)	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{12}$
$12 = 6 + 6$	(A6, B6)	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Jika kita menjumlahkan semua nilai peluang pada Tabel 4.5, diperoleh

$$\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = 1.$$

Hal ini menunjukkan beberapa hal berikut.

- ▶ Z memiliki nilai-nilai yang dapat dihitung satu per satu: $\{4, 6, 8, 10, 12\}$.
- ▶ Setiap nilai tersebut memiliki peluang tertentu yang jika dijumlahkan, hasilnya adalah 1.
- ▶ Dengan demikian, $Z = X + Y$ merupakan variabel acak diskret karena hasilnya berupa bilangan diskret yang dapat dihitung satu per satu dengan peluang terdefinisi.



Ayo Mengingat Kembali

Peluang Suatu Kejadian

Peluang kejadian A , dinotasikan $P(A)$, dapat ditentukan menggunakan rumus:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan

- $n(A)$ menyatakan banyak anggota kejadian A ,
- $n(S)$ menyatakan banyak anggota ruang sampel S .

Contoh Soal 4.4

Pada sebuah eksperimen melempar sekeping uang logam dua kali, misalkan variabel acak X menyatakan banyaknya kejadian munculnya sisi A (Angka). Tunjukkanlah bahwa X adalah suatu variabel acak diskret.

Alternatif penyelesaian:

Ruang sampel pada pelemparan uang logam dua kali dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S = \{AA, AG, GA, GG\}.$$

Dalam ruang sampel tersebut, “A” menyatakan sisi angka dan “G” menyatakan sisi gambar yang muncul. Setiap elemen dalam ruang sampel menunjukkan urutan hasil dari dua pelemparan. Variabel X menyatakan banyaknya sisi angka (A) yang muncul. Tabel 4.6 berikut menunjukkan nilai-nilai x yang mungkin dan peluang kemunculannya.

Tabel 4.6 Taksiran Pasangan Sisi Mata Uang yang Muncul

X	$X = x$	Peluang $P(X = x)$
0	GG	$\frac{1}{4}$
1	AG, GA	$\frac{2}{4}$
2	AA	$\frac{1}{4}$

Jika kita menjumlahkan semua nilai peluang pada Tabel 4.6, diperoleh

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Hal ini menunjukkan beberapa hal berikut.

- ▶ X memiliki nilai-nilai yang dapat dihitung satu per satu: $\{0, 1, 2\}$.
- ▶ Setiap nilai tersebut memiliki peluang tertentu yang jika dijumlahkan, hasilnya adalah 1.
- ▶ Dengan demikian, X merupakan variabel acak diskret karena hasilnya berupa bilangan diskret yang dapat dihitung satu per satu dengan peluang terdefinisi.



Ayo Mencoba 4.2

Selesaikan soal berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Pada Contoh Soal 4.3, tunjukkan bahwa $Z = X - Y$ adalah suatu variabel acak diskret.

Alternatif penyelesaian:

Kamu dapat memperhatikan kembali papan A pada Gambar 4.7. Papan A terdiri atas tiga sektor angka: 2, 4, dan 6. Luas sektor bernomor 4 dan 6 masing-masing setengah dari sektor bernomor 2. Dengan demikian, peluang setiap sektor dapat ditentukan berdasarkan proporsi luasnya.

- ▶ $P(A = 2) = \frac{2}{4}.$
- ▶ $P(A = 4) = \frac{1}{4}.$
- ▶ $P(A = 6) = \frac{1}{4}.$

Sementara itu, papan B terdiri atas tiga sektor yang sama besar sehingga

$$P(B = 2) = P(B = 4) = P(B = 6) = \frac{1}{3}.$$

Variabel $Z = X - Y$, menyatakan selisih angka yang diperoleh dari papan A dan papan B. Untuk mengetahui nilai-nilai yang mungkin dari Z beserta peluangnya, kita tentukan tabel pasangan nilai (X, Y) yang mungkin pada Tabel 4.7, kemudian menghitung peluangnya. (Kamu dapat menyalin dan melengkapi tabel berikut.)

Tabel 4.7 Taksiran Pasangan Angka yang Terpilih (Muncul)

$Z = X - Y$	$Z = z$	Peluang $P(Z = z)$
$0 = 2 - 2$ $= \dots - \dots$ $= \dots - \dots$	(A2, B2), (...), (...), (A6, B6)	$\left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \dots\right) + \left(\dots \times \frac{1}{3}\right) = \frac{\dots}{12}$
$\dots = 4 - 2$ $= \dots$	(...), (...), (A6, B4)	$\left(\dots \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \dots\right) = \frac{2}{\dots}$
$4 = \dots$	(A6, ...)	$\left(\dots \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$
$-2 = 2 - 4$ $= \dots$	(A2, B4), (...), (...)	$\left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{3}\right) + (\dots \times \dots) = \frac{3}{12}$
$\dots = 2 - 6$	(A2, B6)	$\frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \dots$

Jika kita menjumlahkan nilai semua peluang pada Tabel 4.7, diperoleh

$$\frac{4}{12} + \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

Hal ini menunjukkan beberapa hal berikut.

- ▶ Z memiliki nilai-nilai yang dapat dihitung satu per satu: $\{0, \dots, \dots, \dots, \dots\}$.
- ▶ Setiap nilai tersebut memiliki peluang tertentu yang jika dijumlahkan, hasilnya adalah
- ▶ Dengan demikian, $Z = X - Y$ merupakan variabel acak diskret karena hasilnya berupa bilangan diskret yang dapat dihitung satu per satu dengan peluang terdefinisi.

Latihan Soal Variabel Acak Diskret

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar.

- Manakah dari variabel acak berikut yang merupakan variabel acak diskret? Berikan tanda ✓ pada kolom **B** atau **S**.

Variabel Acak	B	S
Produksi gabah per hektar	...	...
Jumlah penduduk perempuan di kota B	...	...
Berat badan siswa SMA Maju Jaya	...	...

Variabel Acak	B	S
Produksi sepatu olahraga pabrik Niko per hari	...	...
Berat bagasi penumpang pesawat	...	...

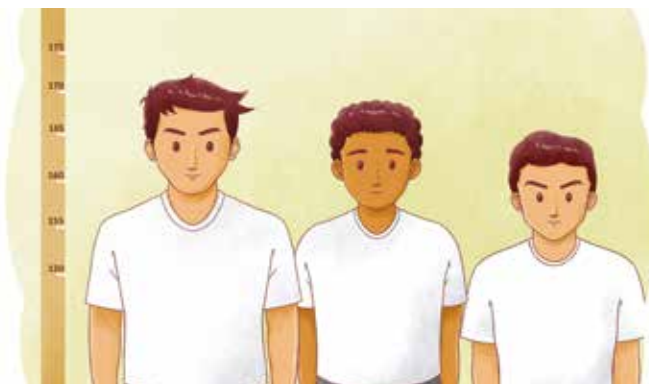
2. Misalkan dilakukan sebuah percobaan melempar dua buah dadu seimbang.
 - a. Tentukan ruang sampelnya.
 - b. Jika variabel X menyatakan jumlah mata dadu, tentukan nilai-nilai dari variabel X .
 - c. Tunjukkan bahwa X adalah suatu variabel acak diskret.

C. Variabel Acak Kontinu

Pada kegiatan Ayo Bereksplorasi 4.3 ini, kamu akan mengamati data hasil pengukuran tinggi badan dengan nilai-nilai yang sangat bervariasi dan tersebar dalam suatu rentang. Kamu dapat memperhatikan situasinya secara saksama.



Ayo Bereksplorasi 4.3



Gambar 4.8 Pengukuran Tinggi Badan Siswa

Seorang siswa bernama Aidan sedang mengikuti pengukuran tinggi badan untuk mempersiapkan diri mengikuti seleksi masuk AKMIL, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 4.8. Salah satu syarat utamanya adalah tinggi badan minimal 165 cm. Aidan mencatat tinggi badan teman-temannya yang

juga akan mendaftar AKMIL. Ternyata tinggi badan mereka sangat bervariasi, yaitu 162,4 cm; 165,0 cm; 167,8 cm; bahkan ada yang 170,3 cm.

- ▶ Apakah tinggi badan seseorang bisa dinyatakan dalam nilai seperti 165,2 cm atau 164,7 cm?
- ▶ Apakah tinggi badan bisa dihitung satu per satu seperti bilangan bulat?
- ▶ Apakah mungkin tinggi badan dua orang memiliki beda hanya dalam satuan milimeter?
- ▶ Apakah banyaknya kemungkinan nilai tinggi badan dapat dihitung secara pasti?

Persoalan pengukuran tinggi badan merupakan percobaan acak. Nilai tinggi badan dapat berada di antara dua bilangan real, misalnya antara 160 dan 161 cm. Tinggi badan merupakan contoh variabel acak kontinu karena hasil pengukurannya bisa berupa bilangan desimal dalam rentang tertentu dan tidak dapat dihitung satu per satu (*uncountable*).



Ayo Berdiskusi

Perhatikan variabel acak berikut.

- ▶ Waktu tempuh lari 100 meter
- ▶ Banyak siswa yang hadir di kelas
- ▶ Volume air dalam gelas
- ▶ Banyak soal yang dijawab benar pada ujian matematika
- ▶ Berat badan siswa kelas XII

Identifikasilah variabel acak di atas, kemudian berdiskusilah untuk menjawab setiap pertanyaan berikut ini.

1. Manakah dari variabel-variabel di atas yang memiliki nilai tak terhingga banyaknya dalam suatu rentang?
2. Apakah nilai-nilai variabel tersebut dapat dinyatakan dalam bilangan pecahan atau desimal?
3. Mengapa nilai-nilai tersebut tidak dapat dihitung satu per satu?



Ayo Mengomunikasikan

Kalian dapat menyajikan hasil diskusi pada kegiatan Ayo Berdiskusi di depan kelas. Selanjutnya, diskusikan dengan teman sekelas lainnya untuk mendapatkan jawaban yang benar.

Jika ruang sampel suatu percobaan acak terdiri atas titik-titik hasil yang tak berhingga banyaknya dan tidak dapat dihitung satu per satu, ruang sampel itu disebut *ruang sampel kontinu*. Variabel acak yang didefinisikan pada ruang sampel kontinu disebut *variabel acak kontinu*.

Definisi 4.3

Jika ruang sampel dari variabel acak X berupa himpunan berhingga atau tak berhingga, tetapi tak terhitung (*uncountable*), maka X disebut *variabel acak kontinu*.

Ciri-Ciri Variabel Acak Kontinu

Nilainya diperoleh dari hasil pengukuran, seperti pengukuran tinggi badan, waktu, atau suhu.

- Nilainya berupa bilangan real yang membentuk rentang tak terputus. Dengan demikian, antara dua nilai tertentu selalu terdapat kemungkinan terdapat nilai lain yang masih termasuk dalam variabel tersebut.
- Hasilnya dapat direpresentasikan berupa deretan titik yang terhubung dan membentuk garis pada garis bilangan.



Gambar 4.9 Representasi Variabel Acak Kontinu pada Garis Bilangan

Contoh Soal 4.5

Sebuah mesin pengisi air mineral otomatis digunakan untuk mengisi botol 600 ml. Karena sifat pengisian yang tidak selalu tepat, volume air yang terisi dalam setiap botol bisa bervariasi, dari 595 ml hingga 605 ml. Misalkan X menyatakan volume air dalam suatu botol yang diisi oleh mesin tersebut. Apakah X merupakan variabel acak kontinu?

Alternatif penyelesaian:

Volume air dalam satu botol ditentukan melalui proses pengukuran. Nilainya dari 595 ml hingga 605 ml, artinya antara kedua volume tersebut, selalu mungkin ada volume lain, misalnya 597,2 ml. Dengan demikian, nilai-nilai dari X membentuk suatu interval kontinu dalam bilangan real. Ruang hasil dari variabel acak X dapat ditulis

$$Rx = \{x | 595 \leq x \leq 605\}.$$

Karena Rx mencakup semua bilangan real dalam suatu rentang dan tidak dapat dihitung satu per satu, maka X merupakan variabel acak kontinu.



Ayo Mencoba 4.3

Selesaikan persoalan berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

Dalam sebuah lomba lari 100 meter, waktu tempuh setiap pelari dicatat (dalam detik), seperti yang diilustrasikan pada Gambar 4.10. Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan waktu tempuh lari dan waktu tempuh berada pada rentang 13,5 detik hingga 15,4 detik.



Gambar 4.10 Penghitungan Waktu pada Lomba Lari

- Tuliskan empat contoh nilai waktu tempuh yang mungkin muncul, misalnya 13,7 detik; ... detik; ... detik; dan ... detik.
- Buatlah taksiran bentuk ruang sampel dari variabel acak waktu tempuh lari tersebut. Ruang sampel dapat ditulis sebagai rentang waktu:

$$S = \{x | \dots \leq x \leq \dots, x \in R\}.$$

- c. Apakah semua nilai dalam ruang sampel tersebut dapat dihitung satu per satu? Jelaskan alasanmu.
- d. Berdasarkan jawabanmu, variabel acak X termasuk jenis variabel acak ... karena

Latihan Soal Variabel Acak Kontinu

Selesaikan persoalan berikut ini.

Pada musim kemarau suhu udara harian di sebuah kota berkisar dari $25,5^{\circ}\text{C}$ hingga 30°C . Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan suhu udara harian dalam derajat Celsius.

- a. Tuliskan empat contoh besar suhu udara harian yang mungkin muncul dalam pengamatan harian tersebut.
- b. Buatlah taksiran bentuk ruang sampel dari variabel acak suhu harian tersebut.
- c. Apakah semua nilai dalam ruang sampel tersebut dapat dihitung satu per satu? Jelaskan alasanmu.

D. Fungsi Peluang

Pelemparan uang logam merupakan contoh sederhana dari percobaan acak. Pada kegiatan ini kamu akan mengeksplorasi pola dari hasil pelemparan uang logam sebanyak tiga kali. Kamu dapat mencermati situasi pada Ayo Bereksplorasi 4.4 berikut secara saksama.



Ayo Bereksplorasi 4.4

Mari, kita siapkan kembali sebuah uang logam. Cobalah kamu lemparkan uang logam tersebut sebanyak tiga kali. Tuliskan ruang sampel pada pelemparan uang logam tersebut.

$$S = \{GGG, GGA, GAG, \dots, \dots, \dots, \dots, AAA\}.$$

Dalam ruang sampel tersebut, “A” menyatakan sisi angka dan “G” menyatakan sisi gambar yang muncul. Setiap elemen dalam ruang sampel menunjukkan urutan hasil dari tiga pelemparan.

Misalkan X adalah variabel acak diskret yang menyatakan kejadian munculnya sisi G (gambar) dalam percobaan acak ini. Variabel X dapat diberi nilai 0, 1, 2, dan 3 dengan ketentuan berikut.

- ▶ $X = 0$ jika hasil (AAA) terjadi sehingga $P(X = 0) = \frac{1}{8}$
- ▶ $X = 1$ jika hasil (GAA), (...), dan (...) terjadi sehingga $P(X = 1) = \frac{\dots}{8}$
- ▶ $X = 2$ jika hasil (GGA), (...), dan (...) terjadi sehingga $P(X = 2) = \frac{\dots}{8}$
- ▶ $X = 3$ jika hasil (GGG) terjadi sehingga $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

Kamu dapat menuliskan nilai-nilai $X = x$ dan peluangnya pada Tabel 4.8 berikut.

Tabel 4.8 Nilai $X = x$ dan Peluangnya

$X = x$	0	1	2	3	Total
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	...	...	$\frac{1}{8}$	1

Tabel 4.8 di atas dikenal sebagai *distribusi peluang* atau *fungsi peluang* untuk variabel acak diskret X .

Definisi 4.4

Misalkan X adalah variabel acak. Suatu fungsi f disebut *fungsi peluang* atau *distribusi peluang* X jika untuk setiap hasil x yang mungkin, memenuhi

- ▶ $f(x) \geq 0$,
- ▶ $\sum f(x) = 1$,
- ▶ $P(X = x) = f(x)$.

Karena X variabel acak diskret, fungsi peluang atau distribusi peluangnya disebut *fungsi peluang diskret* atau *distribusi peluang diskret*.



Berdasarkan Definisi 4.4, lakukanlah pemeriksaan pada Tabel 4.8, apakah memenuhi syarat fungsi peluang? Diskusikan jawabannya dengan teman sekelompokmu.



Ayo Mengomunikasikan

Kalian dapat menyajikan hasil diskusi pada kegiatan Ayo Berdiskusi di depan kelas. Selanjutnya, diskusikan dengan teman sekelas lainnya untuk mendapatkan jawaban yang benar.

Kesimpulan berdasarkan hasil pemeriksaan Tabel 4.8 sebagai berikut:

- ▶ $f(x) \geq 0$ *dipenuhi*,
- ▶ $\sum f(x) = 1$ *dipenuhi (terbukti)*,
- ▶ $P(X=0) = f(0), P(X=1) = f(1), P(X=2) = f(2), P(X=3) = f(3)$ sehingga $P(X=x) = f(x)$ *dipenuhi*.

Dengan demikian, fungsi f merupakan fungsi peluang. Fungsi peluang variabel acak X dapat dinyatakan dengan rumus

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}, x = 0, 1, 2, 3.$$

Pada rumus tersebut, $\binom{3}{x}$ merupakan notasi kombinasi yang menyatakan banyaknya cara memilih x keberhasilan dari 3 percobaan. Hasil kombinasi tersebut kemudian dibagi 8 agar memenuhi sifat fungsi peluang, yaitu $\sum f(x) = 1$.



Ayo, Mengingat Kembali

- ▶ $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- ▶ $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.
- ▶ $0! = 1$.

Contoh Soal 4.6

Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola hijau dan 3 bola kuning. Misalkan diambil 3 bola secara acak. Jika X menyatakan banyak bola kuning yang terambil, tentukan fungsi peluang X .

Alternatif penyelesaian:

Total cara memilih 3 bola dari 8 bola yang tersedia:

$$(S) = C_3^8 = \frac{8!}{3!5} \neq \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(3 \cdot 2)5!} = 8 \cdot 7 = 56$$

Nilai X yang mungkin adalah 0, 1, 2, 3.

- $X = 0$, artinya tidak ada bola kuning yang terambil, maka

$$f(0) = \frac{C_0^3 \cdot C_3^5}{56} = \frac{10}{56}.$$

- $X = 1$, artinya 1 bola kuning terambil, maka

$$f(1) = \frac{C_1^3 \cdot C_2^5}{56} = \frac{30}{56}.$$

- $X = 2$, artinya 2 bola kuning terambil, maka

$$f(2) = \frac{C_2^3 \cdot C_1^5}{56} = \frac{15}{56}$$

- $X = 3$, artinya 3 bola kuning terambil, maka

$$f(3) = \frac{C_3^3 \cdot C_0^5}{56} = \frac{1}{56}.$$

Distribusi peluang X disajikan pada Tabel 4.9 berikut.

Tabel 4.9 Nilai $X = x$ dan $f(x)$

$X = x$	0	1	2	3	Total
$f(x)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

Fungsi peluang X dapat dinyatakan dalam rumus:

$$f(x) = \frac{C_x^3 \cdot C_{(3-x)}^5}{C_3^8}, x = 0, 1, 2, 3.$$

Kesimpulan:

- $f(x) \geq 0$ untuk semua $x = 0, 1, 2, 3$ *dipenuhi*,
- $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{10 + 30 + 15 + 1}{56} = 1$ *dipenuhi*,
- $P(X = 0) = f(0)$, $P(X = 1) = f(1)$, $P(X = 2) = f(2)$, $P(X = 3) = f(3)$ sehingga $P(X = x) = f(x)$ *dipenuhi*.

Dengan demikian, $f(x)$ memenuhi definisi fungsi peluang.

Contoh Soal 4.7

Diketahui:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12}, & \text{untuk } x = 3, 4, 5, \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

- Tentukan distribusi peluang untuk X .
- Apakah $f(x)$ merupakan fungsi peluang dari variabel acak diskret X ?
- Tentukan $P(X = 4)$, $P(X \leq 4)$, dan $P(X < 4)$.

Alternatif penyelesaian:

- Distribusi peluang untuk X disajikan dalam Tabel 4.10 berikut.

Tabel 4.10 Nilai $X = x$ dan Peluangnya

$X = x$	3	4	5	Total
$P(X = x)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	1

- Pada Tabel 4.10 ditunjukkan bahwa:

- ▶ $f(x) \geq 0$ *dipenuhi*,
- ▶ $\sum f(x) = 1$ *dipenuhi (terbukti)*,
- ▶ $P(X = 3) = f(3)$, $P(X = 4) = f(4)$, $P(X = 5) = f(5)$ sehingga $P(X = x) = f(x)$ *dipenuhi*.

Dengan demikian, $f(x)$ adalah fungsi peluang dari variabel acak diskret X .

- $$P(X = 4) = \frac{4}{12}.$$

$$P(X \leq 4) = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}.$$

$$P(X < 4) = \frac{3}{12}.$$



Ayo Mencoba 4.4

Selesaikan setiap persoalan berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

- Pabrik ponsel Sigma mengirim 10 ponsel pintar ke sebuah toko elektronik. Ternyata sebanyak 4 ponsel pintar cacat. Beta membeli 2 ponsel pintar dari toko tersebut secara acak. Tentukan distribusi dan fungsi peluang banyak ponsel pintar yang cacat.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan Y variabel acak diskret dengan nilai y menyatakan banyaknya ponsel pintar yang dibeli Beta dalam keadaan cacat.

$$n(S) = C_{\dots}^{10} = \frac{10!}{\dots} = \frac{\dots}{45}.$$

- ▶ $Y = 0$, artinya tidak ada ponsel pintar cacat yang dibeli Beta, maka

$$f(0) = \frac{C_0^4 \cdot C_{\dots}^6}{45} = \frac{\dots}{45}.$$

- ▶ $Y = 1$, artinya terdapat 1 ponsel pintar cacat yang dibeli Beta, maka

$$f(1) = \frac{C_1^4 \cdot C_{\dots}^6}{45} = \frac{\dots}{45}.$$

- ▶ $Y = 2$, artinya terdapat 2 ponsel pintar cacat yang dibeli Beta, maka

$$f(2) = \frac{C_2^4 \cdot C_{\dots}^6}{45} = \frac{\dots}{45}.$$

Distribusi peluang Y disajikan dalam Tabel 4.11 berikut.

Tabel 4.11 Nilai $Y = y$ dan $f(y)$

$Y = y$	0	1	2	Total
$f(y)$	$\frac{\dots}{45}$	$\frac{\dots}{45}$	$\frac{\dots}{45}$	1

Karena Y merupakan variabel acak diskret, fungsi peluangnya dapat dinyatakan sebagai

$$f(y) = \frac{C_x^{\dots} \cdot C_{\dots}^6}{C_{\dots}^{10}}, y = 0, 1, 2.$$

Secara jelas, ditunjukkan bahwa:

- ▶ $f(y) \geq 0$ *dipenuhi*,
- ▶ $\sum f(y) = 1$ *dipenuhi (terbukti)*,
- ▶ $P(Y = 0) = f(0)$, $P(Y = 1) = f(1)$, $P(Y = 2) = f(2)$ sehingga $P(Y = y) = f(y)$ *dipenuhi*.

Dengan demikian, $f(y)$ adalah fungsi peluang.

2. Diketahui:
$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{12}, & \text{untuk } z = 2, 3, 4, \\ \frac{7-z}{12}, & \text{untuk } z = 5, 6, \\ 0, & \text{untuk } z \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang untuk Z , kemudian periksa apakah $f(z)$ merupakan fungsi peluang dari variabel acak diskret Z .

Alternatif penyelesaian:

Distribusi peluang untuk Z disajikan dalam Tabel 4.12 berikut.

Tabel 4.12 Nilai $Z = z$ dan Peluangnya

$Z = z$	2	3	4	5	6	Total
$P(Z = z)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

Periksalah beberapa hal berikut.

- Apakah $f(z) \geq 0$ dipenuhi?
- Apakah $\sum f(z) = 1$ dipenuhi?
- Apakah $P(Z = 2) = f(2)$, $P(Z = 3) = f(3)$, $P(Z = 4) = f(4)$, $P(Z = 5) = f(5)$, $P(Z = 6) = f(6)$?

Hasil pemeriksaan menunjukkan bahwa $f(z)$ adalah fungsi

Latihan Soal Fungsi Peluang

Selesaikan setiap persoalan berikut dengan benar.

- Sebuah kantong berisi 5 bola putih, 2 bola hitam, dan 3 bola merah. Sebanyak 3 bola diambil satu demi satu secara acak. Tentukan distribusi peluang variabel acak diskret terambilnya bola merah dan fungsi peluangnya.

- Diketahui:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & \text{untuk } x = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- Tentukan distribusi peluang untuk X .
 - Apakah $f(x)$ merupakan fungsi peluang dari variabel acak diskret X ?
 - Tentukan $P(X = 2)$, $P(X \geq 2)$, dan $P(X < 3)$.
- Sebuah kotak berisi 9 butir telur. Rupanya ada 3 telur busuk. Izza membeli 3 telur secara acak. Jika X menyatakan banyak telur busuk yang dibeli Izza, tentukan distribusi dan fungsi peluang X .

4. Sebuah kantong berisi 4 kelereng merah dan 6 kelereng putih. Aidan mengambil 4 kelereng secara acak. Jika N menyatakan terambilnya kelereng merah, tentukan distribusi dan fungsi peluangnya.
5. Dalam Ulangan Tengah Semester, diberikan 3 soal yang masing-masing jawabannya benar atau salah. Jika X menyatakan jawaban benar dari 3 soal tersebut, susunlah fungsi dan distribusi peluang variabel acak X .

E. Fungsi Densitas Peluang

Pada kegiatan ini, kamu akan mengeksplorasi cara menganalisis data yang nilainya tersebar secara kontinu dalam suatu interval. Kamu dapat mencermati situasi pada Ayo Bereksplorasi 4.5 berikut secara saksama.



Ayo Bereksplorasi 4.5

Seorang pelari berlatih untuk menjaga konsistensi waktu larinya dalam jarak 100 meter. Setelah berlatih selama 2 minggu, waktu tempuh larinya selalu dari 12,5 detik hingga 13,5 detik. Jika kita ingin mengetahui kemungkinan besar waktu tempuh yang sering dicapai oleh pelari tersebut, bagaimana cara menentukannya? Apakah semua waktu dalam rentang 12,5 detik hingga 13,5 detik memiliki kemungkinan yang sama? Adakah waktu tertentu yang lebih sering dicapai? Bagaimana cara memodelkan hal ini secara matematis?

Suatu variabel acak kontinu mempunyai peluang pada setiap titik. Dengan kata lain, yang dipandang ialah suatu selang, bukan nilai suatu titik dari variabel acak. Hal ini menyebabkan distribusi peluangnya tidak mungkin disajikan dalam bentuk tabel. Distribusi peluang variabel acak kontinu biasanya disajikan berupa rumus fungsi secara urut. Fungsi distribusi peluang variabel acak kontinu disebut *fungsi densitas*.

Definisi 4.5

Misalkan X adalah variabel acak kontinu. Suatu fungsi f disebut *fungsi densitas peluang* jika untuk setiap hasil x yang mungkin, memenuhi

- ▶ $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$,
- ▶ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$,
- ▶ $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$.

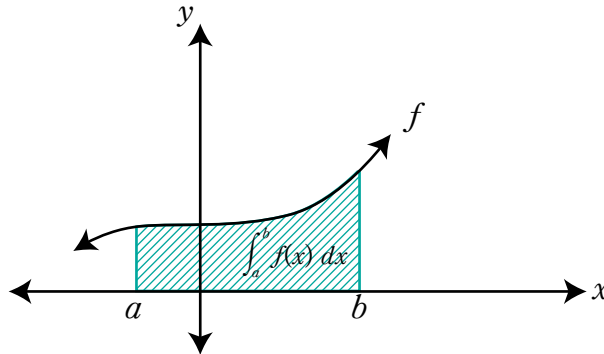
Karena X variabel acak kontinu, fungsi distribusi peluangnya disebut *fungsi distribusi kumulatif*.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, -\infty < x < \infty$$

Hubungan antara fungsi distribusi kumulatif dan fungsi densitas dinyatakan dalam relasi berikut:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.11 Daerah di Bawah Kurva f pada Interval $[a, b]$

Dalam distribusi peluang variabel acak kontinu, fungsi peluang digambarkan sebagai kurva kontinu yang tidak memiliki titik-titik diskret. Luas daerah di bawah kurva fungsi peluang antara a dan b merepresentasikan peluang bahwa variabel acak kontinu bernilai di antara kedua titik tersebut, seperti tampak pada Gambar 4.11.

Secara matematis, peluang bahwa variabel acak kontinu X berada dari a hingga b , yaitu $P(a \leq X \leq b)$, dapat dinyatakan dengan

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Luas tersebut merepresentasikan area di bawah kurva fungsi peluang $f(x)$, yang berada di atas sumbu- x dan dibatasi oleh garis vertikal $x = a$ dan $x = b$.



Ayo Berdiskusi

Perhatikan setiap pertanyaan berikut, kemudian diskusikanlah jawabannya dengan teman sekelompok.

1. Misalkan waktu tempuh lari seorang pelari selalu berada di antara 12,5 detik dan 13,5 detik, apakah mungkin pelari itu memiliki waktu tempuh tepat 13 detik?
2. Misalkan kita memilih secara acak satu waktu dalam rentang 12,5—13,5 detik. Berapa peluang munculnya waktu tempuh pelari tepat 13 detik?
3. Apa yang dimaksud dengan “peluang” dalam konteks variabel acak kontinu?
4. Apa hubungan antara grafik fungsi dan peluang dalam kasus ini?



Ayo Mengomunikasikan

Setiap kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusi pada kegiatan Ayo Berdiskusi di depan kelas. Selanjutnya, diskusikan dengan teman sekelas lainnya untuk mendapatkan jawaban yang benar.

Peluang dalam variabel acak kontinu tidak dihitung berdasarkan nilai tunggal, tetapi berdasarkan interval nilai. Peluang suatu kejadian dihitung sebagai *luas di bawah kurva fungsi densitas* pada interval tertentu. Fungsi densitas peluang dapat digunakan untuk memodelkan sebaran nilai variabel acak kontinu, seperti waktu, tinggi, atau panjang, yang memiliki nilai tak terhingga banyaknya dalam suatu rentang.

Contoh Soal 4.8

Variabel acak kontinu X menyatakan galat pengukuran suhu reaksi kimia di laboratorium, yaitu selisih antara suhu aktual dan suhu target yang diharapkan (dalam $^{\circ}\text{C}$). Nilai X dapat bervariasi secara kontinu dan memiliki fungsi densitas peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

- Tunjukkan bahwa syarat kedua pada Definisi 4.5 dipenuhi.
- Hitunglah $P(0 < X < 1)$.

Alternatif penyelesaian:

- Syarat kedua pada definisi 4.5: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-1}^2 \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big|_{-1}^2 = 1.$$

Jadi, syarat kedua terbukti dipenuhi.

- $P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9}.$

Contoh Soal 4.9

Dengan menggunakan fungsi pada Contoh Soal 4.8, tentukan fungsi distribusi peluang kumulatif X .

Alternatif penyelesaian:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, -\infty < x < \infty,$$

maka

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-1}^x \frac{t^2}{3} dt \\ &= \left[\frac{t^3}{9} \right]_{-1}^x = \frac{x^3 + 1}{9}. \end{aligned}$$

Contoh Soal 4.10

Sebuah ruangan rapat suatu hotel disewakan dengan durasi tidak lebih dari 4 jam. Misalkan Y adalah variabel acak yang menyatakan waktu rapat.

- Tentukan fungsi densitas peluang Y .
- Berapa peluang suatu rapat berlangsung selama 3 jam atau lebih?

Alternatif penyelesaian:

- $a = 0$ dan $b = 4$ sehingga $f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq y < 4, \\ 0, & \text{untuk } y \text{ lainnya.} \end{cases}$
- $P(Y \geq 3) = \int_3^4 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4} y \Big|_3^4$
 $= \frac{1}{4}(4) - \frac{1}{4}(3) = \frac{1}{4}.$

Jadi, peluang suatu rapat berlangsung selama 3 jam atau lebih adalah $\frac{1}{4}$.



Selesaikan persoalan berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

Seorang siswa mengikuti latihan pemrograman selama 2 jam setiap sore, dari pukul 16.00—18.00. Ia mencatat waktu efektif yang benar-benar digunakan untuk menulis kode setiap hari, dalam satuan menit. Berdasarkan pengamatan, waktu efektif tersebut tersebar dari 20 menit hingga 100 menit.

Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan lama waktu efektif menulis kode (dalam menit). Fungsi densitas peluang untuk X adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & 20 \leq x \leq 100, \\ 0, & x < 20 \text{ atau } x > 100. \end{cases}$$

Tentukan peluang bahwa siswa tersebut menulis kode dalam rentang waktu

- dari 30 menit hingga 90 menit,
- dari 40 menit hingga 60 menit.

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{a. } P(30 \leq x \leq 90) &= \int_{30}^{\dots} \frac{1}{80} dx = \frac{1}{80} x \Big|_{30}^{\dots} \\ &= \frac{\dots - \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Jadi, peluang siswa tersebut menulis kode dalam rentang 30 menit hingga 90 menit adalah

$$\begin{aligned} \text{b. } P(40 \leq x \leq 60) &= \int_{\dots}^{60} \frac{1}{80} dx = \frac{1}{80} x \Big|_{\dots}^{60} \\ &= \frac{\dots - \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Jadi, peluang siswa tersebut menulis kode dalam rentang 40 menit hingga 60 menit adalah

Latihan Soal Fungsi Densitas Peluang

Selesaikanlah setiap persoalan berikut dengan benar.

1. Dalam masa pandemi Covid-19, suatu toko hanya beroperasi selama 180 menit, yaitu mulai pukul 08.00 hingga pukul 11.00. Pembeli tidak diperbolehkan berada di dalam toko tersebut sebelum pukul 08.00. Pembeli juga harus meninggalkan toko paling lambat pukul 11.00. Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan lama pembeli berada di dalam toko (dalam menit). Fungsi densitas peluang X dinyatakan dengan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{180}, & 0 \leq x \leq 180, \\ 0, & x < 0 \text{ atau } x > 180. \end{cases}$$

Berapakah peluang seorang pembeli berada di toko pada rentang waktu berikut.

- a. antara 30 dan 90 menit
 - b. antara 15 dan 60 menit
2. Suatu variabel acak kontinu X , untuk nilai-nilai di antara $x = 1$ dan $x = 5$, dinyatakan dengan fungsi peluang $f(x) = \frac{x+2}{20}$.
 - a. Buktikan bahwa $P(1 < X < 5) = 1$.
 - b. Hitunglah $P(X < 4)$.

F. Distribusi Binomial



Tahukah Kamu

Jacob Bernoulli (juga dikenal sebagai James atau Jacques) adalah salah satu matematikawan terkemuka dari keluarga Bernoulli. Dia adalah pendukung pertama analisis Leibnizian dan memihak Leibniz dalam kontroversi kalkulus Leibniz-Newton. Ia dikenal karena banyak berkontribusi dalam kalkulus. Jacob Bernoulli adalah salah satu pendiri kalkulus variasi. Ia yang mengusulkan versi pertama hukum



Gambar 4.12 Jacob Bernoulli
Sumber: digambar ulang dari Niklaus Bernoulli/
commons.wikimedia.org (1687)

bilangan besar dalam *Ars Conjectandi*-nya yang diterbitkan pada tahun 1713. Salah satu isi dari buku tersebut mengenai percobaan binomial.

(Sumber: dikutip dari https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli)

Sebelum menuju materi utama, mari mengingat kembali materi peluang yang pernah kamu pelajari.



Ayo Mengingat Kembali

- ▶ $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$
- ▶ $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1.$
- ▶ $P(A) + P(A^c) = 1$

dengan

$P(A)$ adalah peluang kejadian sukses (berhasil),

$P(A^c)$ adalah peluang kejadian gagal.



Ayo Bereksplorasi 4.6

Kamu dapat menyiapkan sekeping uang logam terlebih dahulu. Cobalah kamu lemparkan uang logam tersebut sebanyak dua kali untuk setiap percobaan. Gunakan simbol “A” untuk menyatakan sisi angka dan “G” untuk sisi gambar. Ulangi eksperimen ini sebanyak 4 kali. Catatlah hasil pelemparan pada Tabel 4.13.

Tabel 4.13 Hasil Lemparan Pertama dan Kedua

Hasil Lemparan Pertama	Hasil Lemparan Kedua

Gunakan data pada Tabel 4.13 untuk menentukan peluang dari setiap kemungkinan hasil pelemparan uang logam dengan melengkapi Tabel 4.14 berikut.

Tabel 4.14 Hasil Pelemparan dan Peluang

Hasil Pelemparan yang Mungkin (Lemparan 1 dan Lemparan 2)	Peluang



Ayo Berdiskusi

Jawablah setiap pertanyaan berikut secara berkelompok.

1. Tentukan peluang munculnya gambar pada dua kali pelemparan.
2. Misalkan suatu kejadian dikatakan berhasil jika muncul dua gambar pada dua kali pelemparan, bagaimana kejadian gagalnya?
3. Berapa peluang kegagalannya?
4. Berapakah nilai harapan untuk memperoleh gambar pada satu kali pelemparan?
5. Berapakah nilai harapan untuk memperoleh keduanya gambar pada dua kali pelemparan?
6. Apa kesimpulan yang kalian dapatkan?



Ayo Berpikir Kritis

1. Tentukan peluang mendapatkan paling sedikit 4 gambar pada 6 kali pelemparan sekeping uang logam seimbang.
2. Tentukan nilai harapan memperoleh sisi gambar pada 10 kali pelemparan sekeping uang logam seimbang.

1. Fungsi Distribusi Binomial

Pada kegiatan Ayo Berdiskusi, kamu mengenal istilah *berhasil* dan *gagal*. Disebutkan bahwa percobaan dikatakan berhasil apabila muncul dua gambar pada dua kali pelemparan. Pada dasarnya, berbagai percobaan pada distribusi binomial bersifat bebas, artinya kita dapat menentukan salah satu kejadian sebagai berhasil dengan peluang keberhasilan pada setiap pengulangan tetap sama. Proses seperti ini disebut *Proses Bernoulli*.

Definisi 4.6

Jika suatu percobaan binomial mempunyai peluang berhasil p dan peluang gagal $q = 1 - p$, maka fungsi distribusi peluang untuk variabel random binomial X , yaitu banyaknya keberhasilan dalam n percobaan yang bebas, adalah

$$b(x; n, p) = \binom{n}{p} p^x q^{n-x} \text{ untuk } x = 0, 1, 2, \dots, n.$$



Ayo Berdiskusi

Menurut kalian, apa yang menjadi syarat bahwa percobaan yang dilakukan berdistribusi binomial? Diskusikan secara berkelompok.



Ayo Mengomunikasikan

Setiap kelompok dapat menyajikan hasil diskusi pada kegiatan Ayo Berdiskusi di depan kelas. Selanjutnya, diskusikan dengan teman sekelas lainnya untuk mendapatkan jawaban yang benar.

Contoh Soal 4.11

Pada awal pertandingan sepak bola biasanya dilakukan pelemparan uang logam untuk menentukan tim mana yang berhak melakukan *kick-off* terlebih dahulu. Salah satu tim akan memilih sisi gambar atau angka sebelum uang dilempar oleh wasit. Disepakati bahwa tim yang memilih gambar akan melakukan *kick-off* terlebih dahulu.

Selama 7 hari berturut-turut, seorang wasit memimpin 7 kali permainan. Pada setiap pertandingan dilakukan pelemparan uang logam satu kali. Tentukan peluang bahwa 5 kali pelemparan pertama mendapatkan gambar.

Alternatif penyelesaian:

Pelemparan sekeping uang logam memiliki ruang sampel $S = \{A, G\}$. Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan gambar dari setiap pelemparan, yaitu $\frac{1}{2}$. Peluang kegagalan (q) adalah peluang mendapatkan angka dari setiap pelemparan sehingga

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Banyaknya lemparan (n), yaitu 7. Dengan menggunakan rumus distribusi binomial $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, diperoleh

$$\begin{aligned} b\left(5; 7, \frac{1}{2}\right) &= \binom{7}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5} \\ &= \binom{7}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{7!}{5!(7-5)!} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2^2} \\ &= \frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!2!} \cdot \frac{1}{2^7} \\ &= 21 \cdot \frac{1}{2^7} = 0,164. \end{aligned}$$

Jadi, peluang 5 kali pelemparan pertama mendapatkan gambar pada 7 kali permainan adalah 0,164.

Contoh Soal 4.12

Sebuah dadu seimbang dilemparkan 5 kali. Tentukan peluang mendapatkan sisi mata dadu empat sebanyak 3 kali.

Alternatif penyelesaian:



Gambar 4.13 Mata Dadu 4

Pada sebuah dadu terdapat ruang sampel

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan mata dadu empat dari setiap pelemparan, yaitu $\frac{1}{6}$. Peluang kegagalan (q) adalah peluang mendapatkan mata dadu selain empat dari setiap pelemparan sehingga

$$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Banyaknya lemparan (n), yaitu 5. Dengan menggunakan rumus distribusi binomial $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, diperoleh

$$\begin{aligned} b\left(3; 5, \frac{1}{6}\right) &= \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} \\ &= \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5^2}{6^2} \\ &= \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5^2}{6^5} = \frac{3.000}{93.312} = 0,032. \end{aligned}$$

Jadi, peluang mendapatkan sisi mata dadu empat sebanyak 3 kali dari 5 kali pelemparan adalah 0,032.



Ayo Mencoba 4.6

Selesaikan setiap persoalan berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

1. Tentukan peluang untuk mendapatkan 2 sisi gambar dalam 7 kali pelemparan sebuah uang logam.

Alternatif penyelesaian:

Pada sekeping uang logam, seperti pada Gambar 4.14, terdapat ruang sampel $S = \{\dots, \dots\}$.

Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan sisi ... dari setiap pelemparan uang logam, yaitu ...



Gambar 4.14 Mata Uang Logam

Peluang kegagalan (q) adalah peluang mendapatkan sisi ... dari setiap pelemparan uang logam sehingga $q = \dots$

Banyaknya lemparan (n), yaitu

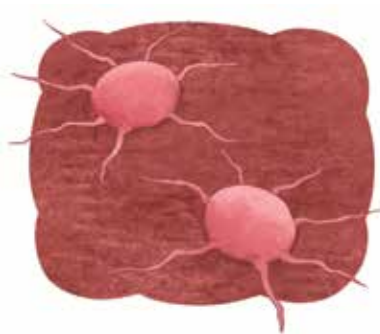
Dengan menggunakan rumus $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, diperoleh

$$b(\dots; \dots, \dots) = \binom{\dots}{\dots} (\dots)^{\dots} (\dots)^{\dots-\dots}$$

Jadi, peluang untuk mendapatkan 2 sisi gambar dalam 7 kali pelemparan sebuah uang logam adalah

2. Sel kanker yang terdapat pada tubuh manusia diilustrasikan seperti pada Gambar 4.15. Peluang seseorang akan sembuh dari kanker adalah 0,4. Jika 15 orang terkena penyakit tersebut, berapa peluang tepat 5 orang sembuh?

Alternatif penyelesaian:



Gambar 4.15 Sel Kanker

Peluang keberhasilan (p) adalah peluang seseorang sembuh dari penyakit kanker, yaitu

Peluang kegagalan (q) adalah peluang seseorang tidak sembuh dari penyakit kanker sehingga $q = \dots$

Banyaknya orang yang menderita kanker (n) yaitu

Dengan menggunakan rumus $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, diperoleh

$$b(\dots; \dots, \dots) = \binom{\dots}{\dots} (\dots) \dots (\dots) \dots \dots$$

Jadi, peluang tepat 5 orang sembuh dari kanker adalah

2. Nilai Harapan Distribusi Binomial

Hasil harian dalam suatu proses produksi dapat bervariasi meskipun dikerjakan oleh tim dengan kemampuan yang sama. Pada kegiatan ini, kamu akan mengeksplorasi data hasil produksi batik Besurek untuk memperkirakan peluang terjadinya kegagalan dalam proses mencanting. Kamu dapat mencermati situasi pada Ayo Bereksplorasi 4.7 berikut.



Ayo Bereksplorasi 4.7

Sebuah industri rumahan batik Besurek mempekerjakan 30 pegawai dengan kemampuan sama untuk mencanting batik. Dalam sehari, setiap 3 pegawai akan mencanting satu kain secara bergantian. Jumlah maksimal hasil mencanting sebanyak 10 kain per hari, seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.15. Ketelitian, gotong royong, dan kerja sama yang baik antarpegawai diperlukan agar tidak terjadi kegagalan dalam mencanting batik.

Tabel 4.15 Data Hasil Mencanting Batik Besurek dalam 6 Hari

Hari ke-	Hasil Mencanting
1	10
2	7
3	9
4	10
5	8
6	7



Ayo Berdiskusi

Buatlah kelompok yang terdiri atas 3 atau 4 orang. Setiap kelompok bekerja sama untuk mendiskusikan masalah berikut.

1. Berapa peluang kegagalan mencanting satu kain batik?
2. Tentukan peluang kegagalan mencanting per hari.



Ayo Mengomunikasikan

Setiap kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusi pada kegiatan Ayo Berdiskusi di depan kelas. Selanjutnya, diskusikan dengan teman sekelas lainnya untuk mendapatkan jawaban yang benar. Kesimpulan apa yang kalian peroleh?



Tahukah Kamu

Batik Indonesia telah dikenal sebagai salah satu warisan budaya dunia. Batik Indonesia dihiasi oleh berbagai simbol dan kebudayaan sehingga memiliki beragam motif unik. Beberapa batik yang dikenal, antara lain batik Solo, batik Yogyakarta, batik Pekalongan, dan batik Cirebon.



Gambar 4.16 Motif Batik Besurek

Tahukah kamu tentang batik Besurek? Batik Besurek pada Gambar 4.16 merupakan batik khas Bengkulu, Indonesia. Perbedaan batik Besurek dengan batik lain terletak pada motifnya yang menonjolkan bunga *Rafflesia Arnoldii*. Bunga tersebut ditemukan pertama kali pada tahun 1818 di Kabupaten Bengkulu Selatan oleh Dr. Joseph Arnold dan Sir Thomas Stamford Raffles sehingga Bengkulu dikatakan sebagai Bumi *Rafflesia*.

Bunga *Rafflesia Arnoldii* memiliki keistimewaan sebagai bunga terbesar di dunia. Hal tersebut menyebabkan batik Besurek memiliki daya jual tinggi dan menjadi salah satu produk utama produsen batik di Bengkulu. Batik Besurek umumnya termasuk batik tulis. Dalam proses membuat batik tulis terdapat kegiatan mencanting batik. Proses mencanting batik merupakan proses penting karena jika terjadi kegagalan akan berakibat pada kegagalan produksi.

Nilai harapan distribusi binomial pada dasarnya ditentukan oleh berbagai peristiwa yang dihasilkan dari percobaan binomial, terutama peluang keberhasilan p atau kegagalannya q . Misalkan hasil percobaan ke- n dinyatakan sebagai variabel random I_n dengan peluang keberhasilan $I_n = 1$ dan peluang kegagalan $I_n = 0$. Suatu percobaan binomial banyaknya keberhasilan dituliskan sebagai jumlah n variabel acak bebas berikut:

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

Nilai harapan setiap I_n adalah

$$E(I_n) = 1(p) + 0(q) = p$$

sehingga nilai harapan suatu populasi distribusi binomial dapat dinyatakan sebagai perkalian n percobaan dengan peluang percobaan.

$$E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n)$$

$$E(X) = \underbrace{\dots + \dots + \dots + \dots}_{n \text{ suku}}$$

$$E(X) = \dots$$

Distribusi binomial $b(x; n, p)$ mempunyai nilai harapan

$$E(X) = np$$

dengan n banyaknya percobaan dan p peluang keberhasilan.

Contoh Soal 4.13

Sebuah dadu seimbang dilempar tujuh kali. Berapa nilai harapan untuk mendapatkan sisi mata dadu lima sebanyak empat kali?

Alternatif penyelesaian:

Pada sebuah dadu terdapat ruang sampel $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan mata dadu lima dari setiap pelemparan mata dadu, yaitu $\frac{1}{6}$.

Peluang kegagalan (q) adalah peluang mendapatkan mata dadu selain lima dari setiap pelemparan mata dadu sehingga

$$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Banyaknya lemparan (n) yaitu 7, maka

$$E(X) = np = 7\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6} = 1,167.$$

Jadi, nilai harapan untuk mendapatkan sisi mata dadu lima sebanyak empat kali adalah 1,167.



Ayo Mencoba 4.7

Selesaikan setiap persoalan berikut dengan mengacu pada alternatif penyelesaian.

1. Berapa nilai harapan untuk mendapatkan 3 sisi angka dalam 6 kali pelemparan sekeping uang logam?

Alternatif penyelesaian:



Gambar 4.17 Sisi Angka
pada Mata Uang Logam

Pada sekeping uang logam seperti Gambar 4.17, terdapat ruang sampel $S = \{..., ...\}$.

Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan sisi ... dari pelemparan uang logam, yaitu

Banyaknya lemparan (n) yaitu ..., maka

$$E(X) = np = ... (...) =$$

Jadi, nilai harapan mendapatkan 3 sisi angka dalam 6 kali pelemparan adalah

2. Peluang seseorang sembuh dari Covid-19 tanpa penyakit bawaan adalah 0,80. Apabila 40 orang diketahui menderita penyakit ini, berapa nilai harapan sembuh?

Alternatif penyelesaian:

Peluang keberhasilan (p) adalah peluang seseorang sembuh dari Covid-19, yaitu ...

Banyaknya penderita Covid-19 (n) yaitu ..., maka

$$E(X) = np = ... (...) =$$

Jadi, nilai harapan sembuh dari Covid-19 adalah

Latihan Soal Distribusi Binomial

Selesaikan setiap persoalan berikut dengan benar.

1. Misalkan sekeping uang logam yang seimbang dilemparkan sebanyak tiga kali. Tentukan peluang:
 - a. munculnya tiga angka,
 - b. munculnya tiga gambar.
2. Keberhasilan memukul bola seorang pemain bisbol sebesar 0,250. Berapa peluang dan nilai harapan ia berhasil tepat memukul sekali dalam 5 kesempatan berikutnya?

3. Peluang seorang bayi belum divaksinasi rubela adalah 0,2. Suatu hari terdapat 6 bayi di posyandu. Tentukan peluang bahwa 4 dari 6 bayi belum divaksinasi rubela.
4. Sebuah survei menemukan bahwa satu dari lima orang mengatakan mereka menemui dokter dalam waktu yang tidak ditentukan. Jika sepuluh orang dipilih secara acak, berapa peluang bahwa tiga dari mereka pergi ke dokter dalam sebulan terakhir?
5. Peluang seorang siswa menyelesaikan studi pada sebuah sekolah adalah 0,9. Misalkan terdapat 5 siswa di sekolah tersebut.
 - a. Tentukan peluang bahwa tidak ada siswa yang menyelesaikan studi.
 - b. Tentukan peluang bahwa hanya satu siswa yang menyelesaikan studi.
 - c. Tentukan peluang paling sedikit satu siswa yang menyelesaikan studi.
 - d. Tentukan peluang semua siswa menyelesaikan studi.
6. Misalkan sepasang dadu seimbang dilemparkan sebanyak 6 kali.
 - a. Berapa peluang memperoleh jumlah mata dadu 9 sebanyak dua kali?
 - b. Berapa peluang memperoleh jumlah mata dadu 9 paling sedikit dua kali?
7. Seorang pesulap melakukan pertunjukan sulap di hadapan penonton dengan membagikan 4 amplop berisi kertas kosong yang harus diisi angka pilihan penonton. Keempat amplop tersebut kemudian dikumpulkan kembali. Pesulap berusaha menebak satu angka pilihan penonton dengan benar. Pesulap sukses melaksanakan aksinya jika semua angka pilihan penonton berhasil ditebak dengan benar.
 - a. Berapakah peluang pesulap tersebut sukses melaksanakan aksinya?
 - b. Tentukan nilai harapan pesulap tersebut menebak angka dengan benar.

G. Distribusi Normal

Abraham de Moivre adalah seorang tokoh yang memperkenalkan distribusi normal pertama kali dalam sebuah artikel di tahun 1733 sebagai aproksimasi dari distribusi binomial n besar. Karya ini dikembangkan lebih lanjut oleh Pierre Simond Plus dan dikenal sebagai *Teorema More Blue Laplace*. Laplace menggunakan distribusi normal untuk menganalisis kesalahan dalam percobaan. Metode kuadrat terkecil diperkenalkan oleh Legendre pada tahun 1805. Di sisi lain, Gauss berpendapat bahwa ia telah menggunakan metode ini sejak 1794, dengan asumsi kesalahan terdistribusi normal.

(Sumber: dikutip dari https://ms.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre)



Gambar 4.18 Abraham de Moivre

Sumber: digambar ulang dari Joseph Highmore/commons.wikimedia.org (1736)



Ayo Mengingat Kembali

- ▶ *Mean* atau *rata-rata* suatu kumpulan data adalah bilangan yang diperoleh dengan mendistribusikan secara merata semua anggota dari kumpulan data tersebut. Kamu dapat menghitung rata-rata dengan menambahkan semua nilai data dan membaginya dengan jumlah total data.
- ▶ *Varians* adalah ukuran dispersi lain yang biasa digunakan untuk menentukan distribusi data. Varians diperoleh dengan mengurangkan setiap data dari *mean*.
- ▶ *Standar deviasi* atau simpangan baku adalah akar dari varians.

Sebelum mengerjakan tugas pada Ayo Bereksplorasi 4.8, kamu perlu memahami terlebih dahulu arti kurva normal dan dua parameter penting yang menyertainya, yaitu rata-rata dan simpangan baku.

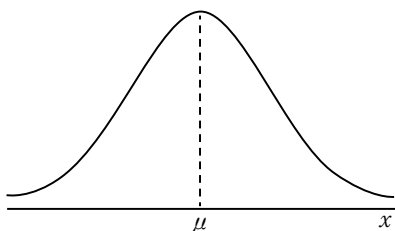
- ▶ *Kurva normal* adalah kurva berbentuk lonceng simetris yang menggambarkan distribusi peluang dari variabel acak kontinu. Kurva ini menunjukkan bahwa nilai-nilai yang berada di sekitar titik tengah (rata-rata) memiliki kemungkinan lebih tinggi untuk muncul.
- ▶ *Rata-rata* (μ) menunjukkan titik tengah dari sebaran data, yaitu lokasi puncak kurva normal.

- *Simpangan baku* (σ) menunjukkan seberapa menyebar data terhadap rata-rata. Semakin besar σ , kurva akan terlihat lebih lebar dan datar. Sebaliknya, semakin kecil σ , kurva akan tampak lebih sempit dan tinggi.



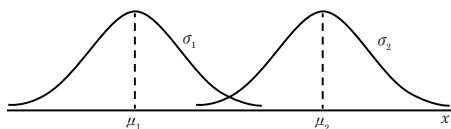
Ayo Bereksplorasi 4.8

Kamu dapat memperhatikan setiap gambar kurva, kemudian menginterpretasikan maknanya. Lengkapi titik-titik dengan kata **sama** atau **berbeda**.



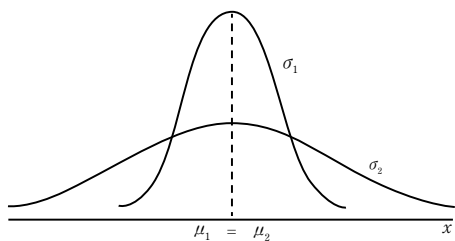
Gambar 4.19 Kurva Normal

Kurva normal pada Gambar 4.19 memiliki sebaran peluang yang sangat bergantung pada parameter rata-rata (μ) dan simpangan baku (σ).



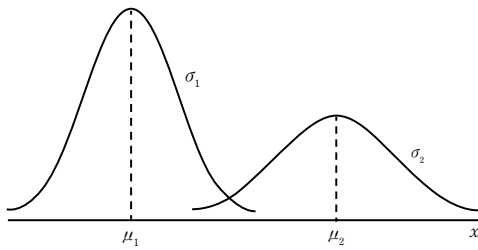
Gambar 4.20 Dua Kurva Normal dengan Rata-Rata Berbeda dan Simpangan Baku Sama

Jika diperhatikan, kedua kurva pada Gambar 4.20 memiliki bentuk yang Hal ini dapat dilihat pada simpangan baku (σ) yang ..., tetapi titik tengahnya atau rata-rata (μ) terletak di tempat berbeda di sepanjang sumbu- x sehingga $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$.



Gambar 4.21 Dua Kurva Normal dengan Rata-Rata Sama dan Simpangan Baku Berbeda

Jika diperhatikan, kedua kurva pada Gambar 4.21 memiliki bentuk yang Hal ini dapat dilihat pada simpangan baku (σ) yang ..., tetapi titik tengahnya atau rata-rata (μ) terletak di tempat yang sama di sepanjang sumbu- x sehingga $\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$.



Gambar 4.22 Dua Kurva Normal dengan Rata-Rata dan Simpangan Baku Berbeda

Jika diperhatikan, kedua kurva pada Gambar 4.22 memiliki bentuk yang Hal ini dapat dilihat pada simpangan baku (σ) dan titik tengahnya atau rata-rata (μ) terletak di tempat yang ... di sepanjang sumbu- x sehingga $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$.



Ayo Berdiskusi

Apa kesimpulan kalian berdasarkan kegiatan Ayo Bereksplorasi 4.8? Diskusikan secara berkelompok.

1. Fungsi Distribusi Normal

Kegiatan Ayo Bereksplorasi 4.8 memberikan informasi bahwa kurva normal sangat bergantung pada rata-rata distribusi (μ) dan varians (σ^2) sehingga berlaku definisi berikut.

Definisi 4.7

Jika X adalah suatu variabel acak normal dengan rata-rata distribusi μ dan varians σ^2 , distribusi normal dapat ditulis

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} \text{ untuk } -\infty < x < \infty$$

dengan

π : nilai konstan (3,1416)

e : bilangan konstan (2,7183)

μ : rata-rata distribusi

σ : simpangan baku

Sifat-sifat kurva normal yang diperoleh dari kegiatan Ayo Bereksplorasi 4.8 adalah sebagai berikut.

- Modus, titik pada sumbu horizontal menyebabkan fungsi menjadi maksimum. Hal ini terjadi pada $x = \mu$.

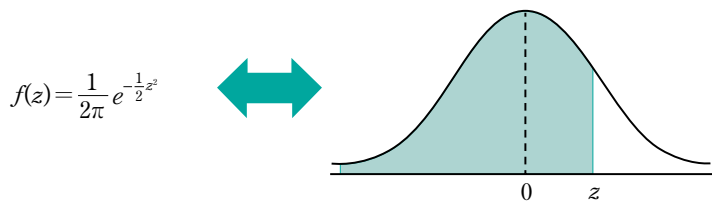
- Kurva simetris terhadap garis tegak lurus yang melalui rata-rata (μ).
- Kurva memiliki titik belok di $x = \mu \pm \sigma$, cekung di bagian bawah apabila $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, dan cekung di bagian atas untuk nilai x lainnya.
- Kedua ujung kurva mendekati asimtot sumbu horizontal ketika nilai x bergerak menjauhi nilai rata-rata ke kiri atau ke kanan.
- Luas daerah yang terletak di bawah kurva dan di atas sumbu mendatar sama dengan 1.

Untuk setiap pasang μ dan σ , sifat-sifat di atas selalu dipenuhi, namun bentuk kurva akan berlainan. Semakin besar σ , semakin rendah kurvanya (platikurtik). Semakin kecil σ , semakin tinggi kurvanya (leptokurtik).

Untuk penggunaan praktis, telah disusun daftar distribusi normal standar atau distribusi normal baku dengan rata-rata $\mu = 0$ dan simpangan baku $\sigma = 1$. Proses mengubah distribusi normal umum menjadi distribusi normal baku menggunakan transformasi nilai baku dengan

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

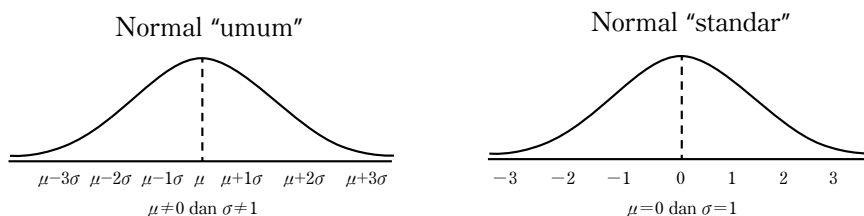
Fungsi densitas distribusi normal dapat dilihat pada Gambar 4.23.



Gambar 4.23 Fungsi Densitas Distribusi Normal

► Untuk $-\infty < z < \infty$

Perbandingan distribusi normal umum dan distribusi normal baku dapat dilihat pada Gambar 4.24.



Gambar 4.24 Distribusi Normal Umum dan Distribusi Normal Baku

Luas kurva pada distribusi normal adalah 1 dan kurva simetris dengan $\mu = 0$, maka luas garis vertikal ke kanan atau ke kiri adalah 0,5.

Luas daerah dari 0 sampai z menggunakan fungsi $z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ dalam distribusi normal $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$ dapat diintegrasikan ke

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}.$$

Daerah yang dihasilkan menunjukkan besarnya peluang bahwa nilai suatu variabel acak berdistribusi normal pada rentang 0 sampai z . Karena kurva distribusinya simetris, daerah dari 0 sampai z negatif sama dengan daerah dari 0 sampai z positif. Untuk menentukan peluang distribusi normal dengan mudah, kamu dapat menggunakan Tabel Distribusi Normal pada halaman Lampiran.

Contoh Soal 4.14

Untuk distribusi normal dengan $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$, tentukan peluang bahwa X mengambil sebuah nilai antara 45 dan 62.

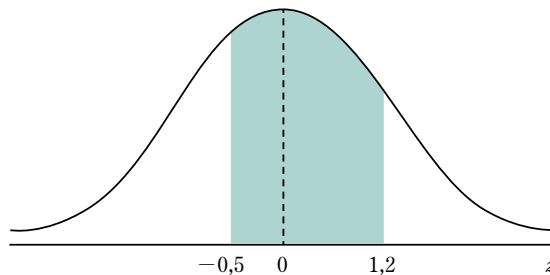
Alternatif penyelesaian:

Diketahui $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$ sehingga kamu dapat menentukan nilai-nilai z padanan $x_1 = 45$ dan $x_2 = 62$, yaitu

$$z_1 = \frac{45 - 50}{10} = -0,5,$$

$$z_2 = \frac{62 - 50}{10} = 1,2.$$

Selanjutnya, gambarkan kurvanya untuk mengetahui posisi z_1 dan z_2 .



Gambar 4.25 Luas Daerah pada Contoh Soal Distribusi Normal

Dengan demikian,

$$P(45 < x < 62) = P(-0,5 < Z < 1,2).$$

Nilai $P(-0,5 < Z < 1,2)$ diberikan oleh daerah gelap pada Gambar 4.25. Luas diperoleh dengan mengurangkan luas daerah di sebelah kiri $z = -0,5$ dari luas daerah di sebelah kiri $z = 1,2$. Lihat Tabel 4.16 untuk menentukan peluang nilai z_1 dan z_2 .

Tabel 4.16 Tabel Distribusi Normal

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251

- Untuk $z_1 = -0,5$

Perhatikan panah berwarna hijau pada Tabel 4.16. Temukan 0,5 untuk z arah menurun dan 0,00 untuk z arah ke kanan sehingga

$$\begin{aligned}
 P(Z < 0,5) &= 0,6915 \\
 P(Z < -0,5) &= 1 - 0,6915 \\
 &= 0,3085.
 \end{aligned}$$

- Untuk $z_2 = 1,2$

Perhatikan panah berwarna biru.

Temukan 1,2 untuk z arah menurun dan 0,00 untuk z arah ke kanan sehingga

$$P(Z < 1,2) = 0,8849.$$



Penting

Nilai Tabel z merupakan luas di bawah kurva normal baku. Karena kurva normal simetris terhadap $z = 0$, nilai z negatif dapat diperoleh dari nilai untuk z positif. Jika tabel hanya memuat nilai z positif, nilai untuk z negatif didapat dari pengurangan 1 dengan nilai z positif.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
 P(45 < X < 62) &= P(-0,5 < Z < 1,2) \\
 &= P(Z < 1,2) - P(Z < -0,5) \\
 &= 0,8849 - 0,3085 \\
 &= 0,5764.
 \end{aligned}$$

Jadi, peluang bahwa X mengambil sebuah nilai antara 45 dan 62 adalah 0,5764.



Ayo Mencoba 4.8

Selesaikan setiap persoalan berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

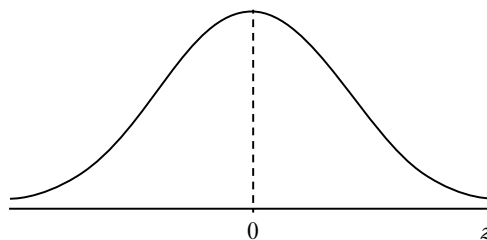
1. Nilai rata-rata kelas siswa yang mengikuti tes matematika harian, berdistribusi normal dengan rata-rata 2,1 dan standar deviasi 0,8. Tentukan peluang siswa tersebut memiliki nilai antara 2,5 dan 3,5.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $\mu = \dots$ dan $\sigma = \dots$ sehingga kamu dapat menentukan nilai-nilai z padanan $x_1 = 2,5$ dan $x_2 = 3,5$, yaitu

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \left(\frac{\dots - \dots}{\dots} \right) = \dots \\
 z_2 &= \left(\frac{\dots - \dots}{\dots} \right) = \dots
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, gambarkan kurvanya untuk mengetahui posisi z_1 dan z_2 . Kamu dapat melengkapi kurva berikut dengan daerah gelap antara z_1 dan z_2 .



Gambar 4.26 Kurva Distribusi Normal

Dengan demikian,

$$P(\dots < x < \dots) = P(\dots < Z < \dots)$$

Nilai $P(\dots < Z < \dots)$ diberikan oleh daerah gelap pada Gambar 4.26. Luas diperoleh dengan ... luas daerah di sebelah kiri $z = \dots$ dari luas daerah di sebelah kiri $z = \dots$. Untuk menentukan peluang nilai z_1 dan z_2 , kamu dapat menelusurinya pada Tabel Distribusi Normal pada bagian Lampiran buku ini.

► Untuk $z_1 = \dots$

Untuk z arah menurun, temukan ... dan z arah ke kanan, temukan ... sehingga $P(Z < \dots) = \dots$

► Untuk $z_2 = \dots$

Untuk z arah menurun, temukan ... dan z arah ke kanan, temukan ... sehingga $P(Z < \dots) = \dots$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P(\dots < X < \dots) &= P(\dots < Z < \dots) \\ &= P(Z < \dots) - P(Z < \dots) \\ &= \dots - \dots = \dots \end{aligned}$$

Jadi, _____

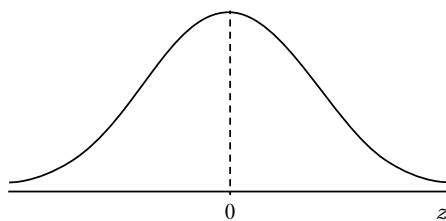
- Misalkan berat rata-rata bayi baru lahir adalah 3.500 gram dengan simpangan baku 225 gram. Tentukan peluang bayi lahir dengan berat antara 3.200 gram dan 4.000 gram.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $\mu = \dots$ dan $\sigma = \dots$ sehingga kamu dapat menentukan nilai-nilai z padanan $x_1 = \dots$ dan $x_2 = \dots$, yaitu

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\dots - \dots}{\dots} = \dots \\ z_2 &= \frac{\dots - \dots}{\dots} = \dots \end{aligned}$$

Selanjutnya, gambarkan kurvanya untuk mengetahui posisi z_1 dan z_2 . Kamu dapat melengkapi kurva di samping dengan daerah gelap antara z_1 dan z_2 .



Gambar 4.27 Luas Daerah Berdistribusi Normal

Dengan demikian,

$$P(\dots < x < \dots) = P(\dots < Z < \dots).$$

Nilai $P(\dots < Z < \dots)$ diberikan oleh daerah gelap dalam Gambar 4.27. Luas diperoleh dengan ... luas daerah di sebelah kiri $z = \dots$ dan luas daerah di sebelah kanan $z = \dots$ Untuk menentukan peluang nilai z_1 dan z_2 , kamu dapat menelusurinya pada Tabel Distribusi Normal pada bagian Lampiran buku ini.

► Untuk $z_1 = \dots$

Untuk z arah menurun temukan ... dan arah ke kanan temukan ... maka $P(Z < \dots) = \dots - 0,5 = \dots$

► Untuk $z_2 = \dots$

Untuk z arah menurun temukan ... dan arah ke kanan temukan ... maka $P(Z < \dots) = \dots - 0,5 = \dots$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P(\dots < X < \dots) &= P(\dots < Z < \dots) \\ &= P(Z < \dots) + P(Z < \dots) \\ &= \dots + \dots = \dots \end{aligned}$$

Jadi, _____



Ayo Berpikir Kritis

Mengapa pada Ayo Mencoba 4.8 nomor 2, untuk menentukan nilai peluang z dikurangi 0,5?

2. Nilai Harapan Distribusi Normal

Distribusi normal $n(x; \mu, \sigma)$ mempunyai nilai harapan

$$E(X) = \mu.$$

Kamu dapat melengkapi proses penentuan nilai harapan distribusi normal pada Ayo Bereksplorasi 4.9 berikut.

**Ayo Bereksplorasi 4.9**

Nilai harapan pada distribusi normal diperoleh dari $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$, sehingga

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$E(X) = \dots \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Misalkan $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, maka

$$x = \dots \text{ dan } dx = \dots dt,$$

dan

$$x^2 = (\dots)^2 = \dots$$

Jika kamu substitusikan hasil pemisalan di atas ke fungsi $E(X)$, diperoleh

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\dots} \int_{-\infty}^{\infty} (\dots + \dots) e^{-\frac{1}{2}\dots^2} \sigma dt \\ &= \frac{\dots}{\dots} \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{\dots} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= \frac{\dots}{\dots} \int_{-\infty}^{\infty} \dots dt + \mu. \end{aligned}$$

Misalkan $z = \frac{1}{2}t^2$ maka $dz = \dots dt$, sehingga

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\dots}{\dots} \int_{-\infty}^{\infty} \dots dt + \mu \\ &= \frac{\sigma}{\dots} e^{-z} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \mu \\ &= \dots \end{aligned}$$

Contoh Soal 4.15

Sebaran normal memiliki $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$. Hitunglah nilai harapan bahwa X mengambil sebuah nilai 45.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$

sehingga nilai harapan dapat dicari dengan

$$E(X) = \mu,$$

$$E(45) = 50.$$

Jadi, nilai harapan bahwa X mengambil sebuah nilai 45 adalah 50.



Ayo Mencoba 4.9

Selesaikan setiap persoalan berikut dengan mengacu pada *alternatif penyelesaian*.

1. Nilai rata-rata kelas siswa yang mengikuti tes matematika harian, berdistribusi normal dengan rata-rata 2,1 dan standar deviasi 0,8. Tentukan nilai harapan siswa tersebut mencapai nilai 2,7.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $\mu = \dots$ dan $\sigma = \dots$

sehingga nilai harapan dapat dicari dengan

$$E(X) = \mu,$$

$$E(\dots) = \dots$$

Jadi, nilai harapan siswa tersebut mencapai nilai 2,7 adalah

2. Asumsikan berat rata-rata bayi baru lahir adalah 3.500 gram dengan simpangan baku 225 gram. Tentukan nilai harapan bayi lahir dengan berat 3.750 gram.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $\mu = \dots$ dan $\sigma = \dots$

sehingga nilai harapan dapat dicari dengan

$$E(X) = \mu,$$

$$E(\dots) = \dots$$

Jadi, nilai harapan bayi lahir dengan berat 3.750 gram adalah

Latihan Soal Distribusi Normal

Selesaikan setiap persoalan berikut dengan benar.

1. Sebuah sekolah memiliki siswa laki-laki dengan berat badan yang berdistribusi normal. Berat badan rata-rata 61 kg dan simpangan baku 2 kg. Seorang guru olahraga akan memilih siswa laki-laki untuk mengikuti lomba gulat antarprovinsi yang mengharuskan berat badan peserta lomba di antara 58 kg dan 63 kg. Tentukan peluang siswa untuk mengikuti lomba gulat berdasarkan berat badannya.
2. Baterai otomotif memiliki umur rata-rata 3 tahun dengan standar deviasi 0,5 tahun.
 - a. Tentukan peluang bahwa baterai akan bertahan kurang dari 2,3 tahun.
 - b. Tentukan nilai harapannya.
3. Sebuah perusahaan elektronik memproduksi lampu dengan masa pakai berdistribusi normal dengan rata-rata 800 jam dan simpangan baku 40 jam.
 - a. Tentukan peluang lampu padam antara 778 jam dan 834 jam.
 - b. Tentukan nilai harapannya.
4. Tinggi rata-rata jenis pudel tertentu adalah 30 cm dan standar deviasinya adalah 4,1 cm.
 - a. Tentukan persentase pudel yang tingginya lebih dari 35,5 cm.
 - b. Tentukan nilai harapannya.
5. Berdasarkan data dari perusahaan *game online*, waktu bermain harian berdistribusi normal dengan standar deviasi 37 menit. Sebanyak 14% pemain bermain *game online* lebih dari 230 menit per hari. Tentukan rata-ratanya.
6. Mesin minuman ringan diatur untuk mengeluarkan rata-rata 200 ml per gelas. Misalkan banyaknya minuman yang dikeluarkan menyebar normal dengan simpangan baku 15 ml.
 - a. Berapa banyak gelas (dalam persentase) yang berisi lebih dari 224 ml?
 - b. Berapa peluang sebuah gelas berisi antara 191 ml dan 209 ml?

- c. Berapa gelas di antara 1.000 gelas berikutnya yang airnya akan meluap bila gelas-gelas itu berukuran 230 ml?
 - d. Berapa batasan volume dari 25% gelas yang berisi sedikit air?
7. Skor IQ 600 calon mahasiswa berdistribusi normal dengan rata-rata 115 dan standar deviasi 12. Misalkan sebuah perguruan tinggi membutuhkan skor IQ minimal 95. Berapa banyak calon mahasiswa yang akan ditolak atas dasar ini, terlepas dari kualifikasi mereka yang lain?
 8. Dua siswa menerima informasi bahwa mereka masing-masing mendapat nilai 0,8 dan 0,4 pada tes matematika pilihan ganda. Jika skor masing-masing adalah 88 dan 64, tentukan rata-rata dan nilai standar dari skor tes.

Uji Kompetensi Bab 4

A. Berikan tanda silang (×) pada kolom B jika pernyataan benar atau pada kolom S jika pernyataan salah.

No.	Pernyataan	B	S								
1.	Diketahui sebuah dadu bersisi enam dilempar satu kali. Misalkan X menyatakan nilai pada dadu tersebut, maka X adalah variabel acak diskret dan $P(X = 4) = \frac{1}{6}$.										
2.	Sebuah kantong berisi 6 bola hijau dan 4 bola putih. Dari kantong tersebut diambil 2 bola sekaligus. Jika X menyatakan banyak bola hijau yang terambil, distribusi peluang X sebagai berikut. <table border="1"> <tr> <td>$X = x$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr> <td>$P(X = x)$</td><td>$\frac{6}{45}$</td><td>$\frac{24}{45}$</td><td>$\frac{15}{45}$</td></tr> </table>	$X = x$	0	1	2	$P(X = x)$	$\frac{6}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$		
$X = x$	0	1	2								
$P(X = x)$	$\frac{6}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$								
3.	Diketahui fungsi peluang $f(x)$ sebagai berikut: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{untuk } 0 \leq x \leq 8, \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain.} \end{cases}$ Peluang $P(x \leq 2) = \frac{1}{4}$.										

No.	Pernyataan	B	S
4.	Sekeping uang logam dilempar tiga kali. Peluang muncul dua gambar pada pelemparan tersebut adalah $\frac{3}{8}$.		
5.	Misalkan X adalah variabel acak berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu = 25$ dan simpangan baku $\sigma = 10$. Peluang $P(20 < X < 38) = 0,6453$.		

B. Kerjakanlah soal-soal berikut dengan menyertakan proses penyelesaiannya.

1. Di dalam sebuah ruangan terdapat dua kotak. Kotak pertama berisi bola bernomor genap dari 1 sampai 6. Kotak kedua berisi bola dengan nomor bilangan asli dari 1 sampai 3. Diambil satu bola dari setiap kotak. Jika x menyatakan jumlah nomor bola yang terambil, tentukan x yang memenuhi.
2. Diketahui fungsi peluang $f(x)$ sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{untuk } 0 \leq x \leq 8, \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain.} \end{cases}$$

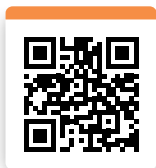
Tentukan peluang $P(2 \leq x \leq 4)$.

3. Dalam suatu Penilaian Akhir Semester, diberikan 4 soal yang masing-masing jawabannya benar atau salah. Misalkan X menyatakan jawaban benar dari 4 soal tersebut. Tentukan peluang seorang siswa menjawab 2 soal benar.
4. Rata-rata jarak tempuh angkutan umum yaitu 5.000 km per bulan dan standar deviasinya 1.200 km yang mengikuti sebaran normal. Tentukan peluang angkutan umum menempuh jarak antara 3.400 km dan 6.500 km dalam 1 bulan.
5. Tentukan peluang bahwa dalam sebuah keluarga dengan 4 anak terdapat:
 - a. paling sedikit satu anak laki-laki,
 - b. paling sedikit satu anak laki-laki dan satu anak perempuan.

6. Misalkan terdapat 2.000 keluarga dengan masing-masing memiliki 4 orang anak.
 - a. Tentukan harapan memiliki anak paling sedikit satu laki-laki.
 - b. Tentukan harapan memiliki dua anak laki-laki.
 - c. Tentukan harapan memiliki satu atau dua anak perempuan.
 - d. Tentukan harapan tidak memiliki anak perempuan.
7. Dari 200 siswa yang mengikuti ulangan matematika di suatu sekolah, rata-rata skornya 60 dan simpangan bakunya 10. Misalkan distribusi skornya normal.
 - a. Tentukan persentase siswa yang mendapat A jika nilai ≥ 80 .
 - b. Tentukan persentase siswa yang mendapat nilai C jika nilai C terletak pada interval $56 \leq C \leq 68$.
 - c. Tentukan persentase siswa yang mendapat nilai E jika nilai < 45 .
 - d. Tentukan nilai harapannya.
8. Nilai rata-rata ujian Matematika adalah 60 dengan varians 64. Peserta ujian memperoleh nilai A jika nilai minimal 80. Peserta ujian akan mendapat nilai B jika nilai paling kecil 65 dan kurang dari 80. Peserta harus mengikuti ujian perbaikan jika nilainya kurang dari 65. Misalkan distribusi nilai ujian tersebut mendekati distribusi normal dan seorang peserta dipilih secara acak.
 - a. Tentukan peluang bahwa peserta itu memperoleh nilai A.
 - b. Tentukan peluang bahwa peserta itu memperoleh nilai B.
 - c. Tentukan peluang bahwa peserta itu harus mengikuti ujian perbaikan.

Pengayaan

Kamu telah mengetahui bagaimana analisis data dan peluang sangat bermanfaat untuk memahami dunia di sekitar kita. Sekarang, kita akan mencoba menggunakan konsep tersebut untuk menganalisis data kehidupan nyata. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.



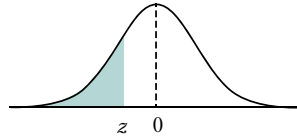
1. Bukalah situs web penyedia data terbuka, seperti <https://data.go.id/>.
2. Cari dan unduh kumpulan data yang membuat data numerik berkelanjutan, misalnya tinggi badan, berat badan, suhu udara, atau konsumsi energi.
3. Lakukan tahapan berikut:
 - ▶ hitung rata-rata dan simpangan baku dari data pilihanmu;
 - ▶ buatlah histogram dari data tersebut;
 - ▶ bandingkan bentuk histogram dengan kurva distribusi normal; serta
 - ▶ ubah data menjadi skor baku (*Z-score*). Apakah pola distribusinya menyerupai kurva normal standar?

Refleksi

Kamu telah mempelajari materi analisis data dan peluang pada bab ini. Sebagai bahan perenungan, jawablah setiap pertanyaan berikut sesuai dengan pengalaman belajarmu.

1. Bagaimana perasaanmu setelah mempelajari analisis data dan peluang? Apakah kamu merasa lebih tertantang atau semakin percaya diri dengan kemampuan matematikamu?
2. Menurutmu, apa manfaat utama mempelajari analisis data dan peluang, baik dalam pelajaran matematika maupun dalam kehidupan sehari-hari?

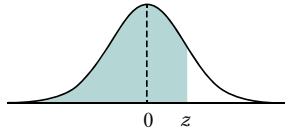
Lampiran



Tabel z Kumulatif Distribusi Normal untuk z Negatif [$P(Z \leq z)$]

z	-0,00	-0,01	-0,02	-0,03	-0,04	-0,05	-0,06	-0,07	-0,08	-0,09
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

Sumber: Richland Community College dalam <https://people.richland.edu/james/fall11/m113/tables.pdf>



Tabel z Kumulatif Distribusi Normal untuk z Positif [$P(Z \leq z)$]

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Sumber: Richland Community College dalam <https://people.richland.edu/james/fall11/m113/tables.pdf>

Glosarium

asimtot	sebuah garis yang sedemikian rupa sehingga jarak antara kurva dan garis tersebut mendekati nol seiring x atau y (salah satu atau keduanya) mendekati tak hingga
aturan rantai	kaidah menurunkan suatu fungsi komposisi
bentuk tak tentu	bentuk tak tentu meliputi $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \pm \infty, 0^0$, dan ∞^∞
distribusi binomial	distribusi suatu fungsi peluang dari n kali percobaan yang menghasilkan dua peluang saling bebas yang bernilai tetap dalam setiap percobaan
distribusi normal	distribusi peluang kontinu yang penting dalam analisis statistik parametrik
elips	himpunan titik-titik yang jaraknya terhadap dua titik tertentu selalu sama. Kedua titik tertentu tersebut adalah titik fokus.
fungsi aljabar	fungsi yang terdiri atas fungsi polinomial, fungsi rasional, dan fungsi akar
fungsi distribusi	suatu fungsi yang berhubungan dengan peluang suatu kejadian yang terdefinisikan dalam variabel acak
fungsi kontinu	fungsi yang terdefinisi dalam domainnya dan mempunyai limit yang bernilai sama dengan nilai fungsinya
fungsi peluang	suatu fungsi yang berhubungan dengan peluang suatu kejadian dengan syarat nilai fungsinya tak negatif dan fungsi kumulatifnya sama dengan 1
fungsi trigonometri	fungsi yang terdiri atas bentuk trigonometri, seperti sinus, kosinus, dan tangen
garis singgung	garis lurus yang menyinggung sebuah kurva pada sebuah titik

integral	antiturunan
Jumlahan Riemann	salah satu cara menentukan integral tentu
kedudukan garis	kedudukan suatu garis terhadap lingkaran (menyinggung, memotong, atau tidak menyinggung dan tidak memotong)
kedudukan titik	kedudukan suatu titik terhadap lingkaran (di luar, di dalam, atau dilalui)
kejadian	kumpulan dari satu atau lebih hasil suatu percobaan
kemiringan	koefisien arah suatu garis lurus
kosinus	kosinus suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi yang berseberangan dan sudut itu terhadap hipotenusa
<i>latus rectum</i>	garis yang melalui titik fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor pada elips
limit	pendekatan
lingkaran	tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap titik pusat
nilai maksimum	nilai fungsi saat mencapai titik maksimum
nilai minimum	nilai fungsi saat mencapai titik minimum
peluang	suatu nilai yang menyatakan kemungkinan terjadinya suatu kejadian
persamaan	kalimat matematika yang dihubungkan dengan tanda sama dengan (=)
ruang sampel	himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan
sinus	sinus suatu sudut merupakan perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut dan hipotenusa pada segitiga siku-siku.
sumbu fokal	garis lurus yang menghubungkan kedua titik fokus elips

sumbu mayor	diameter terpanjang elips; garis yang melalui pusat dan kedua fokus elips dan berakhir pada titik terjauh elips terhadap pusatnya
sumbu minor	diameter terpendek elips; garis yang melalui pusat dan berakhir pada titik terdekat elips terhadap pusatnya
tangen	tangen suatu sudut merupakan perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut dan sisi mendarat di samping sudut itu pada segitiga siku-siku.
titik balik maksimum	salah satu titik stasioner dengan ciri kurva cekung ke bawah sehingga pada titik tersebut kurva berubah dari naik menjadi turun
titik balik minimum	salah satu titik stasioner dengan ciri kurva cekung ke atas sehingga pada titik tersebut kurva berubah dari turun menjadi naik
titik belok	salah satu titik stasioner yang mengakibatkan adanya perubahan kurva dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau sebaliknya
titik potong	suatu titik hasil perpotongan garis atau kurva
titik stasioner	suatu titik yang berhenti dari naik atau turun, disebut juga titik diam
turunan	laju perubahan nilai suatu fungsi terhadap variabelnya
uji turunan	salah satu pengujian turunan pertama dan kedua dalam aplikasi turunan
variabel acak	suatu fungsi yang memetakan setiap titik pada ruang sampel terhadap bilangan real
variabel	karakteristik yang menunjukkan variasi atau sesuatu yang nilainya berubah-ubah

Daftar Pustaka

- Achmad, A. *Modul Pembelajaran SMA: Matematika Peminatan*. Jakarta: Kemdikbud, 2020.
- Adams, L.J. dan P.A. White. *Analytic Geometry and Calculus*. New York: Oxford University Press, 1968.
- Ayers, F. dan Ault. *Kalkulus Edisi Kedua*. Diterjemahkan oleh Lea Prasetio. Jakarta: Erlangga, 1990.
- Baisuni, H. *Kalkulus*. Jakarta: Universitas Indonesia, 2005.
- Bittinger, M.L., D.J. Ellenbogen, dan Scott J. Surgent. *Calculus and its Applications Tenth Edition*. Boston: Pearson Education, 2012.
- Danuri, M. *Pembelajaran Lingkaran SMA dengan Geometri Analitik*. Yogyakarta: P4TK Matematika, 2008.
- Diana, Rita dan Rory, R. “Estimasi Rata-Rata Lama Sekolah Tingkat Kecamatan Di Kabupaten Padang Pariaman Dengan Metode Empirical Best Linear Unbiased Predictor.” Dalam *Seminar Nasional Official Statistics 2019*, no. 1 (2019): 110–116. <https://doi.org/10.34123/semnasoffstat.v2019i1.228>.
- Dumairy. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta, 2012.
- Dwicaksono, M.B. dan C. Rangkuti. “Perancangan, pembuatan, dan pengujian kompor energi matahari portabel tipe parabola kipas.” Dalam *PROSIDING SEMINAR NASIONAL CENDEKIAWAN* (Februari 2018): 41–48.
- Ekawati, Aminah. “Penggunaan Software GeoGebra dan Microsoft Mathematic dalam Pembelajaran Matematika.” *Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika* 2, no. 3 (2016): 148–153.
- Gunawan, H. *Lingkaran, Menguak Misteri Bilangan, Bangun Datar dan Bangun Ruang Terkait dengan Lingkaran*. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2015.
- Herrhyanto, N. dan Tuti Gantini. *Pengantar Statistika Matematis*. Bandung: Yrama Widya, 2009.

- Hogg, R.V., Joseph W. McKean, dan Allen T. Craig. *Introduction to Mathematical Statistics*. Pearson Education, 2005.
- Kadir. *Statistika Terapan*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada, 2015.
- Kemendikdasmen Republik Indonesia. Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Nomor 046/H/KR/2025 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah. https://kurikulum.kemendikdasmen.go.id/file/1753929861_manage_file.pdf Jakarta: Kemendikdasmen RI, 2025.
- Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. *Sejarah dan Filsafat Matematika*. Jakarta: Kementerian pendidikan dan kebudayaan, 2018.
- Kontributor Wikipedia. "Abraham de Moivre." *WIKIPEDIA*, publikasi terakhir 20 Oktober 2018. https://ms.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre.
- Kontributor Wikipedia. "Jacob Bernoulli." *WIKIPEDIA*, publikasi terakhir 9 September 2025. https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli.
- Leithold, L. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Diterjemahkan oleh Hutahaean. Jakarta: Erlangga, 1988.
- Lestari, Indri. "Pengembangan Bahan Ajar Matematika dengan Memanfaatkan Geogebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep." *Gauss* 1, no. 01 (2018): 26–36. GAUSS: Universitas Serang Raya.
- Mauladaniyati, R. dan Widodo. *Geometri Analitik Ruang*. Yogyakarta: Matematika, 2020.
- Mursita, D. *Matematika untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains, 2011.
- NASA. "Eyes on The Solar System." NASA, 26 September 2025. <https://eyes.nasa.gov/apps/solar-system/#/home>.
- Nursiyono, J.A. dan Jamik Safitri. *Mengenal Integral Lebih Dekat*. Bogor: In Media, 2014.
- Pashaev, O. K. dan T. Parlakgörür. "Apollonius Representation of Qubits." (20 Juni 2017). <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1706.05399>.
- Peterson, G.L. *Algebra and Trigonometry*. California: Wadsworth Publishing, 1985.

- Pinem, D. *Kalkulus untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains, 2015.
- Pradyumnati, R.M. *Irisan Kerucut: Pengayaan Matematika SMA*. Lampung: UIN Raden Intan.
- Purcell, E.J. dan Dale Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2003.
- Purcell, E.J. dan Dale Varberg. *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2005.
- Rizki, N. A. *Geometri Analitik*. Samarinda: Universitas Mulawarman, 2018.
- Rory, R. dan Rita Diana. “Pemodelan Data Covid-19 Menggunakan Regresi Polinomial Lokal.” Dalam *Seminar Nasional Official Statistics 2020*, no. 1 (2020): 91–98. <https://doi.org/10.34123/semnasoffstat.v2020i1.554>.
- Simangunsong, W. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlanga, 2005.
- Spiegel, M.R. *Statistika Edisi Kedua*. Diterjemahkan oleh I Nyoman Susila dan Ellen Gunawan. Jakarta: Erlangga, 1996.
- Stewart, J. *Multivariable Calculus*. California: Brook Cole Cengage, 2012.
- Stewart, J. *Single Variable Calculus: Concepts and Contexts, Enhanced Edition*. California: Brook Cole Cengage, 2018.
- Subanar. *Statistika Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2013.
- Sukmadewi, T.S. *Modul Matematika Umum Kelas XI KD 3.10*. Jakarta: Direktorat Jenderal PAUD, DIKDAS, dan DIKMEN.
- Sunardi dan Erfan Yudianto. *Teori dan Soal-soal Geometri Analitika Bidang Jember*: Unej, 2015.
- Suyitno, A. *Guru Pembelajar: Modul Matematika SMA Kelompok Kompetensi E*. Jakarta: Direktorat Jendral Guru dan Tenaga Kependidikan, 2016.
- Varberg, D., E.J. Purcell, dan S.E. Rigdon. *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2010.
- Walpole, R.E. dan Raymond H. Myers. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB, 1986.
- Walpole, R.E. *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama, 1993.
- Wardiman. *Hitung Integral*. Yogyakarta: Hanindita, 1982.

Yahya, Yusuf, D. Suryadi H.S., dan Agus S. *Matematika Dasar Perguruan Tinggi*. Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia, 2012.

Yunita, A. dan Hamdunah. *Modul Geometri Analitik*. Padang: Rumahkayu Pustaka Utama, 2017.

Daftar Sumber Gambar

Gambar 1.3: digambar ulang dari <https://www.geeksforgeeks.org/maths/examples-of-ellipse-in-real-life/> pada 15 Mei 2025

Gambar 2.2: digambar ulang dari https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Karl_Weierstrass_2.jpg pada 29 September 2025

Gambar 2.21: Rory, R. dan Rita Diana. “Pemodelan Data Covid-19 Menggunakan Regresi Polinomial Lokal.” Dalam *Seminar Nasional Official Statistics 2020*, no. 1 (2020): 91–98. <https://doi.org/10.34123/semnasoffstat.v2020i1.554>.

Gambar 3.2: diunduh dari [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christoph_Bernhard_Francke_-_Bildnis_des_Philosophen_Leibniz_\(ca._1695\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christoph_Bernhard_Francke_-_Bildnis_des_Philosophen_Leibniz_(ca._1695).jpg) pada 15 Mei 2025

Gambar 3.5: diunduh dari https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg pada 15 Mei 2025

Gambar 3.22: digambar ulang dari <https://www.instagram.com/p/CnWlDaS8qq/>

Gambar 3.23: diunduh dari <https://i1.wp.com/risetcdn.jatimtimes.com/images/2020/10/02/Batik-Tulis-Celaket-Hendra-Saputra7dc00604a1e450c4.jpg?quality=50> pada 15 Mei 2025

Gambar 4.12: digambar ulang dari https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jakob_Bernoulli.jpg pada 15 Mei 2025

Gambar 4.18: digambar ulang dari https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Abraham_de_Moivre_by_Joseph_Highmore.jpg pada 15 Mei 2025

Indeks

A

amplitudo 283
antiturunan 160, 167, 193, 213, 284
aplikasi turunan 80, 148, 285
asimtot 268, 283
aturan rantai 110, 283

B

bentuk baku 9, 12, 13, 22
bentuk tak tentu 283
bentuk umum 12, 14, 128, 218

D

definisi limit fungsi 84, 85
definisi lingkaran 5, 166
definisi turunan fungsi 102, 121
diameter 8, 10, 11, 13, 17, 20, 38, 285
distribusi binomial 222, 223, 256,
257, 258, 261, 265, 283
distribusi normal 222, 223, 265, 267,
268, 269, 273, 274, 279, 280, 283
distribusi peluang 221, 242, 245, 247,
248, 249, 251, 256, 265, 277, 283

E

eksponensial 121, 124, 125, 171, 172,
214
elips 1, 2, 3, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,
26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,
35, 36, 37, 38, 67, 68, 76, 77, 283,
284, 285

F

fungsi aljabar 85, 88, 91, 103, 114,
116, 172, 283
fungsi densitas peluang 223, 249,
250, 251
fungsi diam 132, 147
fungsi distribusi 249, 251, 283
fungsi eksponensial 121, 124, 125,
171, 172
fungsi kontinu 95, 96, 100, 145, 193,
283
fungsi naik 131, 132, 134, 135, 147
fungsi peluang 221, 222, 223, 242,
243, 244, 245, 246, 247, 249, 250,
253, 278, 283
fungsi polinomial 143, 283
fungsi trigonometri 88, 90, 91, 116,
117, 118, 126, 283
fungsi turun 131, 132, 134, 135, 147

G

garis lurus 19, 20, 58, 98, 99, 101,
127, 128, 174, 283, 284
garis sekan 100, 101
garis singgung 2, 38, 51, 52, 53, 54,
55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63,
64, 65, 66, 67, 68, 76, 77, 127, 128,
129, 130, 131, 146, 283

garis singgung lingkaran 2, 38, 51,
52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60,
61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 76,
77

garis tangen 101, 127, 128

H

hiperbola 76

I

integral 160, 161, 162, 166, 167, 168,
169, 170, 171, 174, 175, 177, 178,
184, 185, 186, 187, 188, 189, 194,
203, 204, 209, 212, 213, 216, 217,
218, 219, 220, 284, 289, 290

integral parsial 160

integral tak tentu 160, 167, 168, 169,
170, 177, 188, 189, 194, 212, 217,
220

integral tentu 160, 184, 185, 186, 187,
188, 189, 203, 213, 216, 217, 220,
284

irisan kerucut 4

J

jari-jari viii, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,
13, 14, 15, 16, 17, 67, 126, 178,
216

Jumlahan Riemann vii, 178, 180, 181,
182, 183, 184, 185, 186, 187, 202,
216, 284

K

kalkulus 77, 81, 162, 253

kedudukan garis 38, 43, 44, 45, 51,
284

kejadian 223, 230, 234, 242, 250, 254,
255, 256, 283, 284

kemiringan 51, 57, 58, 59, 60, 64, 98,
99, 100, 101, 128, 129, 130, 131,
133, 284

komposisi fungsi 111

kontinuitas fungsi 93

koordinat Kartesius 6, 9, 178, 197,
200, 201, 220

kosinus 4, 91, 283, 284

kurva normal 265, 267, 270, 280

L

latus rectum 20, 28, 29, 33, 34, 36,
284

limit 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 90,
91, 96, 97, 102, 117, 148, 283, 284

limit fungsi 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91,
117, 148

limit fungsi aljabar 85, 88, 91

limit fungsi trigonometri 88, 90, 91,
117

lingkaran 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
12, 13, 14, 15, 16, 17, 38, 39, 40,
41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49,
50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58,
59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67,
68, 76, 77, 88, 89, 178, 179, 184,
284

Lingkaran 4, 5, 6, 9, 39, 42, 43, 44,
51, 62, 166, 284

logaritma 124, 125

luas bidang datar 160, 199, 200, 201

N

nilai balik maksimum 140, 141, 145,
146, 147

nilai balik minimum 140, 141, 145,
146, 147

nilai harapan 222, 255, 261, 262, 263,
264, 274, 275, 276

P

Parabola 70, 71, 72, 73

peluang x , 3, 221, 222, 223, 225, 232,
233, 234, 235, 236, 242, 243, 244,
245, 246, 247, 248, 249, 250, 251,
252, 253, 254, 255, 256, 257, 258,
259, 260, 261, 262, 263, 264, 265,
266, 269, 270, 271, 272, 273, 276,
277, 278, 279, 280, 283, 284

penerapan integral 204, 218

persamaan elips 2, 20, 22, 23, 24, 25,
26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36,
37, 38, 67, 68

persamaan garis singgung lingkaran
2, 38, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58,
59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67,
68

persamaan lingkaran 1, 2, 7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 38, 39,
40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49,

50, 51, 52, 53, 56, 59, 60, 62, 64,
65, 66, 67, 77

Proses Bernoulli 256

R

rata-rata 97, 98, 99, 265, 266, 267,
268, 271, 272, 275, 276, 277, 278,
279, 280

ruang sampel 225, 226, 227, 228, 229,
231, 232, 234, 239, 240, 241, 257,
258, 262, 263, 284, 285

S

sekan 100, 101

sifat eksponen 121

sifat limit 85, 86, 87, 88, 90, 91, 102,
117

sifat turunan 105, 108, 109, 114, 116,
118, 124, 125, 168, 169, 188, 189

sinus 4, 91, 283, 284

standar deviasi 271, 275, 276, 277

sumbu fokal 284

sumbu mayor 20, 22, 23, 24, 25, 26,
27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35,
37, 68, 284, 285

sumbu minor 22, 24, 28, 29, 32, 33,
34, 35, 68, 285

T

tangen 4, 58, 91, 101, 127, 128, 283,
285

Teorema Pythagoras 8, 9, 21, 70

titik balik maksimum 139, 140, 142,
143, 144, 146, 147, 285

titik balik minimum 139, 140, 142,
 143, 144, 146, 154, 285
 titik belok 140, 147, 268, 285
 titik ekstrem 137, 138, 139, 140, 141,
 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148,
 218
 titik fokus 18, 19, 20, 24, 25, 27, 28,
 30, 33, 35, 36, 37, 69, 70, 71, 72,
 73, 74, 76, 283, 284
 titik potong 46, 48, 49, 55, 68, 71,
 130, 146, 199, 200, 201, 285
 titik puncak 28, 30, 33, 36, 69, 70, 71,
 72, 73, 74, 75, 76
 titik pusat 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16,
 17, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28,
 33, 34, 35, 36, 37, 42, 51, 60, 67,
 146, 174, 284
 titik singgung 51, 52, 53, 67, 128, 130,
 131
 titik stasioner 137, 285
 turunan fungsi aljabar 114, 116
 turunan fungsi trigonometri 116, 118

U

uji turunan kedua 143, 144, 145, 146
 uji turunan pertama 143, 144, 145

V

variabel acak 221, 222, 223, 224, 226,
 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233,
 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240,
 241, 242, 243, 245, 246, 247, 248,
 249, 250, 251, 252, 253, 265, 277,
 278, 283, 285

variabel acak diskret 230, 232, 233,
 234, 235, 236, 237, 242, 245, 246,
 247, 277
 variabel acak kontinu 238, 239, 240,
 248, 249, 250, 253, 265
 varians 265, 267, 279

Profil Pelaku Perbukuan

Profil Penulis

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sri Adi Widodo, M.Pd.
Email : sriadi@ustjogja.ac.id
Instansi : Universitas Sarjanawiyata
Tamansiswa
Alamat Instansi : Jl. Batikan, UH-III Jl. Tuntungan No.
1043, Tahunan, Kec. Umbulharjo, Kota
Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta 55167
Bidang Keahlian : Pembelajaran Matematika, Media Pembelajaran
Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

2009–sekarang Dosen Pendidikan Matematika Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. S-1 Pendidikan Matematika, Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Yogyakarta, tahun masuk 2001
2. S-2 Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret (UNS), Surakarta, tahun masuk 2008
3. S-3 Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, tahun masuk 2016

Judul Buku dan Tahun Terbit (4 Tahun Terakhir):

1. Matematika SMA/SMK Kelas XI, Penerbit Yudhistira (2022)
2. Metode Numerik Bahan Ajar dengan Pendekatan Problem Solving (2023)
3. Norma Sosiomatematis: Landasan Teoretis dan Praktis Penelitian, Penerbit Deepublish (2024)
4. Kemampuan Memecahkan Masalah Matematis: Suatu Konsep Dasar, Penerbit Deepublish (2025)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (1 Tahun Terakhir):

1. Lembar Kerja Digital Berbasis Ethno-Modelling Dan Tri-N Pada Pembelajaran Mendalam Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis Matematis Siswa (2025).
2. The effect of teaching props on the mathematical problem-solving skills: A meta-analysis study (2025)
3. Android-based Mathematics Learning Media on Geometry Using the Context of Tourist Destinations (2025).

Informasi Lain:

<https://scholar.google.com/citations?user=CobzRdUAAAAJ&hl=id>



Profil Penulis

Nama Lengkap : Dr. Wikan Budi Utami, M.Pd.
Email : wikanbudiutami@unikama.ac.id
Instansi : Universitas PGRI Kanjuruhan Malang
Alamat Instansi : Jl. S. Supriadi No. 48, Bandungrejosari,
Kec. Sukun, Kota Malang, Jawa Timur
65148
Bidang Keahlian : Desain Pembelajaran Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. 2012–2022 Dosen Pendidikan Matematika Universitas Pancasakti Tegal
2. 2022–sekarang Dosen Program Studi S-1 Pendidikan Matematika Universitas PGRI Kanjuruhan Malang

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. S-1 Pendidikan Matematika Universitas Pancasakti Tegal, tahun masuk 2006
2. S-2 Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta (UNS), tahun masuk 2010
3. S-3 Teknologi Pembelajaran Universitas Negeri Malang, tahun masuk 2022

Judul Buku dan Tahun Terbit (4 Tahun Terakhir):

1. Matematika SMA/SMK Kelas X (2022)
2. Matematika SMA/SMK Kelas XI (2022)
3. Matematika SMA/SMK Kelas XII (2023)
4. Analisis Numerik Bahan Ajar dengan Pendekatan *Problem Solving* (2023)
5. Trigonometri Kelas X Fase E (2024)
6. Desain dan Implementasi Pembelajaran Adaptif: Pada Pembelajaran Matematika Bermuatan Ethnomatematika (2025)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (3 Tahun Terakhir):

1. Penerapan Mobile Learning dalam Implementasi Kurikulum Merdeka sebagai Penguatan Profil Pelajar Pancasila (2023)
2. Pengembangan Modul *Microlearning* Berbasis Candi Singasari sebagai Pembelajaran Kearifan Lokal untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematika (2024)
3. Pengembangan Desain Pembelajaran Adaptif Bermuatan Ethnomatematika terhadap Kemampuan Literasi dan Pemecahan Masalah Matematika (2025)

Informasi Lain:

<https://scholar.google.com/citations?user=i4HqnqgAAAAJ&hl=id>



Profil Penulis

Nama Lengkap : Fitria Sulistyowati, M.Pd.
Email : fitria.sulistyowati@ustjogja.ac.id
Instansi : Universitas Sarjanawiyata
Tamansiswa
Alamat Instansi : Jl. Batikan, UH-III Jl. Tuntungan
No.1043, Tahunan, Kec. Umbulharjo,
Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta 55167
Bidang Keahlian : Media Pembelajaran dan Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. 2015–2018 Tentor Primagama Magelang
2. 2018–sekarang Dosen Program Studi S-1 Pendidikan Matematika Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. S-1 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Purworejo, tahun masuk 2010
2. S-2 Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta (UNS), tahun masuk 2016

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Siswa dan Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (2021)
2. Metode Numerik Bahan Ajar dengan Pendekatan *Problem Solving* (2023)
3. MODEL-MODEL PEMBELAJARAN: PRINSIP, KONSEP, DAN APLIKASI (2024)
4. BELAJAR DAN PEMBELAJARAN (2024)
5. Psikologi Pendidikan: Sebuah Pengantar (2025)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Game Pembelajaran Online Program Linear
2. Pengembangan Bank Soal High Order Thinking Skills Berbasis 3N pada Mata Kuliah Aljabar
3. Meta-Analysis Study: Effectiveness of Using GeoGebra on Students' Mathematical Ability (2025)
4. THE ANALYSIS OF POOR COMMUNICATION IMPACT ON STUDENTS' INTEREST IN LEARNING EXPONENT TOPIC (2025)

Informasi Lain:

<https://scholar.google.com/citations?hl=id&user=aVvthBgAAAAJ>



Profil Penulis

Nama Lengkap : Atiek Sandrawati, S.Pd.
Email : atieksandrawati29@guru.sma.belajar.id
Instansi : SMA Negeri 1 Karanganom
Alamat Instansi : Jl. Raya 3 Karanganom, Klaten
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. 2011–2012 Guru Matematika di SMA Tri Dharma, Ende, Flores
2. 2014–2020 Guru Matematika di SMAN CMBBS, Pandeglang, Banten
3. 2020–sekarang Guru Matematika di SMAN 1 Karanganom, Klaten, Jawa Tengah

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

S-1 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Semarang, tahun masuk 2006

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Bunga Rampai Merawat Sehat, Merawat Indonesia, Gapai Prestasi dengan Raga Bugar dan Bergizi (2023)
2. Bulan Guru (2024)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pendekatan Kolaboratif dengan Asesmen Estafet Matematika untuk Meningkatkan Kompetensi Sosial Emosional Siswa

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
Email : sunardi.fkip@unej.ac.id
Instansi : –
Alamat Instansi : FKIP Universitas Jember, Jl. Kalimantan
No. 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Dosen Program Studi S-1, S-2, dan S-3 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (1982–2024)
2. Dosen Program Studi Magister Pendidikan Dasar dan Pendidikan Matematika UT (2010–sekarang)
3. Dosen Penguji Disertasi S-3 Program Studi Pendidikan Matematika di UM, UNESA, UNES (2016–2024)
4. Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16 Universitas Jember (2007–2016)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-3: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, lulus tahun 2005
2. S-2: Pendidikan Matematika, IKIP Malang, lulus tahun 1996
3. S-1: Pendidikan Matematika, IKIP Malang, lulus tahun 1981

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMA/SMK Kelas X (2021) (Penelaah)
2. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika Untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X (2019) (Penelaah)
3. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII (2018) (Editor)
4. Matematika Fisika 1 dan Matematika Fisika 2 (2018) (Penelaah)
5. Strategi Belajar Mengajar IPA (2016) (Penelaah)

Judul Buku dan Tahun Terbit (7 Tahun Terakhir):

1. Development of the Spatial Visual Oriented Geometry Test to Measure the Creative Thinking Ability of Elementary Students (2020)
2. The Development of Tangram-Based Geometry Test to Measure the Creative Thinking Ability of Junior High School Students in Solving Two-Dimensional Figure Problems (2020)
3. The Geometry Anxiety of Students' Visualization, Analysis, and Informal Deduction Levels in Solving Geometry Problem (2019)
4. The profile of student's anxiety in solving the critical thinking problem on geometry according to Van Hiele theory (2019)

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng
Email : kiki@sci.ui.ac.id
Instansi : Universitas Indonesia
Alamat Instansi : Kampus UI Depok, Depok 16424
Bidang Keahlian : Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. 1986–sekarang : Dosen Tetap Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia
2. 2018–2023 : Vice President of Institute Combinatorics and Its Application
3. 2012–2016 : Wakil Presiden Indonesian Mathematical Society (IndoMS)
4. 2016–sekarang : Chief Editor of Indonesian Journal of Combinatorics
5. 2013–sekarang : Managing Editor of Electronic Journal of Graph Theory and Applications

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. 2001–2006 : Doctor of Philosophy, University of Ballarat, Australia
2. 1985–1987 : Magister Matematika, Institut Teknologi Bandung
3. 1979–1985 : Sarjana Matematika, Universitas Indonesia

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matriks dalam Pelabelan Graf (2023), UI Publishing

Judul Buku yang Pernah Ditelaah (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika SD Kelas VI (Buku Siswa dan Buku Guru)
2. Matematika SMP Kelas VII (Buku Siswa dan Buku Guru)
3. Matematika SMA Tingkat Lanjut Kelas XI (Buku Siswa dan Buku Guru)
4. Matematika SMA Tingkat Lanjut Kelas XII (Buku Siswa dan Buku Guru)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Hinding, N, Sunusi, N, Mutmainnah, S, Rahayu, I.I, Syafrizal Sy, Sugeng, K.A., Simanjuntak, R, A constructive method to determine the total vertex irregularity strength of two flower graph variants, *MethodsX*, 2025, 15, 103587
2. Barack, Z.Z., Sugeng, K. A., Semaničová- Feňovčíková, A., Bača, M., Modular Irregularity Strength of Corona Product Graph, *DML* 2024, 13, 111-116
3. Judul lain dapat dilihat di: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=12797262400>
<https://scholar.ui.ac.id/en/persons/kiki-ariyanti>



Profil Ilustrator

Nama Lengkap : Reddy Fajar Ciptoadi, S.Pd.
Email : ciptoadiku@gmail.com
Instansi : SMP Negeri 54
Alamat Instansi : SMP Negeri 54 Surabaya Jl. Kyai Tambak
Deres No. 293, Bulak, Kec. Bulak,
Surabaya, Jawa Timur.
Bidang Keahlian : Ilustrasi



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Art and Music Teacher di SD Surabaya Montessori School (2013–2023)
2. Guru SMP Negeri 54 Surabaya (2023–sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-1 Pendidikan Ekonomi Tata Niaga Universitas Negeri Surabaya tahun 2006.
2. S-1 PGSD Universitas Terbuka tahun 2023.

Karya Buku dan Ilustrasi (10 Tahun Terakhir):

1. Ilustrator Berbahasa Mandarin, Inggris dan Indonesia Tanpa Hafal buku 1 dan 2 tahun 2015. Penerbit PT Pustaka Internasional.
2. Ilustrator Buku Bintang Pendidikan Agama Islam dan Budi Pekerti untuk SD kelas 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 Tahun 2020. Penerbit CV Bintang Sarana Media.
3. Ilustrator Buku Pendidikan Agama Islam dan Budi Pekerti SD Kelas II Tahun 2021. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
4. Ilustrator Buku Matematika untuk SD/MI Kelas III Tahun 2022. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
5. Ilustrator Buku Pendidikan Pancasila SD Kelas I Tahun 2023. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
6. Ilustrator Buku Panduan Guru Seni Musik Tahun 2024. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
7. Ilustrator Bahasa Inggris: English for Nusantara Kids untuk SD/MI Kelas IV Tahun 2024. Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.

Profil Editor

Nama Lengkap : Uly Amalia, S.Si.
Email : ulyaaa13@gmail.com
Instansi : -
Alamat Instansi : -
Bidang Keahlian : Penyuntingan Buku

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

Editor, pemeriksa aksara, dan penulis lepas (2012—sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

S-1: Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor (2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

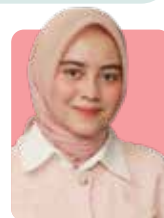
1. Buku Teks Pendamping Matematika untuk SD/MI Kelas IV (2023)
2. Target Nilai 100 Ulangan Tematik SD/MI Kelas 3 (2021)

Judul Buku yang Disunting dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Dasar-Dasar Teknik Jaringan Komputer dan Telekomunikasi untuk SMK/MAK Kelas X, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi (2023)
2. Buku Panduan Guru Dasar-Dasar Teknik Jaringan Komputer dan Telekomunikasi untuk SMK/MAK Kelas X, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi (2023)
3. Buku Teks Pendamping Matematika untuk SD/MI Kelas II, Bukit Mas Mulia (2023)
4. Ilmu Pengetahuan Sosial untuk SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi), Kemdikbudristek (2023)
5. Panduan Guru Ilmu Pengetahuan Sosial untuk SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi), Kemdikbudristek (2023)
6. Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan, Kemdikbudristek (2022)
7. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan, Kemdikbudristek (2022)

Profil Editor

Nama Lengkap : Sofia Nida Khoerunnisa
Email : khoerunnisasofia@gmail.com
Instansi : Pusat Perbukuan, Kemendikbudristek
Alamat Instansi : Jalan RS. Fatmawati Gd D
Kemendikbudristek Cipete, Jakarta
12410
Bidang Keahlian : Penyuntingan Naskah



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

2022 – sekarang : Pusat Perbukuan, Kemendikbudristek

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. S1 Pendidikan Matematika – Universitas Siliwangi (2019)
2. S2 Pendidikan Matematika – Universitas Siliwangi (2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit:

1. *Analisis Kemampuan Penalaran Induktif Matematik Peserta Didik Ditinjau dari Gaya Belajar Silver-Hanson*, Journal of Authentic Research on Mathematics Education (JARME), 2020.
2. *The Student Achievement assisted Edmodo: An Alternative to Online Learning in Pandemic Era*, Edumatika: Jurnal Riset Pendidikan Matematika, 2020.
3. *Pengembangan Digibook Trigonometri Berbasis Flip PDF untuk Mengeksplor Kemampuan Koneksi Matematis*, Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika, 2021.

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. *Hitungannya Nala: Mencari Jadwal Runa*, Kemendikbudristek, 2024

Profil Editor Visual

Nama Lengkap : M. Firdaus Jubaedi
Email : muhafir@gmail.com
Instansi : Thinkin Studio
Alamat Instansi : Jl. Permai 24 No. 9 Desa Mekarrahayu,
Kecamatan Margaasih, Kab. Bandung
Bidang Keahlian : Desain Grafis, UI/UX Desain



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. *Creative Director*, Thinkin Studio (2019–sekarang)
2. Konsultan Komunikasi Visual, Ditjen PAUD, Dikdas, dan Dikmen, Kemendikbudristek (2022–2024)
3. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020–2021)
4. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019–2020)
5. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018–2019)
6. Multimedia Designer, Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016–2018)
7. Intern Junior Art Director di Syafa'at Marcomm (2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

S-1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011–2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (5 Tahun Terakhir):

1. Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi) (2023)
2. Matematika untuk SMA/SMK Kelas X, Kemdikbud (2021)
3. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X, Kemdikbud (2021)
4. Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama, Modul, Kemdikbud (2021)

Profil Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : Dono Merdiko
Email : donoem2025@gmail.com
Instansi : Praktisi Perbukuan
Alamat Instansi : Jl. Akmaliah No. 24, 13730
Bidang Keahlian : Desain Buku



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Penata Letak Buku Kurikulum Merdeka Kemendikdasmen (2024–sekarang)
2. Penata Letak Buku Kurikulum Merdeka Kemendikbudristek (2020–2024)
3. Penata Letak Buku Tematik Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemendikbud (2014–2019)
4. Penata Letak Mizan Group (2013–2021)
5. Penata Letak Penerbit Kasyaf (2005–2021)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

Bina Sarana Informatika, Manajemen Informatika, 2002

Buku yang Pernah Dibuat Ilustrasi/Desain (10 Tahun Terakhir):

1. Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI Edisi Revisi, Pusat Perbukuan (2024)
2. Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI Edisi Revisi, Pusat Perbukuan (2024)
3. Bahasa Inggris *English for Nusantara Kids* Kelas III Pusat Perbukuan (2024)
4. Buku Panduan Guru Bahasa Inggris *English for Nusantara Kids* Kelas III, Pusat Perbukuan (2024)
5. Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan (2023)
6. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan (2023)
7. Dasar-Dasar Teknik Kimia Industri untuk SMK/MAK Kelas X Pusat Perbukuan (2023)
8. Buku Panduan Guru Dasar-Dasar Teknik Kimia Industri untuk SMK/MAK Kelas X Pusat Perbukuan (2023)
9. Matematika untuk SD/MI Kelas I, Pusat Perbukuan (2022)
10. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas I, Pusat Perbukuan (2022)
11. Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI, Pusat Perbukuan (2021)
12. Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI, Pusat Perbukuan (2021)
13. Buku Panduan Guru Pengembangan Pembelajaran untuk Satuan PAUD, Pusat Perbukuan (2021)
14. Buku Seri Tematik, Pusat Kurikulum dan Perbukuan (2014–2019)